

УДК 620.178.6

## ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ РАЗВИТИЯ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

А. П. Шабанов

Сибирский государственный университет путей сообщения, 630049 Новосибирск  
E-mail: shabanov@211.ru

Предложен механизм развития трещины на основе исследования изменения радиуса кривизны ее вершины в процессе циклического нагружения образца. Получены зависимости, связывающие механические характеристики материала, геометрию трещины и скорость ее роста при циклическом нагружении конструкции.

Ключевые слова: усталостная трещина, пластическая зона, закон Париса.

**1. Исходные положения.** При построении модели усталостной трещины используются следующие положения.

1. Рассматривается однородный и изотропный пластичный материал, диаграмму растяжения которого после идеализации можно представить в виде диаграммы Прандтля, со следующими параметрами:  $\sigma_y$  — предел текучести материала,  $\varepsilon_y$  — деформация, соответствующая пределу текучести,  $\varepsilon_B$  — предельная деформация,  $E$  — продольный модуль упругости.

2. Образец находится в условиях плоского напряженного состояния.

3. Материал образца относится к классу циклически стабильных. В процессе циклического нагружения пределы текучести при сжатии и растяжении и предельная деформация  $\varepsilon_B$  не изменяются.

4. Размеры пластических областей, примыкающих к вершинам трещины, значительно меньше размеров упругих областей образца.

5. Жесткость материала упругой области образца существенно больше жесткости материала пластической области, непосредственно примыкающей к вершине трещины. Поэтому считается, что деформирование пластической области со стороны упругой области материала осуществляется по типу жесткого нагружения.

6. На бесконечности к образцу приложены напряжения, ориентированные перпендикулярно направлению трещины. Максимальные напряжения цикла нагружения равны  $\sigma_{\max}$ , минимальные —  $\sigma_{\min}$ . Абсолютное значение внешних напряжений не превышает предела текучести материала.

7. Циклическое нагружение образца на каждом полупериоде внешней нагрузки будем моделировать последовательным приложением растягивающих (в процессе нагружения) и сжимающих (в процессе разгрузки) напряжений на бесконечности, равных  $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ . Исследуется изменение напряженно-деформированного состояния области, примыкающей к вершине дефекта, при нагружении от значения  $\sigma_{\min}$  до значения  $\sigma_{\max}$  и при разгрузке от значения  $\sigma_{\max}$  до значения  $\sigma_{\min}$ .

8. Разрушение материала происходит в момент, когда деформации превышают предельное значение  $\varepsilon_B$ . При сжатии величина деформации не ограничена.

9. Анализируется установившийся процесс разрушения. Геометрия трещины и напряженно-деформированное состояние материала в вершине дефекта сформировались

в результате предыдущего продолжительного циклического нагружения образца. Механизмы старта трещины и хрупкого долома не рассматриваются.

**2. Упругопластическое деформирование трещиновидных дефектов.** Пусть образец имеет трещиновидный дефект длиной  $2l$  с радиусом кривизны в вершине  $\rho$ . Установим соотношение между величиной внешних напряжений и величиной пластических деформаций в вершине трещины. Для этого запишем соотношение Нейбера для коэффициентов концентраций [1]

$$k_e^2 = k_\sigma k_\varepsilon, \quad (1)$$

где  $k_e = \sigma_e/\sigma_n$ ;  $k_\sigma = \sigma/\sigma_n = \sigma_y/\sigma_n$ ;  $k_\varepsilon = \varepsilon/\varepsilon_n$ ;  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  — напряжения и деформации в вершине дефекта;  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$  — соответственно номинальные напряжения и деформации в невозмущенной части образца, связанные равенством  $\sigma_n = E\varepsilon_n$ ;  $\sigma_e$  — напряжения, которые действовали бы в вершине трещины в предположении, что материал образца подчиняется закону Гука во всем диапазоне нагрузок вплоть до разрушения.

Равенство (1) получено для призматического стержня с гиперболическим концентратором, изготовленного из любого материала, деформирующегося по нелинейному закону, и испытывающего антиплоский сдвиг (нагружение трещины по моде  $K_{III}$ ). В работе [1] предполагается, что это равенство справедливо и для других типов концентраторов и видов нагружения. Экспериментальная проверка равенства (1) с использованием метода фотоупругих покрытий для случая осевого растяжения прямоугольной полосы с круговым отверстием, изготовленной из алюминиевого сплава Д16Т, выполнена в работе [2]. Результаты этих экспериментов подтвердили справедливость формулы (1). Аналогичная задача о растяжении прямоугольной полосы из сплава Д16Т с круговым отверстием за пределом текучести решалась численно [3]. Полученные в результате расчета значения концентрации напряжений и деформаций подставлялись в правую часть уравнения (1) и сравнивались со справочным значением коэффициента концентрации  $k_e$  при упругом растяжении [4]. Погрешность составила 5,3 %. Сказанное выше позволяет сделать вывод, что формула (1) может быть использована для анализа напряженно-деформированного состояния в вершинах трещиновидных дефектов, как, например, в работе [5].

Запишем соотношение (1) с учетом принятых выше обозначений. Следует отметить, что это равенство справедливо, если при нулевых напряжениях деформации также равны нулю. Однако при циклическом нагружении на диаграмме растяжения наблюдается гистерезисная петля (рис. 1). Поэтому начало координат поместим в точку  $O$ . В такой системе координат абсцисса  $\varepsilon^*$  связана с деформацией  $\varepsilon$  выражением  $\varepsilon^* = \varepsilon - (\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_y)$ . В новой системе координат предельную деформацию обозначим  $\varepsilon_b^*$ . В результате получаем соотношение, связывающее значение упругопластической деформации на контуре отверстия и упругие напряжения, которые действовали бы в той же точке, соответствующей вершине трещины, в предположении, что материал образца деформируется абсолютно упруго:

$$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_y} = \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^2. \quad (2)$$

В качестве гипотезы примем следующее

**Утверждение.** *В процессе нагружения точки, расположенные на берегах трещины, перемещаются строго в направлении действия внешней нагрузки, т. е. перпендикулярно направлению большой полуоси эллипсовидной трещины.*

Данное утверждение справедливо лишь в случае, когда трещина моделируется математическим разрезом (упругое асимптотическое решение Вестергаарда [6]). Если дефект представляет собой затупленную трещину, которую приближенно можно интерпретировать как весьма узкое эллиптическое отверстие, находящееся в образце, обладающем

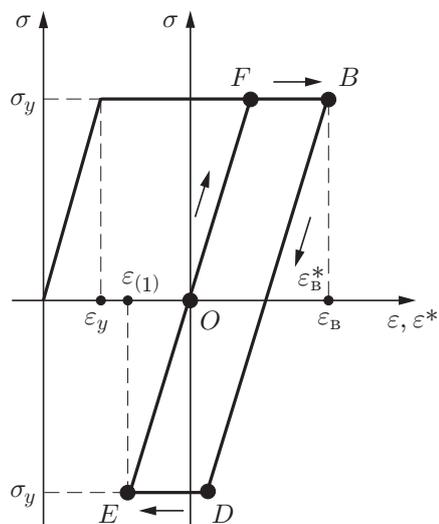


Рис. 1

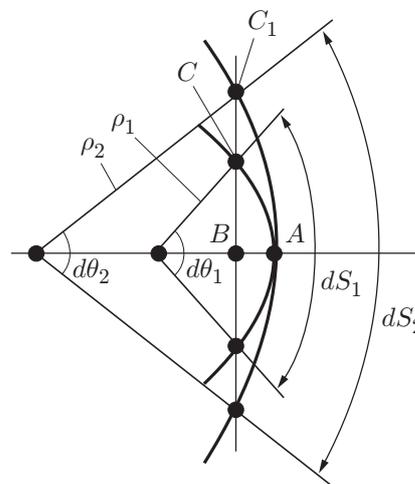


Рис. 2

Рис. 1. Диаграмма растяжения образца при его циклическом нагружении

Рис. 2. Схема упругопластического деформирования вершины трещины на первом полуцикле нагружения

упругопластическими свойствами, то это утверждение строго не выполняется. Рассматривая перемещения точки  $A$ , лежащей в вершине дефекта, и точки  $C$ , расположенной на берегу трещины бесконечно близко к точке  $A$ , отметим следующее обстоятельство: горизонтальные перемещения этих точек практически одинаковы:  $u_A \simeq u_C$ , а вертикальное перемещение  $v_C$  точки  $C$  на несколько порядков больше разности  $u_A - u_C$ . В подтверждение этого факта приведем результаты конечно-элементного расчета упругопластического деформирования полосы из стали с эллиптическим отверстием. Образец имел следующие размеры: высота 100 см, ширина 100 см, длина большой оси эллипса 10 см, малой оси — 4 см. Радиус кривизны в вершине равен 8 мм. Перемещения точек  $A$  и  $C$  в результате осевого растяжения нагрузкой, действующей перпендикулярно большой полуоси эллипса, равны  $u_A = 98,71$  мкм,  $u_C = 98,46$  мкм,  $v_A = 0$ ,  $v_C = 8,84$  мкм,  $u_A - u_C = 0,25$  мкм,  $v_A - v_C = 8,84$  мкм. В настоящей работе рассматривается формоизменение наиболее опасной области дефекта — его вершины. Если конечное положение вершины трещины спроецировать на начальное, то очевидно, что после нагружения точка  $C$  с точностью до малых высших порядков будет расположена на линии, перпендикулярной большой полуоси эллипса.

В вершине ненагруженной трещины выделим бесконечно малый элемент  $dS_1$  (рис. 2), в пределах которого деформацию можно считать однородной в процессе всего цикла нагружения. Далее будем увеличивать внешнюю нагрузку, в результате чего трещина раскрывается — ее берега начинают расходиться. При этом в вершине дефекта наряду с ростом деформаций происходит увеличение радиуса кривизны, т. е. трещина затупляется. Точка  $C$ , расположенная на границе рассматриваемого элемента, перемещается в вертикальном направлении в точку  $C_1$ . Зафиксируем вершину дефекта в этот момент. Длина элемента составляет  $dS_2$ , а радиус кривизны вершины  $\rho = \rho_2$ . На рис. 2 показана вершина трещины в начале и конце нагружения. Длина отрезка  $AB$  равна

$$\rho_1(1 - \cos(d\theta_1/2)) = \rho_2(1 - \cos(d\theta_2/2)).$$

Раскладывая косинус в степенной ряд и пренебрегая малыми высших порядков ( $d\theta \ll 1$ ), получаем

$$\rho_1 d\theta_1^2 \simeq \rho_2 d\theta_2^2. \quad (3)$$

Запишем выражения для длин дуг:  $dS_1 = \rho_1 d\theta_1$ ,  $dS_2 = \rho_2 d\theta_2 = dS_1 + \Delta dS_1 = dS_1(1 + \varepsilon)$ . Здесь  $\varepsilon = \Delta dS_1/dS_1$  — деформация, которую испытывает элемент в процессе раскрытия трещины. С учетом (3) в конце этапа нагружения радиус кривизны в вершине трещин равен

$$\rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon)^2. \quad (4)$$

**3. Первый полуцикл нагружения.** Внешние напряжения увеличиваются от значения  $\sigma_{\min}$  до значения  $\sigma_{\max}$ . В начале первого полуцикла напряженно-деформированное состояние точки, расположенной в вершине трещины, на диаграмме растяжения описывается точкой  $E$  (см. рис. 1). Этой точке соответствуют напряжение  $-\sigma_y$ , деформация  $\varepsilon_{(1)}$ , радиус кривизны в вершине  $\rho_1$ , длина дефекта  $2l$ , внешние напряжения  $\sigma_{\min}$ . В процессе увеличения внешней нагрузки одновременно развиваются два разнонаправленных процесса: увеличение упругопластических деформаций в вершине дефекта и увеличение радиуса кривизны в вершине трещины, что приводит к уменьшению коэффициента концентрации деформаций и, следовательно, значения упругопластических деформаций. Геометрия трещины (радиус кривизны) “подстраивается” под уровень нагрузки, так чтобы при росте внешних напряжений максимальные деформации в вершине трещины не превышали предельного уровня. Если в конце первого полуцикла нагружения это условие будет выполняться, то трещина не будет расти.

Однако, если деформации в вершине трещины достигнут предельного уровня до того момента, как внешняя нагрузка достигнет значения  $\sigma_{\max}$ , дальнейшее увеличение радиуса кривизны в вершине трещины будет возможно только за счет разрушения материала образца. Учитывая, что нагружение вершины дефекта рассматривается как жесткое, и прослеживая перемещение точки  $C$  (см. рис. 2), выделим следующие этапы процесса.

1. Пусть при некотором значении внешних напряжений ( $\sigma < \sigma_{\max}$ ) точка  $C$  совпадает с точкой  $C_1$ . При этом деформация в бесконечно малом элементе равна предельному значению  $\varepsilon_B^*$ . Материал в вершине трещины не разрушается.

2. Происходит рост внешней нагрузки на малую величину  $\Delta\sigma$ . Это приводит к тому, что точка  $C$  перемещается на малое расстояние в точку  $C'_1$  (рис. 3,а). В этом случае деформация в вершине дефекта превышает предельное значение, что приводит к разрушению материала в вершине трещины (на рис. 3,а эта часть образца заштрихована). Будем считать, что материал “разрыхлился”, т. е. исчез. В результате вершина трещины продвигается вперед, а радиус кривизны в вершине трещины увеличивается, что приводит к уменьшению концентрации деформаций. Следовательно, в точках образовавшейся вершины дефекта деформации не будут превышать предельных.

3. Дальнейший рост уровня внешней нагрузки на величину  $\Delta\sigma$  приведет к тому, что точка  $C$  переместится в точку  $C''_1$  (рис. 3,б). Деформация в вершине дефекта вновь превысит предельный уровень, в результате чего произойдет дальнейшее разрушение материала образца (заштрихованная область на рис. 3,б). Это, в свою очередь, приведет к увеличению длины трещины и радиуса кривизны, а также к уменьшению деформаций в вершине дефекта до значения  $\varepsilon_B^*$ .

4. Процесс продолжается до тех пор, пока внешние напряжения не достигнут значения  $\sigma_{\max}$ , а точка  $C$  не переместится в точку  $C_2$  (рис. 4). При этом в результате многочисленных разрушений на элементарных актах догрузки полудлина трещины увеличится на величину  $dl$ . На ту же величину увеличится радиус кривизны в вершине дефекта.

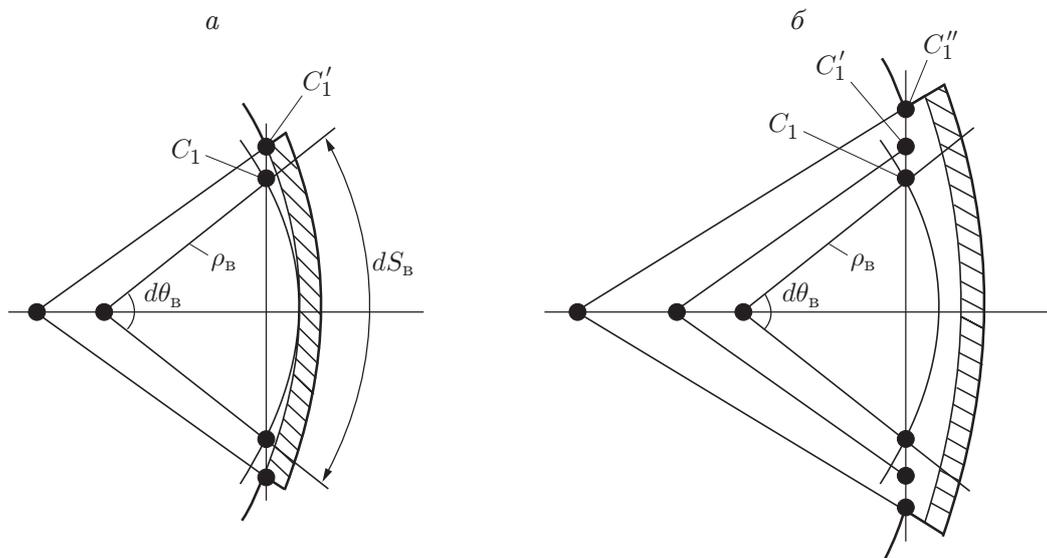


Рис. 3. Схема подрастания трещины на элементарных актах догрузки:  
 а — первый акт догрузки; б — второй акт догрузки; заштрихованные области — области разрушения образца

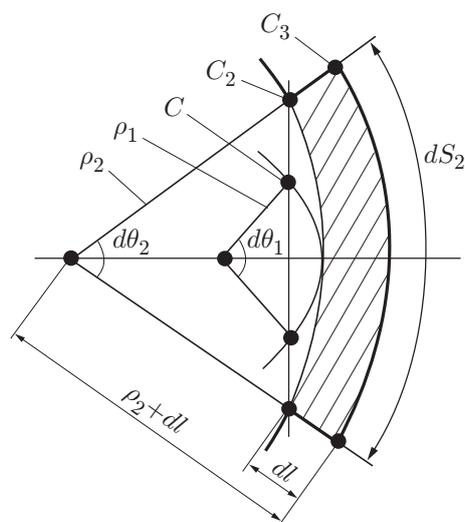


Рис. 4. Схема подрастания трещины на первом полуцикле нагружения образца:  
 заштрихованная область — область разрушения образца

Если материал образца “работает” за пределом текучести, принцип суперпозиции обычно неприменим. Однако в данном случае его использование правомерно. Так как нагружение трещины “жесткое”, то геометрия вершины трещины в конце первого полуцикла нагружения (положение точки  $C_3$ ) не меняется независимо от того, как происходил процесс разрушения: либо путем последовательных разрывов волокон, расположенных в вершине дефекта, либо разрушение части материала шириной  $dl$ , после того как точка  $C$  переместилась в точку  $C_2$  (см. рис. 4). С учетом этого обстоятельства сначала определим деформацию  $\varepsilon_{\max}^*$ , которая возникает в области, примыкающей к вершине дефекта, при нагружении образца внешними напряжениями от значения  $\sigma_{\min}$  до значения  $\sigma_{\max}$  в предположении, что материал не разрушается. Запишем выражение для величины упругих

напряжений в вершине трещины:

$$\sigma_e = k_e(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - \sigma_y \simeq 2\sqrt{l/\rho_1} \sigma_{\max}(1 - r) - \sigma_y.$$

Здесь коэффициент концентрации  $k_e$  [7] записан с учетом того, что  $l \gg \rho_1$ ;  $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$  — коэффициент асимметрии цикла нагружения. Тогда приращение деформаций за полуцикл нагружения от значения  $\sigma_{\min}$  до значения  $\sigma_{\max}$  с учетом равенства (2) можно представить в виде

$$\varepsilon_{\max}^* = \varepsilon_y \left( 2\sqrt{\frac{l}{\rho_2}} \frac{\sigma_{\max}(1 - r)}{\sigma_y} - 1 \right)^2.$$

Отсюда с учетом соотношения (4) получаем

$$\varepsilon_{\max}^* = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_{ep}}}{1 + \varepsilon_{\max}^*} - \sqrt{\varepsilon_y} \right)^2, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{ep}$  — упругопластическая деформация, которая возникла бы в вершине дефекта при нагружении образца от напряжений  $\sigma_{\min}$  до  $\sigma_{\max}$  в предположении, что радиус кривизны трещины не изменяется:

$$\varepsilon_{ep} = \varepsilon_y \left( 2\sqrt{\frac{l}{\rho_1}} \frac{\sigma_{\max}(1 - r)}{\sigma_y} \right)^2. \quad (6)$$

Если  $\varepsilon_{\max}^* \leq \varepsilon_B^*$ , то трещина не будет расти. В противном случае произойдет разрушение (разрыхление) части материала в вершине дефекта (заштрихованная область на рис. 4), в результате чего радиус кривизны увеличится до значения  $\rho_2 + dl = \rho_1(1 + \varepsilon_{\max}^*)^2 + dl$  (см. (4)), а деформация достигнет предельного значения  $\varepsilon_B^*$ . С учетом этого равенство (2) запишем в виде

$$\varepsilon_B^* = \varepsilon_y \left( 2\sqrt{\frac{l + dl}{\rho_2 + dl}} \frac{\sigma_{\max}(1 - r)}{\sigma_y} - 1 \right)^2.$$

Отсюда после ряда преобразований, учитывая, что  $dl \ll l$ , получаем приращение полудлины трещины в конце первого полуцикла нагружения:

$$dl = \rho_1 \left( \frac{\varepsilon_{ep}}{(\sqrt{\varepsilon_B^*} + \sqrt{\varepsilon_y})^2} - (1 + \varepsilon_{\max}^*)^2 \right) dN. \quad (7)$$

Здесь учтено, что приращение  $dl$  произошло за минимально возможное количество циклов нагружения  $dN = 1$ .

**4. Второй полуцикл нагружения.** На этапе уменьшения внешних напряжений от значения  $\sigma_{\max}$  до значения  $\sigma_{\min}$  восстанавливается конфигурация вершины трещины, которую она имела в начале цикла нагружения: радиус кривизны в вершине должен уменьшиться до значения, близкого к значению  $\rho_1$ . Однако, так как деформирование области, примыкающей к вершине трещины, является “жестким”, длина отрезка  $C_3C'_1$  (рис. 5), на который смещается точка  $C_3$  на втором полуцикле нагружения, должна быть равна длине отрезка  $CC_2$ , на который сместилась точка  $C$  на первом полуцикле (см. рис. 4). Как и выше, справедлива гипотеза о том, что в процессе нагружения берега трещины перемещаются по линиям, перпендикулярным большой полуоси дефекта. В конце второго полуцикла нагружения (см. рис. 5) длина дуги равна  $dS'_1 = \rho'_1 d\theta'_1 = \rho_1 d\theta_1 + dl d\theta_2$ . С учетом этого, пренебрегая малыми высших порядков, получаем радиус кривизны в вершине трещины в конце цикла нагружения:

$$\rho'_1 = \rho_1 + \frac{2dl}{1 + \varepsilon_{\max}^*} = \rho_1 \left( 1 + \frac{2dl}{\rho_1(1 + \varepsilon_{\max}^*)} \right). \quad (8)$$



$$\tilde{\varepsilon}_B \simeq \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_{ep}}}{1 + (\sqrt{\varepsilon_{ep}} - \sqrt{\varepsilon_y})^2} - \sqrt{\varepsilon_y} \right)^2;$$

$$\frac{dl}{dN} \simeq \rho_1 [(1 + (\sqrt{\varepsilon_{ep}} - \sqrt{\varepsilon_y})^2)^2 - (1 + \varepsilon_{\max}^*)^2]. \quad (10)$$

Дальнейшее упрощение возможно при условии  $\sqrt{\varepsilon_{ep}} \gg \sqrt{\varepsilon_y}$ . В этом случае равенство (10) сводится к соотношению

$$\frac{dl}{dN} \simeq \rho_1 [(1 + \varepsilon_{ep})^2 - (1 + \varepsilon_{\max}^*)^2]. \quad (11)$$

Если при этом  $\varepsilon_{\max}^* \ll 1$ , то возможна линеаризация уравнения (5), в результате чего получаем  $\varepsilon_{\max}^* \approx \varepsilon_{ep}/(1+2\varepsilon_{ep})$ . Тогда выражение для скорости роста усталостной трещины может быть преобразовано к виду

$$\frac{dl}{dN} \approx \rho_1 \varepsilon_{ep}^2. \quad (12)$$

Следует отметить, что окончательные формулы для скорости роста усталостной трещины (10)–(12) с учетом соотношения (5) выражаются через один параметр  $\varepsilon_{ep}$ , который в свою очередь можно выразить через коэффициент интенсивности напряжений, обычно используемый в механике разрушения [8]. В случае циклического нагружения имеем

$$K_{I\max} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi l}, \quad K_{I\min} = \sigma_{\min} \sqrt{\pi l}.$$

Здесь  $K_{I\max}$ ,  $K_{I\min}$  — коэффициенты интенсивности напряжений, вычисленные при максимальном и минимальном значениях напряжений цикла нагружения. Обозначив размах коэффициента интенсивности напряжений  $\Delta K = K_{I\max} - K_{I\min}$ , выражение для деформации  $\varepsilon_{ep}$  (см. (6)) запишем в виде

$$\varepsilon_{ep} = \frac{4}{\pi \rho_1 E \sigma_y} \Delta K^2.$$

Таким образом, анализируя равенства (10)–(12), можно сделать вывод, что скорость роста усталостной трещины пропорциональна величине  $\Delta K^4$ . Например, равенство (12) принимает вид

$$\frac{dl}{dN} \approx \frac{16}{\pi^2 \rho_1 E^2 \sigma_y^2} \Delta K^4. \quad (13)$$

Заметим, что по структуре формула (13) соответствует эмпирической зависимости Париса [8]

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^4.$$

Таким образом, рассмотренная модель позволяет объяснить с позиций классической механики сплошного однородного континуума установившийся процесс роста усталостной трещины. Согласно представленной концепции основной причиной развития усталостных повреждений является изменение концентрации упругопластических деформаций в вершине трещины при циклическом нагружении образца. На первом полупериоде нагружения происходит увеличение упругопластических деформаций, что приводит к увеличению радиуса кривизны в вершине дефекта. До тех пор пока деформации меньше предельного значения для данного материала, трещина не растет. Если при дальнейшем увеличении внешней нагрузки деформации в вершине трещины превысят предельный уровень, увеличение радиуса кривизны (а значит, уменьшение коэффициента концентрации деформаций) будет возможно только за счет разрушения части материала образца непосредственно перед вершиной трещины, в результате чего произойдет ее подрастание. Как следствие сформируется геометрия вершины дефекта, обеспечивающая упругопластические деформации,

равные предельным. На втором полуцикле нагружения происходит частичное восстановление геометрии вершины трещины и размера пластической зоны, имевших место в начале цикла нагружения.

Автор выражает благодарность М. Х. Ахметзянову за полезное обсуждение основных положений работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейбер Г.** Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации // *Механика*. 1961. № 4. С. 117–130.
2. **Александров А. Я.** Поляризациино-оптические методы механики деформируемого твердого тела / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов. М.: Наука, 1973.
3. **Клочко О. Е., Шабанов А. П.** Применение метода конечных элементов для расчета концентраций напряжений в вершинах дефектов малого радиуса // *Вестн. СГУПС*. Новосибирск: Сиб. гос. ун-т путей сообщ., 2005. Вып. 12. С. 47–51.
4. **Петерсон Р.** Коэффициенты концентрации напряжений. М.: Мир, 1977.
5. **Лукьянов В. Ф., Фомин В. Н.** Инженерный метод расчета параметра вязкости разрушения // *Пробл. прочности*. 1972. № 2. С. 55–59.
6. **Пестриков В. М.** Механика разрушения твердых тел / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. СПб.: Профессия, 2002.
7. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
8. **Ирвин Дж., Парис П.** Основы теории роста трещин и разрушения // *Разрушение*. М.: Мир, 1976. Т. 3. С. 17–66.

*Поступила в редакцию 1/II 2008 г.,  
в окончательном варианте — 2/VI 2008 г.*

---