

УДК 539.3:534.1

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

С. Д. Алгазин, И. А. Кийко*

Московский государственный инженерно-физический институт, 115409 Москва

* Московский государственный технический университет, 105839 Москва

Исследуется задача об устойчивости колебаний прямоугольной в плане пологой оболочки в потоке газа при произвольном направлении вектора скорости потока. Показано, что математически задача сводится к плохо обусловленной вычислительной проблеме. Для решения этой проблемы предложен численный алгоритм без насыщения, который позволяет получить приемлемое по точности решение на сетке из $169 = 13 \times 13$ узлов. В конкретных расчетах для цилиндрической и сферической пологих оболочек обнаружены новые механические эффекты, касающиеся форм колебаний и зависимости критической скорости флаттера от направления вектора скорости потока.

Введение. В [1] дана новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки в предположении, что избыточное давление на оболочку определяется в рамках закона плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике [2]. Математически задача приводится к проблеме собственных значений для системы из двух уравнений с бигармоническими старшими операторами относительно амплитудной функции прогибов φ и функции напряжений F . Для некоторых типов краевых условий функцию напряжений F можно исключить (численно); оставшееся уравнение для φ будет содержать две безразмерные константы порядков 10^{-3} и 10^2 (при характерных значениях параметров) при старших производных, что предопределяет плохую обусловленность задачи. В то же время наличие у решения пограничного слоя указывает на необходимость сгущать сетку вблизи контура.

Для преодоления указанных вычислительных трудностей идеально подходит метод без насыщения К. И. Бабенко; он с успехом был применен к исследованию флаттера пластины произвольной формы в плане [3]. В предлагаемой работе метод обобщается на задачу о панельном флаттере прямоугольных в плане пологих оболочек; конкретные расчеты проводились для цилиндрической и сферической оболочек.

1. Постановка задачи. В безразмерном виде исходную систему дифференциальных уравнений можно записать следующим образом [1]:

$$D\Delta^2\varphi - hL(F) - k(\mathbf{v}, \text{grad } \varphi) = \lambda\varphi, \quad \Delta^2 F + EL(\varphi) = 0; \quad (1.1)$$

$$\lambda = -\rho h\omega^2 - k\omega; \quad (1.2)$$

$$L(f) = k_y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad (1.3)$$

где $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; k — показатель политропы; \mathbf{v} — скорость потока воздуха; h — толщина оболочки; ρ — плотность материала оболочки; ω — комплексная частота колебаний;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00923).

k_x и k_y — главные кривизны (линии главных кривизн совпадают с координатными линиями); $\varphi = \varphi(x, y)$ — прогиб оболочки; $F = F(x, y)$ — функция напряжений. Все названные величины безразмерные. Обезразмеривание проведено аналогично [3].

Выписанные уравнения рассматриваются в области $G = \{-1 \leq x \leq 1, -b \leq y \leq b\}$, т. е. в прямоугольнике, линии главных кривизн оболочки совпадают с координатными линиями.

Решение уравнений (1.1), (1.2) рассматриваем в дальнейшем при двух типах краевых условий:

а) шарнирное (свободное) опирание:

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \bar{0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } x = 1, -1, \\ \varphi = \bar{0}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \bar{0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } y = b, -b; \end{aligned}$$

б) заделка с проскальзыванием:

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \bar{0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } x = 1, -1, \\ \varphi = \bar{0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \bar{0}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } y = b, -b. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что краевые условия, накладываемые на функцию напряжений F , без потери общности могут быть заменены эквивалентными [4]:

$$(x, y) \in \partial G, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0, \quad (1.4)$$

где n — внешняя нормаль к контуру оболочки.

Колебания оболочки будут устойчивыми или неустойчивыми в зависимости от того, будет ли $\operatorname{Re} \omega < 0$ или $\operatorname{Re} \omega > 0$. Если $\lambda = \alpha + i\beta$ — собственное число сформулированной выше задачи, то вследствие (1.2) выписанные неравенства означают $f(\alpha, \beta) > 0$ или $f(\alpha, \beta) < 0$, где $f(\alpha, \beta) = \alpha k^2 - \rho h \beta^2$. Поскольку $\alpha = \alpha(v_x, v_y)$, $\beta = \beta(v_x, v_y)$, где $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, $v = |v|$, то уравнение $f(\alpha, \beta) = 0$ определяет на комплексной плоскости λ нейтральную кривую (параболу устойчивости) и соответствующую ей критическую скорость флаттера v при заданном θ .

При $v = 0$ все собственные значения действительны; с ростом скорости потока некоторые из собственных значений выходят в комплексную плоскость. Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти (при заданном θ) комплексное собственное число, которое первым попадет на параболу устойчивости. Тем самым будут определены критическая скорость и соответствующая ей форма колебаний (собственная функция). Отсюда следует, что для корректного решения задачи необходимо определять достаточно длинный начальный отрезок спектра.

Таким образом, при нахождении корня уравнения $f(\alpha, \beta) = 0$ нужно на каждом шаге итерационного процесса решать полную проблему на собственные значения для несимметричной матрицы размером $N \times N$, где N — число узлов сетки. Для преодоления возникающих при этом трудностей применяют метод без насыщения, который для гладких решений дает достаточную точность на сетке из сравнительно небольшого числа узлов. Собственные значения матрицы вычислялись с помощью QR-алгоритма (программная реализация в пакете EISPACK).

2. Дискретизация. Для дискретизации описанных краевых задач нужно провести дискретизацию бигармонических операторов $\Delta^2\varphi$ и Δ^2F с краевыми условиями свободного опирания (защемления) и краевым условием защемления соответственно. Кроме того, нужно провести дискретизацию оператора $L(f)$ и членов с первыми производными $k(v, \text{grad } \varphi)$.

Примем, что k_x и k_y — константы. Для цилиндрической оболочки $k_x = 0$, $k_y = 1/R$, а для сферической $k_x = k_y = 1/R$, где R — радиус оболочки. Тогда нужно провести дискретизацию оператора $L(f)$ с однородным краевым условием Дирихле. Эта дискретизация проводится аналогично [5]. Так же аналогично [5] проводится дискретизация членов с первыми производными $k(v, \text{grad } \varphi)$. Заметим, что при дискретизации оператора $L(f)$, поскольку это оператор второго порядка, достаточно удовлетворить только одному краевому условию $f = 0$ на ∂G . При дискретизации членов с первыми производными, поскольку узлы на границе отсутствуют, применялась интерполяционная формула, не удовлетворяющая (принудительно) краевому условию $\varphi = 0$ на ∂G . При дискретизации же бигармонических операторов удовлетворялись оба краевых условия. Вычисления показывают, что в результате полученное решение для φ удовлетворяет краевым условиям.

Дискретизация бигармонического оператора с краевым условием свободного опирания описана в [5]. Рассмотрим дискретизацию бигармонического оператора с краевым условием защемления (1.4). Для функции $F = F(x, y)$ в прямоугольнике применим интерполяционную формулу

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{i0}(z) L_{j0}(x) F(x_j, y_i), \quad y = bz, \quad z \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1],$$

$$L_{j0}(x) = \frac{l(x)}{l'(x_j)(x - x_j)}, \quad l(x) = (x^2 - 1)^2 T_n(x), \quad x_j = \cos \theta_j,$$

$$\theta_j = \frac{(2j - 1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad M_{i0}(z) = \frac{M(z)}{M'(z_i)(z - z_i)},$$

$$M(z) = (z^2 - 1)^2 T_m(z), \quad z_i = \cos \theta_i, \quad \theta_i = \frac{(2i - 1)\pi}{2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$
(2.1)

где T_n — полином Чебышева. Интерполяционная формула (2.1) удовлетворяет краевым условиям (1.4). Пронумеруем узлы в прямоугольнике (x_j, y_i) сначала по y , затем по x , т. е. сверху вниз, справа налево, и подставим (2.1) в (1.1). В результате получим

$$H\varphi - hL^h F = \lambda\varphi; \tag{2.2}$$

$$H_3 F + EL^h \varphi = 0. \tag{2.3}$$

Здесь φ — вектор, который содержит приближенные значения прогиба оболочки в узлах сетки; H — матрица размером $N \times N$; $N = mn$ — матрица дискретной задачи для пластины. Ее построение для случая свободного опирания описано в [5]. Для случая защемления построение матрицы H аналогично описанному выше. Разрешая (2.3) относительно F и подставляя в (2.2), получим

$$(H + hEL^h H_3^{-1} L^h) \varphi = \lambda\varphi, \tag{2.4}$$

где λ — приближенное собственное значение; L^h и H_3 — матрицы размером $N \times N$, получающиеся в результате дискретизации операторов L (см. (1.3)) и $\Delta^2 F$.

Дальнейшие исследования проводились с конечномерной задачей на собственные значения (2.4). Как сказано во введении, эта задача содержит большой параметр hE

(порядка 10^2 для конкретных данных, при которых проводились расчеты). Матрица при этом параметре несимметрична и, следовательно, может иметь комплексные собственные значения при скорости потока $v = 0$, что подтверждается конкретными расчетами. Поэтому потребовалась модернизация применяемого подхода. Вместо матрицы H_3 в (2.4) подставлялась матрица $H_3 = 0,5(H_3 + H'_3)$, где штрих обозначает транспонированную матрицу. Этот прием можно прокомментировать следующим образом. Исходная задача самосопряженная (бигармоническое уравнение с краевыми условиями (1.4)). Но в результате дискретизации получается несимметричная матрица H_3 . Представим H_3 в виде

$$H_3 = 0,5(H_3 + H'_3) + 0,5(H_3 - H'_3)$$

и отнесем несимметричную часть к погрешности дискретизации. Возмущение, которое при этом вносится в собственные значения матрицы H_3 , зависит от того, насколько близки резольвенты матриц H_3 и $(H_3 + H'_3)/2$ в той части комплексной плоскости, которая нас интересует при исследовании устойчивости потока. Это возмущение может быть оценено теоретически по схеме, описанной в [6], мы же предприняли численную проверку.

Матрица H_3 размером 361×361 ($361 = 19 \times 19$) имеет первое собственное значение $\lambda_1 = 604,0638$, которое сравнивалось с расчетом из [7]: $\sqrt{\lambda_1}/\pi^2 = 2,4902$ (2,489). В скобках указано значение из [7]. Матрица $(H_3 + H'_3)/2$ имеет собственное значение $\lambda_1 = 559,242\ 064$, $\sqrt{\lambda_1}/\pi^2 = 2,3961$.

Таким образом, возмущение, вносимое в собственные значения симметризацией матрицы, приемлемо. Аналогичная симметризация применялась к матрицам L^h и H_0 (H_0 — матрица дискретного бигармонического оператора для прогиба φ), после чего матрица $L^h H_3^{-1} L^h$ стала симметричной с погрешностью 10^{-6} . Однако этого оказалось недостаточно, и дискретная задача по-прежнему при $v = 0$ имела комплексные собственные значения. В результате повторной симметризации матрицы $L^h H_3^{-1} L^h$ собственные значения дискретной задачи при $v = 0$ стали действительными и положительными. При вычислении критической скорости наблюдалась сходимость.

3. Результаты численных расчетов. Конкретные расчеты проводились при следующих значениях параметров: $k = 1,4$; $\nu = 0,33$; $c_0 = 331,26$ м/с; $p = 1,0133 \cdot 10^5$ Па; $E = 6,867 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; относительная толщина оболочки $3 \cdot 10^{-3}$. Радиус оболочки принимался равным 2,5 (безразмерный). Предварительные расчеты на сетках из 9×9 , 13×13 , 19×19 узлов показали, что на сетках 13×13 и 19×19 результаты оказываются близкими. Ниже приводятся значения критической скорости, полученной на сетке 19×19 .

Расчеты для сферической пологой оболочки, квадратной в плане, можно считать тестовыми. При углах $\theta = 0$; $\pi/8$; $\pi/4$; $3\pi/8$; $\pi/2$ получены соответствующие значения критической скорости 1,4263 (20); 1,4924 (18); 1,5813 (18); 1,4924 (18); 1,4263 (20). Здесь в скобках указан номер собственного значения, которое первым выходит на параболу устойчивости. Как и следовало ожидать из симметрии задачи, значения критической скорости симметричны относительно прямой $\theta = \pi/4$, что подтверждает правильность методики и разработанной программы. Далее, для контроля вычислений выводились на печать два графика: вид функции прогиба $\text{Re } \varphi(x, 0)$ и $\text{Re } \varphi(0, y)$ и вид двумерной функции $\text{Re } \varphi(x, y)$. При $\theta = \pi/4$ графики кривых $\text{Re } \varphi(x, 0)$ и $\text{Re } \varphi(0, y)$ совпали; собственные формы $\text{Re } \varphi(x, y)$ при углах $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ также тождественны. Все это свидетельствует о правильности расчетов.

Для сферической пологой оболочки, заземленной по краю, при тех же направлениях вектора скорости потока получены значения критической скорости 1,6424 (20); 1,7038 (16); 1,6876 (17); 1,7038 (16); 1,623 84 (20). Общий характер результатов такой же, как и в предыдущем случае.

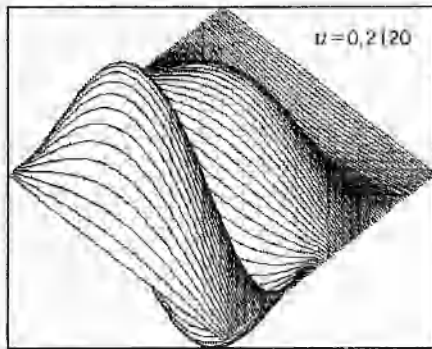


Рис. 1

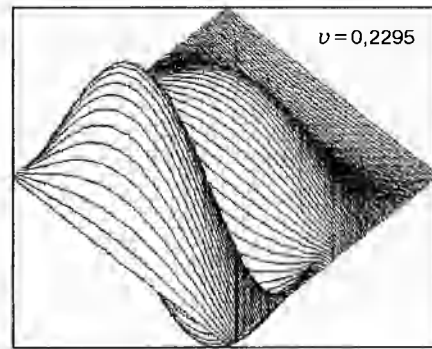


Рис. 2

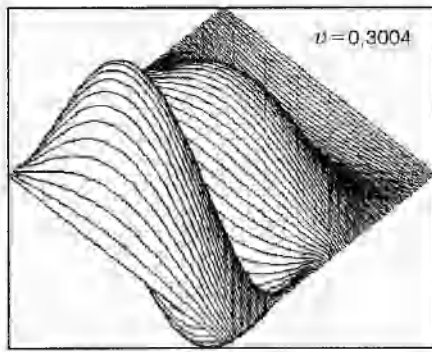


Рис. 3

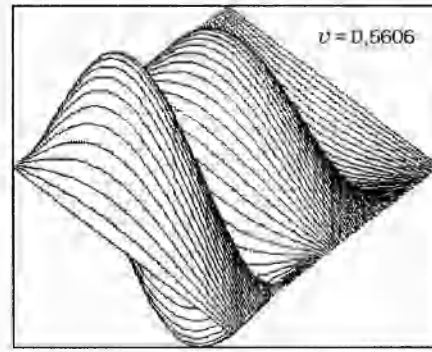


Рис. 4

Проведены расчеты для сферической полой оболочки, прямоугольной в плане ($b = 0,5$). При свободном опирании получены следующие значения критической скорости для тех же значений углов θ : 1,7752 (9); 1,8787 (9); 1,8414 (5); 1,8558 (4); 1,7469 (4). При граничных условиях защемления получено соответственно 1,6138 (9); 1,6902 (9); 1,8935 (5); 1,7335 (5); 1,6602 (5).

Дальнейшие расчеты проведены для цилиндрической свободно опертой оболочки, квадратной в плане. Для тех же значений углов θ получены значения критической скорости 2,7654 (7); 0,5606 (1); 0,3004 (1); 0,2295 (1); 0,2120 (1). Видно, что результат принципиально отличается от предыдущих: скорость резко убывает при углах θ , приближающихся к $\pi/2$. Заметим, что для квадратной пластины критическая скорость при $\theta = 0; \pi/2$ равна 0,2103 (для расчета применялась описанная выше методика при $k_y = 0$). Таким образом, для цилиндрической оболочки критическая скорость флаттера на порядок выше при обтекании вдоль образующей по сравнению с обтеканием поперек нее. Этот эффект легко объяснить:

жесткость на изгиб цилиндрической оболочки вдоль образующей значительно выше, чем поперек. Эволюция собственных форм представлена на рис. 1–5. Далее были проведены еще два расчета для рассматриваемой цилиндрической оболочки при тех же углах направления вектора скорости потока для радиусов оболочки 10 и 40. Получены следующие

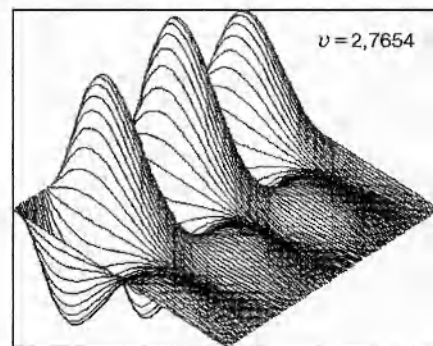


Рис. 5

значения критической скорости: 0,8216 (14); 0,4629 (1); 0,2287 (1); 0,1727 (1); 0,1591 (1) для радиуса, равного 10; 0,3378 (6); 0,3439 (1); 0,2433 (1); 0,1673 (1); 0,1514 (1) для радиуса, равного 40. Таким образом, критическая скорость флаттера уменьшается при $R \rightarrow \infty$ при обтекании как вдоль образующей, так и поперек. Последний вывод очень важен, так как небольшая начальная выпуклость оболочки при поперечном обтекании (для радиуса, равного 40, подъем цилиндрической оболочки равен 0,0125) вызывает понижение критической скорости флаттера.

4. Выводы. Описан экспериментальный алгоритм для сложной вычислительной проблемы расчета критической скорости флаттера пологой оболочки. Проведенные расчеты показывают приемлемую точность расчета на сетке из $169 = 13 \times 13$ узлов. Эти результаты получены применением метода дискретизации без насыщения К. И. Бабенко. Все результаты, имеющие отношение к механике, новые. Флаттер сферической пологой оболочки ранее исследовался в [8] методом Бубнова — Галёркина. Как известно, этот метод дает заниженные значения для критической скорости. Обнаружен новый механический эффект для цилиндрической панели — резкое изменение критической скорости при изменениях угла θ .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А. А., Кийко И. А.** Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 3. С. 167–171.
2. **Ильюшин А. А.** Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 6. С. 733–735.
3. **Алгазин С. Д., Кийко И. А.** Численно-аналитическое исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 1. С. 171–174.
4. **Справочник по теории упругости /** Под ред. П. М. Варвака, А. Ф. Рябова. Киев: Будівельник, 1971.
5. **Алгазин С. Д.** О дискретизации линейных уравнений математической физики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 3. С. 400–411.
6. **Алгазин С. Д.** О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 3–8.
7. **Гонткевич В. С.** Собственные колебания пластинок и оболочек: Справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1964.
8. **Огибалов П. М., Колтунов М. А.** Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.

*Поступила в редакцию 22/І 1998 г.,
в окончательном варианте — 27/V 1998 г.*
