

УДК 532.51

СТЕКАНИЕ ВЯЗКИХ ПЛЕНОК ПО ВОЛНИСТЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Проведен теоретический анализ процесса стекания вязких пленок по волнистым поверхностям. Исследования выполнены на основе уравнений Навье — Стокса (для одномерных и двумерных поверхностей) и интегральной модели (для трехмерной поверхности с двойной структурой гофров). Расчеты выполнены в широком диапазоне чисел Рейнольдса и геометрических характеристик поверхности с учетом сил поверхностного натяжения. Рассчитаны форма свободной поверхности и другие характеристики течения. Показано, что в случае одномерной поверхности существует диапазон параметров, в котором течение определяется в основном силами поверхностного натяжения и хорошо описывается с использованием интегрального подхода. В этом диапазоне в случае поверхности с двойной структурой гофров осредненные характеристики течения по крупным гофрам определяются геометрией мелкой текстуры.

Ключевые слова: вязкое течение пленок, волнистые поверхности.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теоретические исследования пленочных течений начаты в работе Нуссельта [1], в которой получено точное решение уравнений Навье — Стокса для свободного стекания тонкого слоя вязкой жидкости по гладкой вертикальной стенке:

$$U_0(y) = \frac{3\nu \operatorname{Re}}{H_0} \left(\frac{y}{H_0} - \frac{y^2}{2H_0^2} \right), \quad H_0 = \left(\frac{3\nu^2 \operatorname{Re}}{g} \right)^{1/3}.$$

Здесь $U_0(y)$ — профиль скорости в пленке в направлении вектора силы тяжести g ; ν — кинематическая вязкость; H_0 — толщина слоя жидкости при заданной плотности орошения $\nu \operatorname{Re}$; Re — число Рейнольдса.

Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования показали, что решение Нуссельта практически не реализуется и, как правило, поверхность пленки покрыта волнами. Большое количество работ посвящено как линейному, так и нелинейному анализу процесса волнообразования [2–5]. Задача о нелинейных волнах на пленке, стекающей по гладкой пластине, близка к задаче о течении вязкого слоя вдоль гофрированной поверхности. В обоих случаях уравнения существенно нелинейны, форма свободной поверхности заранее неизвестна, большую роль играют силы поверхностного натяжения и имеется пространственный период.

Несмотря на многочисленные приложения этой задачи в процессах дистилляции [6, 7] и современном теплообменном оборудовании [8, 9], исследованию непосредственно течения пленки вдоль гофрированной поверхности посвящено небольшое число экспериментальных [10, 11] и теоретических [12–19] работ. Так, с использованием метода возмущений

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 99-1107) и Фонда содействия отечественной науке.

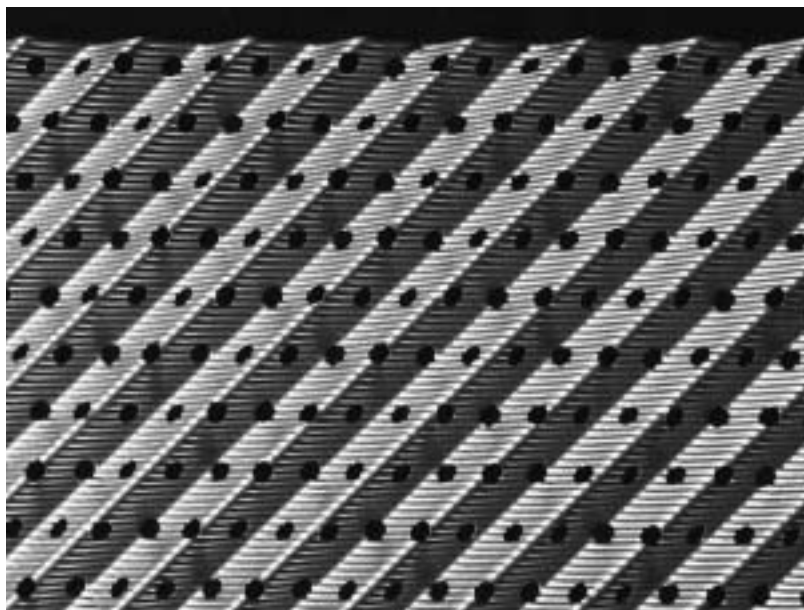


Рис. 1. Пример поверхности с крупным гофрированием и мелкой горизонтальной текстурой

исследовано пленочное течение вдоль синусоидальной поверхности с амплитудой гофрирования, малой по сравнению с нуссельтовской толщиной пленки [12]. В работе [13] данный подход обобщен на случай двухслойного пленочного течения вдоль слабоволнистой поверхности. С использованием метода граничных элементов в [14] рассмотрено ползущее течение вдоль наклонной изогнутой поверхности в пренебрежении инерционными силами. Применяя асимптотический подход, авторы работы [15] исследовали стекание по поверхности с амплитудой гофрирования, много большей нуссельтовской толщины пленки. В [16] при рассмотрении гофрирования в линейном приближении исследовались резонансные эффекты в области конечных чисел Рейнольдса. Численное решение уравнения Навье — Стокса позволило авторам работ [17, 18] изучить пленочное течение в области конечных чисел Рейнольдса при амплитуде гофрирования, сопоставимой с нуссельтовской толщиной. В [17, 18] также развит интегральный подход и исследована устойчивость такого пленочного течения к возмущениям свободной поверхности. В работе [19] исследовался тепло- и массообмен при стекании пленки вдоль гофрированной поверхности. Во всех перечисленных работах рассматривалось стекание вдоль одномерной изогнутой поверхности (гофрирование в направлении стекания). Основная цель настоящей работы — исследование пленочного течения вдоль сложных трехмерных поверхностей (рис. 1) с крупным гофрированием (амплитуда много больше нуссельтовской толщины) и мелкой текстурой (амплитуда сопоставима с нуссельтовской толщиной).

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Одномерное гофрирование. Стеkanie пленки вдоль одномерной гофрированной поверхности описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями [17]:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\
u = v = 0, \quad y &= f(x), \\
\sigma_{ik} n_k n_i &= -P_a + \frac{\sigma}{[1 + (dh/dx)^2]^{3/2}} \frac{d^2 h}{dx^2}, \quad \sigma_{ik} n_k \tau_i = 0, \quad i, k = 1, 2, \quad y = h(x), \\
v &= u \frac{dh}{dx}, \quad y = h(x), \\
\mathbf{n} &= \frac{(-dh/dx, 1)}{\sqrt{1 + (dh/dx)^2}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{(1, dh/dx)}{\sqrt{1 + (dh/dx)^2}}, \quad \mathbf{u} = (u, v), \quad \mathbf{x} = (x, y), \\
\sigma_{ik} &= -P \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).
\end{aligned}$$

Здесь u, v — компоненты скорости вдоль осей x, y соответственно; P — давление в жидкости; P_a — атмосферное давление; ν, μ — кинематическая и динамическая вязкости соответственно; ρ — плотность жидкости; σ — поверхностное натяжение; $f(x)$ — функция, описывающая форму гофрированной стенки; $h(x)$ — функция, описывающая форму свободной поверхности; $H(x) = h(x) - f(x)$ — локальная толщина пленки; σ_{ik} — компоненты тензора напряжений в жидкости; n_k, τ_i — компоненты нормального и тангенциального единичных векторов соответственно.

Используя преобразование координат $x = x, \eta = (y - f(x))/H(x)$ (в новых переменных область течения становится известной: $x \in [0, L], \eta \in [0, 1]$), обезразмеривая исходные уравнения и комбинируя граничные условия, получим систему уравнений для численного расчета

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial P_*}{\partial x_*} - \eta_x \frac{\partial P_*}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[3 + \eta_y^2 \frac{\partial^2 u_*}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 u_*}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_* \partial \eta} + \right. \right. \\
\left. \left. + (\eta_x \xi + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial u_*}{\partial \eta} \right) \right] - \eta_y \frac{\partial u_* v_*}{\partial \eta} - \frac{\partial u_*^2}{\partial x_*} - \eta_x \frac{\partial u_*^2}{\partial \eta} = 0; \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (P_* - (P_a)_*)}{\partial \eta} = \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 v_*}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v_*}{\partial x_*^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 v_*}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 v_*}{\partial x_* \partial \eta} + \right. \right. \\
\left. \left. + (\eta_x \xi + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial v_*}{\partial \eta} \right) \right] H_*(x_*) - \varepsilon^2 \left(H_* \frac{\partial u_* v_*}{\partial x_*} + H_* \eta_x \frac{\partial u_* v_*}{\partial \eta} + \frac{\partial v_*^2}{\partial \eta} \right); \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$v_*(x_*, \eta) = -H_*(x_*) u_*(x_*, \eta) \eta_x - \frac{\partial}{\partial x_*} \left(H_* \int_0^\eta u_*(x_*, \eta') d\eta' \right); \quad (2.3)$$

$$H_*(x_*) \int_0^1 u_*(x_*, \eta') d\eta' = 1; \quad (2.4)$$

$$u_*(x_*, \eta) = 0, \quad \eta = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
P_* - (P_a)_* = \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \frac{1}{H_*(x_*)} \frac{\partial v_*}{\partial \eta} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 H_*}{dx_*^2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d^2 f_*}{dx_*^2} \right)^2 \right] / \left[1 - \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 H_*}{dx_*^2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d^2 f_*}{dx_*^2} \right)^2 \right] - \\
- \varepsilon^2 \text{We} \left(\frac{d^2 H_*}{dx_*^2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d^2 f_*}{dx_*^2} \right) / \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{dH_*}{dx_*} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{df_*}{dx_*} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad \eta = 1; \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial u_*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 H_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} - \varepsilon^2 \left(\frac{dH_*}{dx_*} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{df_*}{dx_*} \right) \frac{\partial v_*}{\partial \eta} \right] \left[1 - \varepsilon^2 \left(\frac{dH_*}{dx_*} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{df_*}{dx_*} \right)^2 \right] + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v_*}{\partial \eta} \left(\frac{dH_*}{dx_*} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{df_*}{dx_*} \right) = 0, \quad \eta = 1. \quad (2.7)$$

Здесь $x_* = x/L$; $y_* = y/H_0$; $f_*(x) = f(x)/A$; $u_* = u/u_0$; $v_* = v/(\varepsilon u_0)$; $H_*(x) = H(x)/H_0$; $P_* = P/(\rho u_0^2)$; A — амплитуда гофрирования; $u_0 = Q_0/H_0$; $\varepsilon = H_0/L$; $\varepsilon_1 = H_0/A$; H_0 — нуфельтовская толщина пленки; $We = (3Fi)^{1/3}/Re^{5/3}$ — число Вебера; $Fi = (\sigma/\rho)^3/(g\nu^4)$ — пленочное число; $\eta = (y - f(x)/\varepsilon_1)/H(x)$; $\eta_x = -[\eta dH/dx + (1/\varepsilon_1) df/dx]/H(x)$; $\eta_y = 1/H(x)$; $\eta_{x\eta} = -(1/H) dH/dx$; $\eta_{x\xi} = -(\eta_x/H) dH/dx - [\eta d^2H/dx^2 + (1/\varepsilon_1) d^2f/dx^2]/H(x)$; $Q_0 = \nu Re$ — плотность орошения. В дальнейшем знак обезразмеривания опускается.

Из уравнений (2.1)–(2.7) следует, что течение определяется четырьмя независимыми величинами: Fi , $(\nu^2/g)^{1/3}/L$, A/L , Re . Функция $f(x)$, описывающая форму гофрирования, также считается независимой переменной. Задача состоит в нахождении неизвестных полей $u(x, y)$, $v(x, y)$, $P(x, y)$ и $H(x)$ при заданных параметрах. Уравнения (2.1)–(2.7) решались численно с использованием спектрального метода:

$$u(x, \eta) = \frac{1}{2} U_1(x) + \sum_{m=2}^M U_m(x) T_{m-1}(\eta_1), \quad \eta_1 = 2\eta - 1, \quad (2.8)$$

$$U_m(x) = U_m^0 + \sum_{n=-N/2+1, n \neq 0}^{N/2-1} U_m^n \exp(2\pi i n x), \quad (U_m^{-n})^* = U_m^n, \quad m = 1, \dots, M.$$

Здесь $T_m(\eta_1)$ — полиномы Чебышева; знак “*” обозначает комплексное сопряжение.

При заданных $M(N-1)$ значениях гармоник U_m^n толщина пленки $H(x)$ однозначно восстанавливается из уравнения (2.4), скорость $v(x, \eta)$ — из уравнения (2.3), $P(x, \eta)$ — из уравнений (2.2) и (2.6). Численный алгоритм стартует с начального приближения гармоник U_m^n (например, с решения Нуссельта), которое затем уточняется методом Ньютона с использованием уравнения (2.1) в (n, m) -пространстве. Матрица Якоби рассчитывается с помощью конечно-разностной схемы. Базисные функции (2.8) автоматически не удовлетворяют граничным условиям (2.5), (2.7). Как следствие имеется $(M+2)(N-1)$ нелинейных алгебраических уравнений для определения $M(N-1)$ неизвестных величин, т. е. система переопределена. В данной работе отбрасываются $2(N-1)$ уравнений, соответствующих двум последним (малым) полиномам Чебышева в разложении уравнения (2.1), вместо них используются граничные условия (2.5), (2.7). При отладке процедуры счета проверялись другие способы уменьшения числа уравнений. В случае достаточно хорошей аппроксимации функции $u(x, \eta)$ результаты практически совпадают. Для аппроксимации функции $u(x, \eta)$ в расчетах N и M варьировались таким образом, что всегда выполнялись условия $|U_m^{N/2-1}|/\sup |U_m^n| < 10^{-3}$ при всех m и $|U_M^n|/\sup |U_m^n| < 10^{-3}$ при всех n . Слабое отличие решений при различных N и M (при удовлетворительной аппроксимации поля скорости) является дополнительным подтверждением корректности численной процедуры.

При исследовании волновой динамики на поверхности пленок, стекающих по гладкой поверхности, часто используется интегральный подход (система уравнений Шкадова [20]). При этом рассматриваются длинноволновые возмущения. В данном случае можно получить аналогичные уравнения, ограничиваясь рассмотрением случая гофрирования с периодом, много бóльшим толщины пленки ($\varepsilon \ll 1$). Отметим, что для большинства используемых насадок [6–9] это приближение выполняется в случае мелкого гофрирования. В дальнейшем будем использовать интегральный подход для расчета течения вдоль

поверхности с двойной структурой гофрирования. Основная идея интегрального подхода заключается в использовании автомодельного профиля продольной скорости

$$u(x, y) = \frac{3\nu \operatorname{Re}}{H(x)} \left(\frac{y - f(x)}{H(x)} - \frac{(y - f(x))^2}{2H^2} \right). \quad (2.9)$$

Данный профиль удовлетворяет граничным условиям при $\varepsilon \ll 1$ и уравнению (2.4). Подставляя (2.9) в (2.1)–(2.7), отбрасывая малые величины и интегрируя поперек слоя, получим следующую систему уравнений для исследования динамики пленочного течения по волнистой поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{H} &= \frac{3}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left(H - \frac{q}{H^2} \right) + \varepsilon^2 \operatorname{We} H \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d^3 f}{dx^3} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь добавлены нестационарные члены для более полного описания возможных процессов. Отметим, что сохранение капиллярного члена в уравнении (2.10) объясняется большим значением пленочного числа Fi , входящего в критерий Вебера, для большинства используемых жидкостей.

В данной работе представляют интерес стационарные решения системы (2.10) $H = H(x)$, $q = 1$. В этом случае имеются три независимых параметра ($\varepsilon \operatorname{Re}$, $\varepsilon^2 \operatorname{We}$, ε_1), в отличие от уравнений (2.1)–(2.7), в которых таких параметров было четыре. Уравнение (2.10) решалось численно с использованием метода Ньютона и фурье-разложения:

$$H(x) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} H_n \exp(2\pi i n x), \quad (H_{-n})^* = H_n.$$

При выводе уравнения (2.10) предполагалось, что параметр $\varepsilon_1 \approx 1$ (амплитуда гофрирования сопоставима с толщиной пленки). В случае крупных гофров $\varepsilon_1 \ll 1$, и использование интегрального подхода приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{6}{5} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{H} \right) &= \frac{3}{\operatorname{Re}} \frac{d}{ds} (H^2 \sin \theta) + \frac{3}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left(H \cos \theta - \frac{1}{H^2} \right) + \varepsilon^2 \operatorname{We} H \frac{d^3 H}{ds^3}, \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + ((\varepsilon/\varepsilon_1) df/dx)^2}} \Big|_{x=x(s)}, \quad \sin \theta = \frac{(\varepsilon/\varepsilon_1) df/dx}{\sqrt{1 + ((\varepsilon/\varepsilon_1) df/dx)^2}} \Big|_{x=x(s)}, \\ s &= \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{df}{dx} \right)^2} dx_1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь s — “погранслоиная” переменная; толщина пленки отсчитывается в направлении, перпендикулярном твердой поверхности. Периодические функции $\cos \theta(s)$ и $\sin \theta(s)$ рассчитываются исходя из формы гофрирования.

2.2. Двумерное гофрирование. В случае наклонных гофров (α — угол наклона гофров относительно горизонта, отсчитываемый против часовой стрелки, координата z направлена вдоль гофров) уравнения движения в (x, y) -направлениях и в z -направлении расщепляются при задании плотности орошения поперек гофров. При этом в безразмерном виде уравнения (2.1)–(2.11) остаются прежними, а во всех безразмерных комплексах следует заменить g на $g \cos \alpha$. Отметим, что число Рейнольдса в этом случае построено по плотности орошения поперек ребра: $\operatorname{Re} = \operatorname{Re}_{acr}$.

После определения полей u , v , P , H из уравнений (2.1)–(2.7) поле скорости w в z -направлении определяется из следующих уравнений:

$$-\eta_y \frac{\partial wv}{\partial \eta} - \frac{\partial wu}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial wu}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \eta} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\eta_{x\xi} + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] = -\frac{3}{\varepsilon \operatorname{Re}} \operatorname{tg} \alpha, \quad Q(x) = H \int_0^1 w(x, \eta) d\eta, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial \eta} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{dH}{dx} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{df}{dx} \right)^2 \right] - \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{dH}{dx} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{df}{dx} \right) = 0, \quad \eta = 1, \\ w(x, \eta) = 0, \quad \eta = 0.$$

В случае длинноволнового гофрирования с амплитудой, сопоставимой с толщиной пленки, к уравнению (2.10) добавляется уравнение для определения расхода Q вдоль ребра:

$$\frac{6}{5} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{H} \right) = \frac{3}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left(H \operatorname{tg} \alpha - \frac{Q}{H^2} \right). \quad (2.13)$$

В случае крупного гофрирования ($\varepsilon_1 \ll 1$) уравнение, дополняющее (2.11), совпадает с (2.13) при замене x на s .

Во всех трех случаях (уравнение Навье — Стокса, $\varepsilon \ll 1$ и $\varepsilon_1 \ll 1$) плотность орошения в вертикальном направлении рассчитывается по формуле

$$\operatorname{Re}_{vert} = \operatorname{Re} \cos \alpha (1 + \langle Q \rangle \operatorname{tg} \alpha). \quad (2.14)$$

Здесь угловые скобки обозначают среднее значение по координате x или s .

Отметим, что при орошении поперек ребер задача определения формы свободной поверхности, полей скоростей и давления имеет решение во всем диапазоне чисел Рейнольдса, углов наклона α и геометрии ребер. Как показано ниже, при орошении в направлении силы тяжести (уравнение (2.14) решается одновременно с уравнениями движения) могут существовать диапазоны параметров, в которых решение с полностью смоченной поверхностью отсутствует.

2.3. Трехмерная поверхность с крупными гофраами и мелкой текстурой.

Рассматривается течение вдоль пластины с крупным гофрированием периода L в x -направлении и мелкой текстурой с периодом L_s . Координата z направлена вдоль оси крупного гофрирования, и результирующий профиль поверхности имеет вид

$$F_{3d}(x, z) = AF(x/L) + A_s f((x \cos \varphi - z \sin \varphi)/L_s). \quad (2.15)$$

Здесь $F(x)$ — безразмерный профиль крупного гофрирования; A — амплитуда крупного гофрирования; α — угол наклона крупных гофров относительно горизонта; L — период крупного гофрирования; $f(\xi)$ — безразмерный профиль мелкой текстуры; A_s — амплитуда мелкой текстуры; α_s — угол наклона мелкой текстуры относительно горизонта; L_s — период мелкой текстуры; $\varphi = \alpha_s - \alpha$ — угол наклона мелкой текстуры относительно оси крупного гофрирования. Отметим, что функция $F_{3d}(x, z)$ не является периодической в x - и z -направлениях. Поэтому ниже используется косоугольное преобразование координат.

Течение вязкой пленки по рассматриваемой поверхности представляет собой сложную трехмерную задачу. В этом случае расчет свободной поверхности и поля скоростей на основе уравнений Навье — Стокса сопряжен с большими вычислительными трудностями. Как показано в [17, 18] и в настоящей работе, существует диапазон чисел Рейнольдса, в котором течение вдоль пластины с одномерным и двумерным гофрированием хорошо

описывается интегральной моделью. Поэтому представляется возможным развить интегральный подход для описания течения пленки вдоль пластины с профилем (2.15).

Далее используем “погранслоиную” координату s , направленную вдоль твердой поверхности, образуемой крупными гофрами, и локальную координату y , перпендикулярную ей. Ограничимся случаем, когда период мелкой текстуры много больше толщины пленки. При этом упрощенные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + g \cos \alpha \cos \theta + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g \cos \alpha \sin \theta &= 0, \\ u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ u = v = w = 0, \quad y &= A_s f(s, z), \\ P = P_a - \sigma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} &= 0, \quad y = h(s, z), \\ v = u \frac{\partial h}{\partial s} + w \frac{\partial h}{\partial z}, \quad y &= h(s, z), \\ h(s, z) = H(s, z) + A_s f(s, z), \quad f(s, z) &= f((s \cos \varphi - z \sin \varphi)/L_s), \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (A dF/dx)^2}} \Big|_{x=x(s)}, \quad \sin \theta &= \frac{A dF/dx}{\sqrt{1 + (A dF/dx)^2}} \Big|_{x=x(s)}, \\ s &= \int_0^x \sqrt{1 + \left(A \frac{dF}{dx_1} \right)^2} dx_1. \end{aligned}$$

Здесь функции $\cos \theta$ и $\sin \theta$ определяются геометрией крупного гофрирования.

Далее используем автомодельные профили скорости, удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} u(y, s, z) &= \frac{3q(s, z)}{H(s, z)} \left[\frac{y - A_s f(s, z)}{H(s, z)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y - A_s f(s, z)}{H(s, z)} \right)^2 \right], \\ w(y, s, z) &= \frac{3Q(s, z)}{H(s, z)} \left[\frac{y - A_s f(s, z)}{H(s, z)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y - A_s f(s, z)}{H(s, z)} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя поперек слоя, получим

$$\begin{aligned} \frac{6}{5} \frac{\partial q^2}{\partial s} \frac{1}{H} + \frac{6}{5} \frac{\partial qQ}{\partial z} \frac{1}{H} &= gH \cos \alpha \cos \theta - \frac{3\nu q}{H^2} - \frac{1}{\rho} H \frac{\partial P^*}{\partial s} - \\ &- g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{H^2}{2} \sin \theta \right) - gH A_s \frac{\partial f}{\partial s} \cos \alpha \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q^2}{H} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial s} \frac{qQ}{H} = gH \sin \alpha - \frac{3\nu Q}{H^2} - \frac{1}{\rho} H \frac{\partial P^*}{\partial z} -$$

$$- g \cos \alpha \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^2}{2} \right) - gH A_s \frac{\partial f}{\partial z} \cos \alpha \sin \theta,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad P^* = -\sigma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right), \quad h(s, z) = H(s, z) + A_s f(s, z).$$

Здесь q — локальный расход вдоль координаты s (поперек крупного ребра); Q — расход в z -направлении (вдоль крупного ребра).

Далее используем преобразование координат

$$s = s, \quad \xi = s \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi}$$

и безразмерные величины s/L_1 , ξ/L_s , $l = L_s/L_1$ (L_1 — периметр одного периода крупного ребра), q/Q_0 , Q/Q_0 (Q_0 — плотность орошения в направлении силы тяжести), H/H_0 ($H_0 = (3\nu Q_0/(g \cos \alpha))^{1/3}$). После соответствующих преобразований имеем

$$\left(l \frac{\partial}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{6}{5} \frac{q^2}{H} + \frac{1,5}{\text{Re}} H^2 \sin \theta \right) - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{6}{5} \frac{qQ}{H} \right) =$$

$$= \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} \left(H \cos \theta - \frac{q}{H^2} \right) - \varepsilon^2 \text{We} H \left(l \frac{\partial}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) P^* - \frac{3\varepsilon_1}{\text{Re}} H \sin \theta \cos \varphi \frac{df}{d\xi}; \quad (2.16)$$

$$\left(l \frac{\partial}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{6}{5} \frac{qQ}{H} \right) - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{6}{5} \frac{Q^2}{H} + \frac{1,5}{\text{Re}} H^2 \sin \theta \right) =$$

$$= \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} \left(H \text{tg} \alpha - \frac{Q}{H^2} \right) + \varepsilon^2 \text{We} H \sin \varphi \frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \frac{3\varepsilon_1}{\text{Re}} H \sin \theta \sin \varphi \frac{df}{d\xi}; \quad (2.17)$$

$$\left(l \frac{\partial}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) q - \sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0, \quad P^* = - \left(l^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2 \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial s \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) h(s, \xi); \quad (2.18)$$

$$\langle\langle Q \rangle\rangle \sin \alpha + \langle\langle q \rangle\rangle \cos \alpha = 1, \quad h(s, \xi) = H(s, \xi) + f(\xi)/\varepsilon_1. \quad (2.19)$$

Здесь

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + ((A/L) dF/dx)^2}} \Big|_{x=x(s)}; \quad s = \frac{L}{L_1} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{A}{L} \frac{dF}{dx_1} \right)^2} dx_1;$$

$\varepsilon = H_0/L_s$; $\varepsilon_1 = H_0/A_s$; $\text{We} = (3\text{Fi})^{1/3}/\text{Re}^{5/3}$; $\text{Fi} = (\sigma/\rho)^3/(g\nu^4 \cos \alpha)$. Двойные угловые скобки обозначают осреднение по координатам s и z .

В рассматриваемой задаче имеется две функции, характеризующие профили крупного и мелкого гофрирований, и восемь независимых безразмерных параметров: $(3\nu^2/g)^{1/3}/L_s$, $A_s/(3\nu^2/g)^{1/3}$, $(\sigma/\rho g)/L_s^2$, L_s/L_1 , A/L , α , φ , Re . Уравнения (2.16)–(2.19) решались численно спектральным методом:

$$H(s, \xi) = \sum_{m=-M/2+1}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} H_{nm} \exp(2\pi i n s) \exp(2\pi i m \xi), \quad (H_{-n, -m})^* = H_{n, m},$$

$$Q(s, \xi) = \sum_{m=-M/2+1}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} Q_{nm} \exp(2\pi i n s) \exp(2\pi i m \xi), \quad (Q_{-n, -m})^* = Q_{n, m},$$

$$q(s, \xi) = \sum_{m=-M/2+1}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} q_{nm} \exp(2\pi i n s) \exp(2\pi i m \xi), \quad (q_{-n, -m})^* = q_{n, m}.$$

Из (2.18) следует

$$q_{nm} = \begin{cases} mQ_{nm} \sin \varphi / (nl + m \cos \varphi), & n \neq 0, m \neq 0, \varphi \neq \pi/2, \\ (1 - Q_{00} \sin \alpha) / \cos \alpha, & n = 0, m = 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению неизвестных гармоник H_{nm} , Q_{nm} и решается численно методом Ньютона. Случай $\varphi = \pi/2$ является вырожденным, при этом имеется симметрия $Q_{0m} = 0$. Гармоники q_{0m} в этом случае определяются из уравнений (2.16), (2.17).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Двумерное гофрирование. Результаты расчетов по уравнениям Навье — Стокса (2.1)–(2.7), (2.12), (2.14) и по интегральной модели (2.10), (2.13), (2.14) представлены на рис. 2, 3. Рассматривалось гофрирование со следующими параметрами: $A = 0,175$ мм (сопоставима с нуссельтовской толщиной пленки), $L = 1,57$ мм, $f(x) = 0,5(1 - \cos(2\pi x))$. Отметим, что данные параметры близки к соответствующим характеристикам мелкой текстуры для элементов промышленной насадки Sulzer 500Y [6]. Расчеты проводились для маловязкой жидкости (азот на линии насыщения при атмосферном давлении) при $\alpha = 30^\circ$. На рис. 2 приведены зависимости основных характеристик свободной поверхности от числа Рейнольдса. На рис. 3 представлены линии равного уровня функции тока Ψ ($u = \partial\Psi/\partial y$, $v = -\partial\Psi/\partial x$) при $Re = 5; 45$.

Проведенные расчеты стекания вдоль пластины с мелкими наклонными гофрами позволяют сделать следующие выводы.

При малых числах Рейнольдса формируются участки “толстых” пленок в углублениях поверхности и тонких пленок на вершинах. Минимальная толщина пленки наблюдается на склоне твердой поверхности в окрестности ее вершины.

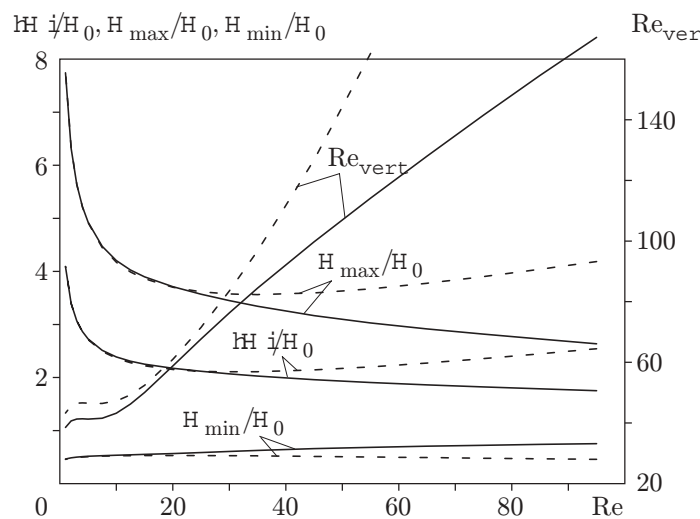


Рис. 2. Двумерное гофрирование с наклоном $\alpha = 30^\circ$: сплошные линии — расчет по уравнению Навье — Стокса, штриховые — по интегральной модели

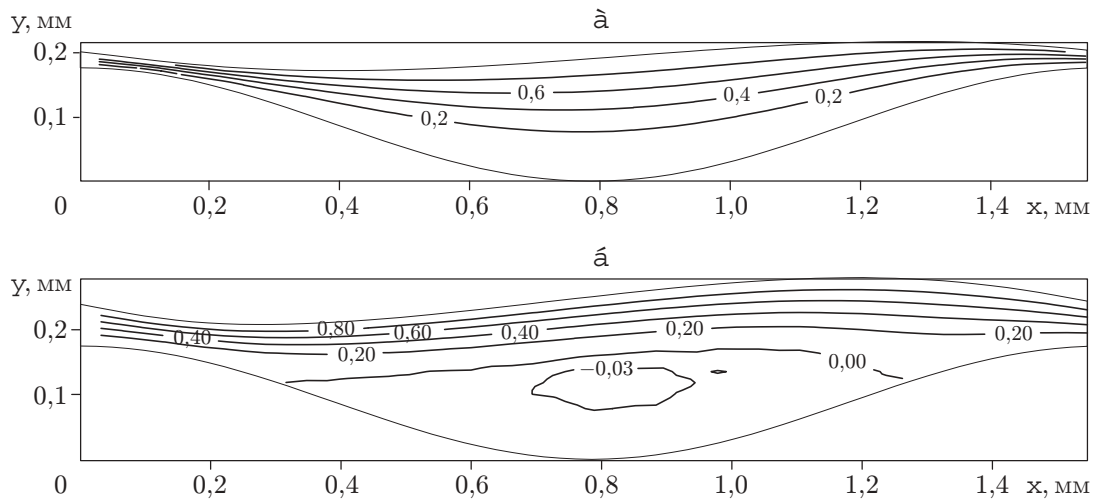


Рис. 3. Изолинии функции тока при наклоне гофров $\alpha = 30^\circ$:
 а — $Re = 5$, б — $Re = 45$

С увеличением числа Рейнольдса свободная поверхность выпрямляется и происходит “затопление” текстуры.

В исследованном диапазоне чисел Рейнольдса можно выделить две области. В области малых и умеренных чисел Рейнольдса течение в значительной степени определяется силами поверхностного натяжения, а в области больших Re — силами инерции.

В области, где течение определяется силами поверхностного натяжения, расчеты по интегральной модели хорошо согласуются с расчетами по уравнениям Навье — Стокса.

В случае течения вдоль пластины с крупными гофрами результаты расчетов по обоим моделям удовлетворительно согласуются в широком диапазоне чисел Рейнольдса, углов наклона гофров и характеристик гофрирования. Капиллярные и инерционные члены в этом случае малы, и течение с высокой точностью описывается следующими формулами для безразмерной толщины пленки и расходов:

$$H(s) = (1/\cos\theta)^{1/3}, \quad q(s) = 1, \quad Q(s) = \operatorname{tg}\alpha/\cos\theta, \quad Re_{vert} = Re \cos\alpha(1 + \langle Q \rangle \operatorname{tg}\alpha).$$

3.2. Трехмерная поверхность с крупными гофрами и мелкой текстурой. На рис. 4–7 представлены результаты расчетов стекания пленки вдоль пластины с двойной структурой рифления. Безразмерная форма крупного и мелкого гофрирования задавалась косинусоидальной, как и в подп. 3.1. Расчеты проведены для азота на линии насыщения при атмосферном давлении. Из уравнений (2.16)–(2.19) следует, что даже для фиксированных физических свойств жидкости в задаче остается много параметров. Ограничимся рассмотрением одного варианта размеров крупных ребер: $A = 6,5$ мм, $L = 11$ мм, $\alpha = 48^\circ$, одним числом Рейнольдса $Re = 30$, фиксированным периодом мелкого рифления $L_s = 1,57$ мм. Отметим, что данные значения геометрических параметров близки к соответствующим характеристикам отдельных элементов промышленной насадки Sulzer 500Y [6] (рис. 1). На рис. 4–6 варьировалась амплитуда мелкого рифления (от нулевого значения до предельного, при котором удавалось получить решение для случая полностью смоченной твердой поверхности). В расчетах варьировался угол наклона мелкой текстуры. Выбранные значения параметров находятся в области, где результаты расчетов одномерных и двумерных течений по интегральным моделям хорошо согласуются с результатами расчетов по полным уравнениям Навье — Стокса.

На рис. 4–6 приведены зависимости трех характеристик — толщины пленки H , расхода поперек крупного ребра q и расхода вдоль крупного ребра Q — от амплитуды мелкого рифления соответственно.

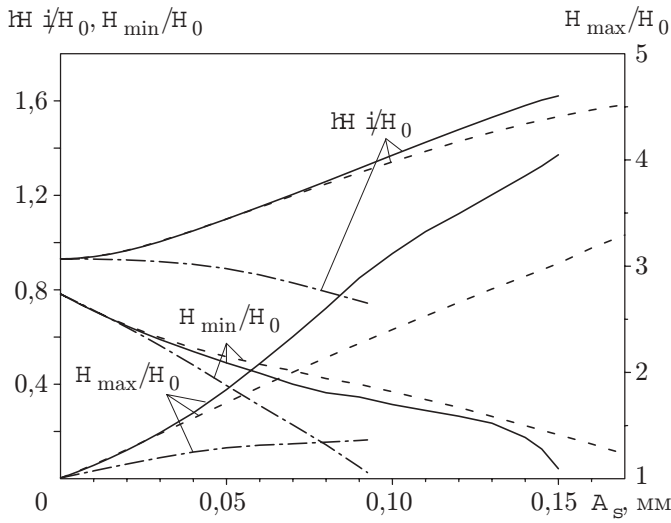


Рис. 4. Зависимости толщины пленки от амплитуды мелкой текстуры при стекании по поверхности с двойной структурой рифления: сплошные линии — $\alpha_s = 8^\circ$ (почти горизонтальная текстура), штриховые — $\alpha_s = -27^\circ$ (наклонная текстура), штрихпунктирные — $\alpha_s = -90^\circ$ (вертикальная текстура)

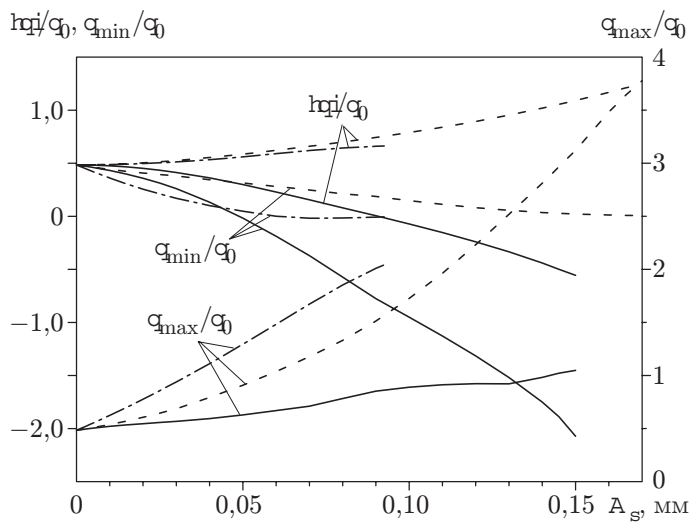


Рис. 5. Зависимости расхода поперек крупного ребра от амплитуды мелкой текстуры при стекании по поверхности с двойной структурой рифления: сплошные линии — $\alpha_s = 8^\circ$, штриховые — $\alpha_s = -27^\circ$, штрихпунктирные — $\alpha_s = -90^\circ$

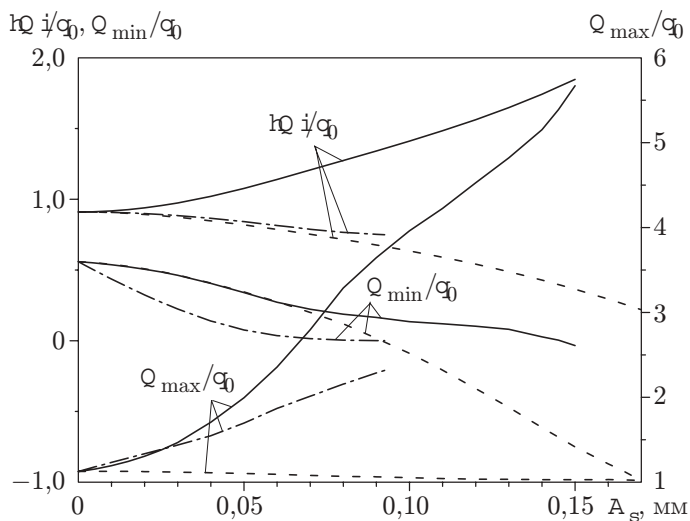


Рис. 6. Зависимости расхода вдоль крупного ребра от амплитуды мелкой текстуры при стекании по поверхности с двойной структурой рифления: сплошные линии — $\alpha_s = 8^\circ$, штриховые — $\alpha_s = -27^\circ$, штрихпунктирные — $\alpha_s = -90^\circ$

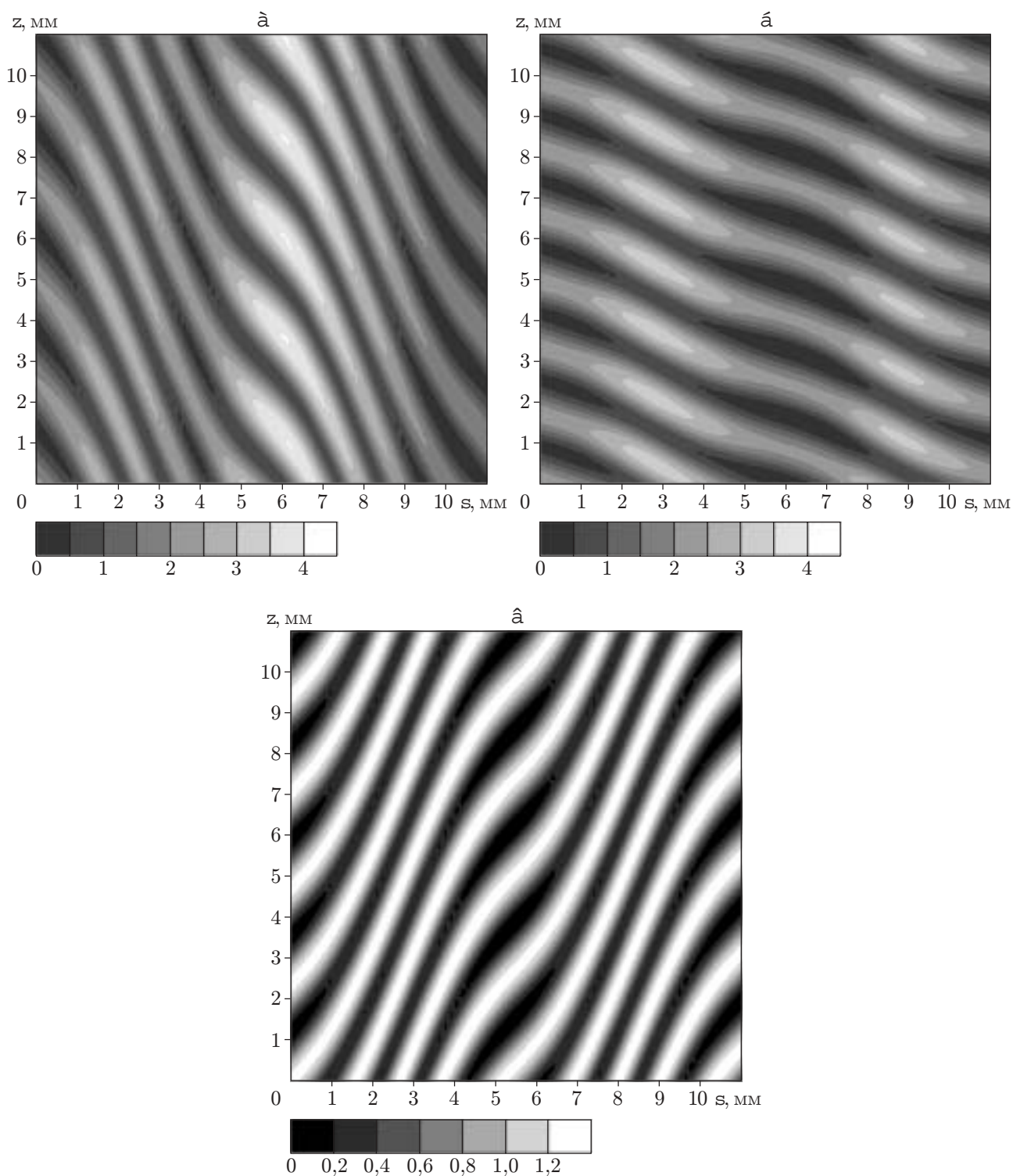


Рис. 7. Распределение толщины пленки на одном периоде крупного рифления в направлениях s и z :

a — $\alpha_s = 8^\circ$ (почти горизонтальная текстура), *b* — $\alpha_s = -27^\circ$ (наклонная текстура),
v — $\alpha_s = -90^\circ$ (вертикальная текстура)

На рис. 7 для трех углов наклона мелкой текстуры представлено распределение толщины пленки в области, соответствующей одному периоду крупного рифления в направлениях s и z . Значения амплитуды мелкой текстуры близки к соответствующим предельным значениям ($a — A_s = 0,15$ мм, $b — A_s = 0,17$ мм, $e — A_s = 0,0925$ мм). Отметим, что при повороте рис. 7 против часовой стрелки на угол, равный 42° , картина будет соответствовать физической плоскости, в которой вектор силы тяжести направлен вниз. Отметим также, что вершине крупного ребра соответствует координата $x = 5,5$ мм.

Проведенные расчеты стекания вдоль пластины с двойной структурой гофрирования позволяют сделать следующие выводы.

Для всех исследованных углов наклона мелкой текстуры существует предельное значение ее амплитуды, до которого существует решение с полностью смоченной твердой поверхностью. Далее, по-видимому, течение пленки сопровождается появлением сухих участков. При этом распределения толщины пленки и расходов вблизи критической амплитуды имеют сложный вид. Рядом с областями тонких пленок существуют области, в которых расходы в пленке и ее толщина значительны.

Угол наклона мелкой текстуры оказывает существенное влияние на осредненные характеристики течения. С ростом амплитуды горизонтальной текстуры увеличивается средний расход вдоль крупных ребер и уменьшается средний переток через крупные ребра. Обратная тенденция наблюдается для вертикальной и наклонной текстуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nusselt W.** Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes // Zeitschrift VDI. 1916. Bd 60. S. 541–546.
2. **Alekseenko S. V., Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G.** Wavy liquid film flow. Novosibirsk: Nauka, 1992.
3. **Chang H.-C.** Wave evolution on a falling film // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 103–136.
4. **Trifonov Yu. Ya., Tsvlodub O. Yu.** Non-linear waves on the surface of a falling liquid film. Pt 1. Waves of the first family and their stability // J. Fluid Mech. 1991. V. 229. P. 531–554.
5. **Nguyen L. T., Balakotaiah V.** Modeling and experimental studies of wave evolution on free falling viscous films // Phys. Fluids. 2000. V. 12. P. 2236–2256.
6. **Fair J. R., Bravo J. R.** Distillation columns containing structure packing // Chem. Engng Progr. 1990. V. 86. P. 19–29.
7. **DeSantos J. M., Melli T. R., Scriven L. E.** Mechanics of gas-liquid flow in packed-bed contactors // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 233–260.
8. **Shah R. K., Focke W. W.** Plate heat exchangers and their design theory // Heat transfer equipment design. Washington DC: Hemisphere, 1988. P. 227–254.
9. **Webb R. L.** Principles of enhanced heat transfer. N. Y.: Wiley, 1994.
10. **Zhao L., Cerro R. L.** Experimental characterization of viscous film flows over complex surfaces // Intern. J. Multiphase Flow. 1992. V. 6. P. 495–516.
11. **Vlachogiannis M., Bontozoglou V.** Experiments on laminar film flow along a periodic wall // J. Fluid Mech. 2002. V. 457. P. 133–156.
12. **Wang C. Y.** Liquid film flowing slowly down a wavy incline // AIChE J. 1981. V. 27. P. 207–212.
13. **Kang F., Chen K.** Gravity-driven two-layer flow down a slightly wavy periodic incline at low Reynolds numbers // Intern. J. Multiphase Flow. 1995. V. 3. P. 501–513.
14. **Pozrikidis C.** The flow of a liquid film along a periodic wall // J. Fluid Mech. 1988. V. 188. P. 275–300.

15. **Shetty S., Cerro R. L.** Flow of a thin film over a periodic surface // Intern. J. Multiphase Flow. 1993. V. 6. P. 1013–1027.
16. **Bontozoglou V., Papapolymerou G.** Laminar film flow down a wavy incline // Intern. J. Multiphase Flow. 1997. V. 1. P. 69–79.
17. **Trifonov Yu. Ya.** Viscous liquid film flows over a periodic surface // Intern. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24. P. 1139–1161.
18. **Trifonov Yu. Ya.** Viscous liquid film flows over a vertical corrugated surface and the film free surface stability // Russ. J. Engng Thermophys. 2000. V. 10, N 2. P. 129–145.
19. **Trifonov Yu. Ya.** Viscous liquid film flows over a vertical corrugated surface. Calculation of heat and mass transfer // Advanced computational methods in heat transfer VI. Southampton, UK: WITpress, 2000. P. 373–382.
20. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.

*Поступила в редакцию 31/III 2003 г.,
в окончательном варианте — 30/VI 2003 г.*
