

14. Кулов Н. Н., Малюсов В. А. Массоотдача в трубке с орошаемой стенкой при перемешивании жидкой пленкой // ТОХТ.— 1967.— Т. 1, № 2.
 15. Гешев П. И., Лапин А. М., Цвелодуб О. Ю. Теплообмен в волновых стекающих пленках // Гидродинамика и массообмен в потоках со свободной поверхностью.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1986.

Поступила 14/III 1986 г.

УДК 532.59+551.465.15

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИЯ ВБЛИЗИ ВОЗМУЩЕННОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

П. И. Гешев

(Новосибирск)

Свободная поверхность как в природных условиях, так и в аппаратах химической технологии и теплоэнергетики чаще всего возмущена волнами. Возникает естественный вопрос: насколько волны могут изменить интенсивность процессов диффузии в жидкости и какие параметры волн наиболее существенно влияют на газообмен свободной поверхности с атмосферой?

Эффективный метод решения проблемы диффузии вблизи свободной поверхности предложен в [1, 2], где показано существование автомодельного решения, получаемого в приближении тонкого диффузионного пограничного слоя. Фактически этот подход основан на введении лагранжевых координат для частиц жидкости на поверхности. В данной работе указанный метод обобщается на случай нестационарной диффузии с однородными начальными и граничными условиями при наложенных возмущениях общего пространственного вида. Затем детально исследуется диффузия в бегущей и стоячей плоских волнах.

Так как коэффициенты диффузии в жидкости для любых молекул малы, основное сопротивление массопереносу сосредоточено в жидкой фазе и диффузию вещества в газовой фазе над жидкостью можно не рассматривать, полагая для всех моментов времени $t > 0$ концентрацию на свободной поверхности заданной C_0 . Начальная концентрация растворенного газа в объеме жидкости есть C_1 .

Пусть свободная поверхность задается уравнением $y = h(x, z, t)$, где y — вертикальная, а x и z — горизонтальные координаты. Обозначая индексом 0 значения всех величин на поверхности $y = h$, имеем кинематическое условие

$$(1) \quad v_0 = \partial h / \partial t + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) h.$$

Здесь и далее $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$ — двумерный оператор набла; $\mathbf{u}_0 = (u_0, w_0)$ — вектор горизонтальных компонент скорости на поверхности жидкости. Для вертикальной компоненты скорости, интегрируя уравнение неразрывности вблизи свободной поверхности, можно получить в первом приближении

$$(2) \quad v = v_0 + (h - y)(\nabla \cdot \mathbf{u}_0).$$

Для волн на мелкой воде горизонтальные компоненты скорости по всей толщине слоя постоянны и равны своим значениям на поверхности, поэтому из уравнения неразрывности следует $v = -y(\nabla \cdot \mathbf{u}_0)$ и $v_0 = -h(\nabla \cdot \mathbf{u}_0)$. Объединяя последнее соотношение с кинематическим условием (1), находим известное в теории мелкой воды уравнение закона сохранения массы жидкости

$$(3) \quad \partial h / \partial t + (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) h = 0.$$

Если теперь учесть выражения (1), (2) и перейти в уравнении конвективной диффузии, взятом в приближении пограничного слоя, к новой координате $y' = h - y$, отсчитываемой от свободной поверхности, то оно принимает вид [1, 2]

$$(4) \quad \partial C / \partial t + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) C - y' (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \partial C / \partial y' = D \partial^2 C / \partial y'^2.$$

При выводе уравнения (4) и всюду в дальнейшем используется также приближение слабоискривленной поверхности — отбрасываются члены с производными по x и z второго порядка малости: $(\nabla h)^2$, $\nabla^2 h$, $(\nabla h \cdot \nabla C)$.

Это приближение, очевидно, справедливо для длинных волн, амплитуда которых намного меньше длины волны.

Для малых коэффициентов диффузии молекул газов в вязких жидкостях ($D \sim 10^{-9} - 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$) на значительном интервале времени ($t \ll \ll h^2/D$) внешняя граница диффузионного пограничного слоя $\delta \sim \sqrt{D t}$ еще не достигает дна бассейна и можно пренебрегать точным граничным условием на дне $(\partial C/\partial y')_{y'=h} = 0$, заменяя его условием $C = C_1$, при $\delta \ll y' < h$. Для волн на глубокой воде, когда длина волны λ много меньше глубины h , интервал времени, для которого будет решаться уравнение (4), определяется условием $\delta(t) \ll \lambda$, при выполнении которого справедливо предположение о постоянстве горизонтальных компонент скорости по толщине диффузионного пограничного слоя.

Чтобы не загромождать изложение, далее индекс 0 у компонент скорости и штрих при координате y опускаем. Уравнение (4) дополняется граничными и начальными условиями: $C(y=0) = C_0$, $C(y \gg \delta) = C_1$, $C(t=0) = C_1$. Существует автомодельное решение уравнения (4), удовлетворяющее этим граничным условиям:

$$(5) \quad \frac{C - C_0}{C_1 - C_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\delta} \exp(-\eta^2) d\eta.$$

Для δ — толщины диффузионного пограничного слоя — из (4) получается уравнение

$$(6) \quad \partial \delta^2 / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta^2 + 2(\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta^2 = 4D$$

с начальным условием $\delta = 0$ при $t = 0$.

В принятом приближении горизонтальные скорости в глубине слоя жидкости и на свободной поверхности совпадают. Тогда любые две жидкие частицы, имеющие в начальный момент одинаковые координаты x_0, z_0 , но разные расстояния до поверхности y_{01}, y_{02} , будут и в дальнейшем иметь совпадающие горизонтальные координаты $x_1 = x_2, z_1 = z_2$ и строго пропорциональные друг другу вертикальные координаты $y_1/y_2 = y_{01}/y_{02}$. Траектории жидких частиц находятся из дифференциальных уравнений

$$(7) \quad dx/dt = u(x, z, t), \quad dz/dt = w(x, z, t), \quad dy/dt = -(\nabla \cdot \mathbf{u})y$$

с начальными условиями $x = x_0, z = z_0, y = y_0$ при $t = 0$. Выделенная на свободной поверхности небольшая область жидкости с прилегающими к ней снизу слоями будет перемещаться в пространстве, испытывая только простые деформации в направлении y .

Если подставить \mathbf{u} и $(\nabla \cdot \mathbf{u})$ из (7) в (6), то

$$(8) \quad \frac{d\delta^2}{dt} - \frac{2}{y} \frac{dy}{dt} \delta^2 = 4D,$$

где введена полная (субстанциональная) производная вдоль траектории жидкой частицы на свободной поверхности $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$. Интегрирование уравнения (8) с учетом начального условия $\delta(t=0) = 0$ дает

$$(9) \quad \delta = \sqrt{4Dy^2(t) \int_0^t \frac{dt'}{y^2(t')}}.$$

Для волн на мелкой воде $y \sim h$, так как из (3), (7) следует $(1/h)dh/dt = -(\nabla \cdot \mathbf{u}) = (1/y)dy/dt$. Тогда

$$(10) \quad \delta = 2h(t) \sqrt{D \int_0^t \frac{dt'}{h^2(t')}}.$$

откуда видно, что толщина диффузионного пограничного слоя пропорциональна мгновенной толщине слоя воды, а «память» о прошлых дефор-

мациях этого слоя входит в виде интеграла, вычисляемого вдоль лагранжевой траектории поверхностной частицы. Для того чтобы определить δ в данной точке x, z в момент времени t , необходимо обратным интегрированием от t до 0 определить по уравнениям (7) траекторию частицы на поверхности (т. е. определить $x_0, z_0, x(t), z(t)$) и затем вычислить интеграл

$$\int_0^t dt' / h^2(t', x(t'), z(t')).$$

Согласно определению, локальная плотность потока массы есть $j = -D(\partial C / \partial y)_0$. Из уравнений (5), (6)

$$(11) \quad j = \frac{2D(C_0 - C_1)}{\sqrt{\pi} \delta} = \frac{C_0 - C_1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\partial \delta}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u} \delta) \right].$$

После интегрирования по поверхности в выражении (11) дивергентный член исчезает в силу периодических граничных условий по x и z и интегральный поток массы

$$J = \int_S j dx dz = \frac{C_0 - C_1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{\partial \delta}{\partial t} dx dz.$$

Полное количество вещества, продифундировавшего через поверхность S за время t , есть

$$(12) \quad m = \int_0^t J dt = \frac{C_0 - C_1}{\sqrt{\pi}} \int_S \delta dx dz = \frac{C_0 - C_1}{\sqrt{\pi}} S \langle \delta \rangle$$

(угловыми скобками обозначено среднее по пространственным переменным x и z).

В безволновом случае за то же время через площадь S продифундирует масса $m_0 = \frac{C_0 - C_1}{\sqrt{\pi}} S \sqrt{4Dt}$. Коэффициент интенсификации масссоотдачи K естественно определить как отношение $m/m_0 = \langle \delta \rangle / \delta_0$. Из выражений (9), (12)

$$(13) \quad K = \left\langle y(t) \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt'}{y^2(t')}} \right\rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left\langle y(t) \left(\frac{1}{y^2} \right)^{1/2} \right\rangle$$

(черта сверху означает осреднение по интервалу времени t). Для бегущей волны возможно дальнейшее упрощение асимптотики (13):

$$K \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle y \rangle \left(\frac{1}{y^2} \right)^{1/2}.$$

Действительно, в бегущей волне среднее от лагранжевой координаты y^{-2} по времени при $t \rightarrow \infty$ перестает зависеть от координат x и z . Поэтому величина $(1/y^2)^{1/2}$ выносится за угловые скобки в (13). Так как в бегущей волне частица жидкости за большое время проходит все координаты x в волновой ячейке, средние по x, z и средние по t должны совпадать (т. е. $\langle y \rangle = \bar{y}$).

Покажем теперь, что из известного неравенства Коши — Буняковского [3] $(\int f \varphi dt)^2 \leq (\int f^2 dt)(\int \varphi^2 dt)$ (в нашем случае $\bar{f\varphi} \leq \bar{f^2} \bar{\varphi^2}$) вытекает, что $K_\infty \geq 1$. Выбрав $f = \sqrt{y}$, $\varphi = 1/\sqrt{y}$, имеем

$$(14) \quad 1 = \left(\overline{\sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}}} \right)^2 \leq \bar{y} \left(\frac{1}{y} \right) \leq \bar{y} \left(\frac{1}{y^2} \right)^{1/2} = K_\infty.$$

Последнее неравенство в (14) $(1/y) \leq (1/y^2)^{1/2}$ следует из очевидной формулы $0 \leq (1/y - (1/y)^{1/2})^2$ после раскрытия скобок и извлечения корня.

Для стоячей волны вынесение $(y^{-2})^{1/2}$ за угловые скобки в формуле (13) недопустимо, так как очевидно, что это среднее по времени существенно будет зависеть от координат x, z , т. е. от того, где совершает колебания поверхностная частица (в узлах или в пучностях стоячей волны, например).

Задача о диффузии к свободной поверхности для бегущей плоской волны решается следующим образом. Для заданной скорости жидкости на поверхности $u = u_m \cos(2\pi(x - ct)/\lambda)$ необходимо определить локальную плотность потока массы и коэффициент интенсификации массоотдачи при мгновенном включении в момент времени $t = 0$ процесса диффузии. В системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, течение жидкости стационарное со скоростью $u - c$. Уравнение для лагранжевых координат жидкой частицы в этой системе отсчета имеет вид

$$(15) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{u - c}{\lambda} = -\frac{c}{\lambda}(1 - A \cos 2\pi\xi),$$

где $A = u_m/c$; $\xi = (x - ct)/\lambda$. Интегрируя (15), получаем

$$(16) \quad \pi \sqrt{1 - A^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \pi\xi_0}{\kappa}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \pi\xi}{\kappa}\right).$$

Здесь $\tau = ct/\lambda$; $\kappa = \sqrt{(1 - A)/(1 + A)}$; $\xi_0 = x_0/\lambda$ — начальная безразмерная координата жидкой частицы. Интегрируя (7), находим

$$(17) \quad y = \frac{\operatorname{const}}{1 - A \cos 2\pi\xi}.$$

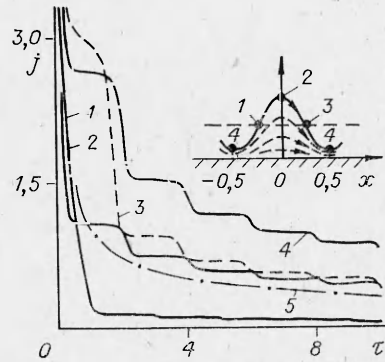
Подставляя (17) в формулу (9), после вычисления интеграла с заменой переменной интегрирования t на ξ , запишем

$$(18) \quad \delta^2 = \left(\frac{4D\lambda}{c}\right) \frac{\xi_0 - \xi - \frac{A}{2\pi}(\sin 2\pi\xi_0 - \sin 2\pi\xi)}{(1 - A \cos 2\pi\xi)^2},$$

где $4D\lambda/c = 4DT_0 = \delta_0^2$ — квадрат толщины диффузионного пограничного слоя, образующегося за период волны $T_0 = \lambda/c$ в безволновом случае. В дальнейшем будем использовать безразмерную толщину δ , отнесенную к δ_0 . Формулы (16) и (18) задают в параметрическом виде через параметр ξ_0 зависимость $\delta(\xi, t)$ и, следовательно, согласно формуле (11), определяют локальный поток вещества $j(\xi, \tau)$.

На рис. 1 кривые 1—4 демонстрируют поведение $j(\xi, \tau)$ в зависимости от безразмерного времени τ в четырех характерных точках на профиле волны ($\xi = -0,25; 0; 0,25; 0,5$), который для рассчитанного случая $A = \sqrt{3}/2 = 0,865$ изображен сверху; на профиле отмечены указанные четыре точки, в глубине штрихами проведены линии тока; линия 5 — локальный поток массы в безволновом случае.

Все кривые для случая бегущей волны на рис. 1 имеют характерный ступенчатый вид. Для амплитуды $A = \sqrt{3}/2$ продолжительность ступенек в локальном потоке массы оказывается равной 2 — это время, необходимое жидкой частице на свободной поверхности для перемещения из одной волновой ячейки в другую (например, из какой-либо впадины



Р и с. 1

в соседнюю впадину волны). Действительно, время такого перемещения есть

$$(19) \quad T = T_0 \int_0^1 \frac{d\xi}{1 - A \cos 2\pi\xi} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - A^2}},$$

и в безразмерных единицах при $A = \sqrt{3}/2$ получаем $\tau = 2$.

При больших τ из (16) следует $\xi_0 = \sqrt{1 - A^2}\tau$. Определим асимптотику интегрального потока массы по формуле (12), куда надо подставить выражение для δ , вытекающее из (18) при $\tau \rightarrow \infty$: $\delta = \sqrt{\xi_0}/(1 - A \cos 2\pi\xi)$; тогда по формуле (12) имеем

$$(20) \quad K_\infty = (1 - A^2)^{1/4} \int_0^1 \frac{d\xi}{(1 - A \cos 2\pi\xi)} = \frac{1}{(1 - A^2)^{1/4}}.$$

Для амплитуды $A = \sqrt{3}/2$ асимптотическое значение $K_\infty = \sqrt{2}$, т. е. при довольно большой амплитуде волн ($A = 0,865$) интенсификация процесса диффузии достигает всего лишь 41%. Однако с приближением скорости u_m к c (т. е. когда $A \rightarrow 1$) по формулам (19), (20) T и K_∞ устремляются к бесконечности. Аналогичное явление обнаружено при анализе диффузии на волновой стекающей пленке [2] и названо «диффузионной независимостью волновых ячеек». Качественное объяснение следующее: в случае $u_m = c$ интеграл (19) расходится и частицы жидкости не могут за конечное время переместиться из одной ячейки в другую; следовательно, в каждой ячейке устанавливается одно и то же стационарное распределение потока массы; при этом $m \sim t$, а $m_0 \sim \sqrt{t}$, так что с ростом t $K \sim \sqrt{t} \rightarrow \infty$.

Получим теперь решение задачи о нестационарной диффузии на поверхности стоячей волны, скорость частиц в которой задается формулой $u = cA \cos(2\pi x/\lambda) \cos(2\pi t/T_0)$. Вводя безразмерные переменные $\xi = x/\lambda$, $\tau = t/T_0$, перепишем (7) в виде

$$(21) \quad d\xi/d\tau = A \cos(2\pi\xi) \cos(2\pi\tau);$$

$$(22) \quad dy/dt = y A \sin(2\pi\xi) \cos(2\pi\tau).$$

Уравнения (21), (22) интегрируются методом разделения переменных:

$$(23) \quad \sin 2\pi\xi_0 = \frac{\sin 2\pi\xi - \text{th } \varphi}{1 - \sin 2\pi\xi \text{ th } \varphi};$$

$$(24) \quad y = y_0 (\text{ch } \varphi + \sin 2\pi\xi_0 \text{ sh } \varphi)$$

($\varphi = A \sin 2\pi\tau$). Для определения толщины диффузионного слоя $\delta(x, t)$ подставим y из (24) в (9) и заменим затем всюду $\sin 2\pi\xi_0$ выражением (23). Тогда для безразмерной толщины $\delta(\xi, \tau)$ после преобразований имеем

$$(25) \quad \delta^2(\xi, \tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{[\text{ch}(\varphi_1 - \varphi) + \sin 2\pi\xi \text{ sh}(\varphi_1 - \varphi)]^2}$$

($\varphi_1 = A \sin 2\pi\tau_1$ — безразмерная переменная интегрирования). Интеграл в формуле (25) вычислить аналитически не удастся, он легко определяется численно по методу Симпсона.

На рис. 2 для той же амплитуды $A = \sqrt{3}/2$ изображен локальный поток массы $j = 1/\delta$ в стоячей волне. Кривая 1 рассчитана для точки $\xi = 0,25$, 2 — $\xi = 0$. Эти точки — узел и пучность (соответственно 1, 2 на профиле волны). Кривая 3 относится к безволновому случаю. Можно отметить интересную особенность кривой 1 — она, затухая, колеблется с удвоенной частотой. Это объясняется тем, что вблизи узла поверхность жидкости будет растягиваться, когда справа пучность идет вверх и когда здесь образуется впадина. Поэтому y — координата частички жидкости

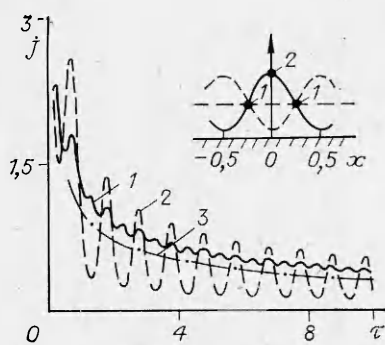


Рис. 2

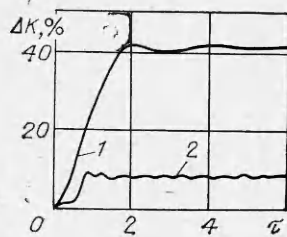


Рис. 3

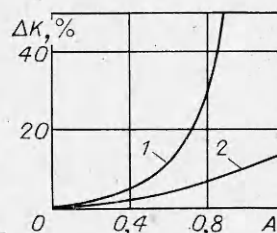


Рис. 4

вблизи узла — будет сокращаться с удвоенной частотой. Эти колебания вызовут согласно формуле (9) пульсации удвоенной частоты в $\delta(\xi, \tau)$ и, следовательно, в $\dot{j}(\xi, \tau)$.

Из сравнения рис. 1 и 2 можно заключить, что для стоячей волны интенсификация массоотдачи получается значительно меньшей, чем для бегущей. Прямые вычисления коэффициента интенсификации K проводились по формуле (13) $K = \langle \delta \rangle / \sqrt{\tau}$.

На рис. 3 кривыми 1 и 2 показано поведение величины $\Delta K = (K - 1) \cdot 100\%$ для двух типов волн с одинаковой амплитудой $A = \sqrt{3}/2$. С ростом τ заметные на рис. 3 осцилляции затухают и устанавливаются определенные значения ΔK_{∞} (41,2 и 7,8%).

На рис. 4 кривые 1 и 2 для бегущих и стоячих волн соответственно показывают зависимость величины ΔK_{∞} от амплитуды волн. Для бегущих волн при $A \rightarrow 1$ скорость жидкости на гребнях u_{\max} приближается к фазовой скорости c . При этом поверхность жидкости разбивается на изолированные гребнями диффузионные ячейки. В каждой такой ячейке с течением времени устанавливается стационарный процесс диффузии, что качественно отличается от общего случая, когда жидкость в системе волны дрейфует из ячейки в ячейку ($A < 1$). Для стоячих волн этот механизм отсутствует и интенсификация массоотдачи вызывается только осциллирующими движениями жидкости. За счет нелинейного по амплитуде характера диффузионных осцилляций осреднение дает небольшой положительный эффект усиления массоотдачи в стоячих волнах. С погрешностью не более 0,5% можно представить результаты расчетов для стоячих волн в виде следующей аппроксимации: $\Delta K_{\infty} = 0,125A^2 (1 + 0,583A^2)^{-1/2} \cdot 100\%$.

Ясно, что ветер, который является обычной причиной возникновения бегущих волн в открытых водоемах, будет способствовать за счет трения приближению скорости поверхностных слоев жидкости на гребнях к фазовой скорости волн и тем самым приводить к образованию диффузионно независимых волновых ячеек. Однако с ростом скорости ветра должно возникать обрушение волн и усиливаться приповерхностная турбулентность жидкости. Такие режимы требуют иных методов исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ruckenstein E., Berbente C. Mass transfer to falling liquid films at low Reynolds numbers // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1968. — V. 11, N 4.
2. Гешев П. И., Лапин А. М. Диффузия слабо растворимого газа в стекающих волновых пленках жидкости // ПМТФ. — 1983. — № 6.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970.

Поступила 16/IV 1986 г.