УДК 518.517.0

ПРОБЛЕМА ЖЕСТКОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД С ТРЕХТЕМПЕРАТУРНОЙ СХЕМОЙ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА

Д. В. Садин

Военный инженерно-космический университет им. А. Ф. Можайского,
197082 Санкт-Петербург

При численном моделировании волновых течений гетерогенных сред с терхтемпературной схемой межфазного тепло- и массобмена возникает проблема жесткости уравнений. Для описания данных процессов построена дискретная модель повышенной устойчивости. Как показали тестовые расчеты взаимодействия ударной волны с ограниченным слоем смеси газа и капель, в предположении дискретной модели в широком диапазоне исходных данных, условия устойчивости не зависят от интенсивности межфазных взаимодействий (K-устойчивость).

Введение. Разработка новых технологий и систем защиты от интенсивных ударно-волновых, тепловых, вибрационных воздействий с использованием гетерогенных сред требует углубленного исследования процессов движения смесей, претерпевающих фазовые переходы, с учетом эффектов скоростной и температурной неравновесности фаз. Как правило, решение указанных задач может быть найдено лишь численно на основе дискретных моделей (разностных схем). Исследованию проблемы численного моделирования волновых течений гетерогенных сред посвящены работы [1, 2] и др. Разработаны схемы расчета волновых течений газа с твердыми частицами и каплями [3, 4]. Особенностью математического моделирования волновых течений гетерогенных сред является большее (например, по сравнению с задачами газовой динамики) количество уравнений движения и замыкающих соотношений, что повышает требования к мощности компьютера. Поэтому представляется актуальной разработка экономичных методов численного решения данного класса задач.

Как показывают исследования [5–7], при расчете фильтрации газа в пористой среде и волновых течений смеси газа и твердых частиц, когда интенсивность межфазных взаимодействий (трение, теплообмен) велики, необходимо существенно ограничивать шаг по времени. Следует отметить, что критерий Куранта (см., например, [6]) накладывает менее жесткие условия на допустимый шаг интегрирования.

Подобная проблема возникает при численном интегрировании некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений классическими методами [8], когда в векторе решения имеются компоненты, характеризующиеся существенно различными временными масштабами. Для указанного типа обыкновенных дифференциальных уравнений введен термин “жесткость” и показано, что для их численного решения целесообразно использовать неявные методы.

В указанном смысле широкий класс задач движения гетерогенных сред описывается жесткими уравнениями в частных производных, например в случаях, когда характерные времена выравнивания скоростей и температур фаз много меньше времени распространения возмущения на расстояние, равное характерному размеру сетки. Применение дискретных моделей с явной аппроксимацией пространственных производных и неявным учетом источниковых слагаемых [5–7] позволяет повысить запас устойчивости в несколько раз, а для некоторых классов течений — на порядок и более, что подтверждается многочисленными расчетами для различных течений смесей газа и твердых частиц. Важным свойством таких дискретных моделей является К-устойчивость (условия устойчивости схемы в широком диапазоне исходных данных определяются только критерием Куранта и не зависят от интенсивности межфазных взаимодействий). Это свойство особенно важно при решении многомерных задач, когда заранее неизвестно место в расчетной области, где решение становится неустойчивым. Например при расчете по схеме, не являющейся К-устойчивой, через несколько тысяч шагов по времени возможно проявление неустойчивости из-за резкого возрастания интенсивности межфазного обмена, что приводит к необходимости повторного расчета с меньшим шагом по времени.

Проблема жесткости возникает и при численном моделировании волновых течений смеси газа и капель с учетом фазовых переходов, особенно при использовании трехтемпературной схемы межфазного тепло- и массообмена [1], когда поле температур в окрестности капли характеризуется значениями температуры газа T_1, капли T_2 и межфазной границы T_Σ. Потоки тепла в единице объема смеси от поверхности капель в газ и жидкость задаются выражением

$$Q_{\Sigma i} = 1{,}5(\alpha_2/r^2)\mathrm{Nu}_i\lambda_i(T_\Sigma - T_i), \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

Здесь α_i — объемные доли фаз; r — радиус капель; λ_i, Nu_i — коэффициент теплопроводности i-й фазы и число Нуссельта ($\mathrm{Nu}_2 = 10$ [1], значение Nu_1 определяется в эксперименте [9]). Интенсивность массообмена в единице объема J_{12} определяется из соотношения

$$J_{12} l(p_v) = Q_{\Sigma 1} + Q_{\Sigma 2}, \tag{2}$$

где $l(p_v)$ — теплота парообразования; p_v — парциальное давление пара.

Механизм возникновения неустойчивости при расчете в рамках трехтемпературной схемы можно объяснить следующим образом. Пусть на некотором шаге по времени τ происходит испарение капель ($J_{12} < 0$), что приводит к росту плотности пара ρ_{1v} и повышению парциального давления p_v. В предположении равновесия фаз на межфазной границе $T_\Sigma = T_s(p_v)$ средняя температура на ней также увеличивается. Следовательно, если величина τ не является малой, то в соответствии с (1) и (2) процесс испарения сменяется процессом конденсации, и в дальнейшем амплитуды колебаний параметров становятся неограниченными.

В настоящей работе на основе концепции жесткости предпринята попытка построения К-устойчивой безытерационной дискретной модели волнового движения смеси газа с каплями с учетом различия скоростей фаз в рамках трехтемпературной схемы тепло- и массообмена.

Основные уравнения. Рассмотрим двухфазную дисперсную смесь капель с несущей двухкомпонентной фазой (инертным газом и паром). Примем известные в механике бесстолкновительной монодисперсной смеси допущения [1]: размеры капель во много раз больше молекулярно-кинетических размеров и во много раз меньше расстояний, на которых осредненные параметры смеси меняются существенно; смесь монодисперсная; хаотическим и внутренним движением (вращением и деформацией) дисперсных частиц можно пренебречь; процессы столкновений, дробления, слипания и образования новых капель отсутствуют; вязкость и теплопроводность фаз проявляются лишь в процессах межфазного взаимодействия; конденсированная фаза недеформированная; компоненты несущей фазы (инертный газ и пар) не вступают в химические реакции между собой и удовлетворяют условиям аддитивности; действием сил тяжести пренебрегается. С учетом принятых допущений и инерционных эффектов при обтекании капель система уравнений сохранения массы, импульса и энергии фаз и смеси примет вид

$$\frac{\partial \rho_{1g}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{1g}\boldsymbol{v}_1) = 0, \qquad \frac{\partial \rho_{1v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{1v}\boldsymbol{v}_1) = -J_{12},$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2\boldsymbol{v}_2) = J_{12}, \qquad \frac{\partial \rho_2 r}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 r\boldsymbol{v}_2) = \frac{4}{3}\, rJ_{12},$$

$$\frac{\partial \rho_1\boldsymbol{v}_1}{\partial t} + \nabla(\rho_1\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1) = -\beta_1\nabla p + J_{12}\Big(\beta_1\boldsymbol{w}_{12} - \beta_2\,\frac{\alpha_2}{2}\,\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\boldsymbol{w}_{12} - \boldsymbol{v}_1\Big) - \alpha_1\beta_2\boldsymbol{F}_\mu,$$

$$\frac{\partial \rho_2\boldsymbol{v}_2}{\partial t} + \nabla(\rho_2\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2) = -(1-\beta_1)\nabla p + J_{12}\Big((1-\beta_1)\boldsymbol{w}_{12} + \beta_2\,\frac{\alpha_2}{2}\,\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\boldsymbol{w}_{12} + \boldsymbol{v}_2\Big) + \alpha_1\beta_2\boldsymbol{F}_\mu, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 u_2\boldsymbol{v}_2) = Q_{\Sigma 2} + J_{12}u_{2\Sigma},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2) + \nabla \cdot (\rho_1 E_1\boldsymbol{v}_1 + \rho_2 E_2\boldsymbol{v}_2) + \nabla \cdot (p(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2)) = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1(2 + \chi_m\rho_1^0/\rho_2^0)}{2 + \chi_m(\alpha_2 + \alpha_1\rho_1^0/\rho_2^0)}, \qquad \beta_2 = \frac{2}{2 + \chi_m(\alpha_2 + \alpha_1\rho_1^0/\rho_2^0)}.$$

Здесь индексы g, v соответствуют параметрам инертного и парового компонентов газа, индекс Σ — параметрам поверхностной фазы (Σ-фазы); E_i, u_i — удельные полная и внутренняя энергии i-й фазы, p — давление; $\boldsymbol{F}_\mu$ — интенсивность вязкого силового межфазного взаимодействия; χ_m — коэффициент, учитывающий влияние неодиночности и несферичности капель на силу присоединенных масс.

Сила вязкого трения, действующая со стороны газа на конденсированную фазу в единице объема, задается в виде [1]

$$\boldsymbol{F}_\mu = 0{,}75\,\frac{\alpha_2}{r}\,C_\mu\,\frac{\rho_1^0 w_{12}}{2}\,\frac{\boldsymbol{w}_{12}}{w_{12}}, \quad C_\mu = C_\mu(\mathrm{Re}_{12}, \alpha_2), \quad \mathrm{Re}_{12} = \frac{2r\rho_1^0 w_{12}}{\mu_1}, \quad \boldsymbol{w}_{12} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2,$$

где Re_{12} — число Рейнольдса относительного движения фаз, C_μ — коэффициент трения, определяемый эмпирически [10, 11].

Система уравнений сохранения (3) замыкается уравнениями состояния калорически совершенных газовых компонентов

$$p_g = \rho_{1g}^0 R_{1g} T_1, \qquad p_v = \rho_{1v}^0 R_{1v} T_1, \qquad p = p_g + p_v,$$

$$\rho_1^0 = \rho_{1g}^0 + \rho_{1v}^0, \qquad k_{1g} = \rho_{1g}^0/\rho_1^0, \qquad k_{1v} = \rho_{1v}^0/\rho_1^0 \quad (k_{1g} + k_{1v} = 1), \quad (4)$$

$$u_1 = k_{1g}u_{1g} + k_{1v}u_{1v}, \quad \lambda_1 = \lambda_1(k_{1g}, T_1), \quad i_g = c_g(T_1 - T^*) + i_g^*, \quad i_v = c_v(T_1 - T^*) + i_v^*.$$

Здесь p_g, R_{1g}, R_{1v} — парциальное давление инертного газа и постоянные газовых компонентов; ρ_{1g}^0, ρ_{1v}^0, k_{1g}, k_{1v}, u_{1g}, u_{1v} — истинные плотности, массовые доли и внутренние энергии единицы массы компонентов; c_g, c_v — теплоемкости инертного газа и пара при постоянном давлении; индекс "$*$" соответствует фиксированным параметрам; i_g — энтальпия газового компонента. Энтальпия парового компонента i_v связана с энтальпией конденсированной фазы i_l условием нормировки

$$i_v^* - i_l^* = l(p_v^*) + (c_l - c_v)(T_s(p_v^*) - T^*),$$

где c_l — теплоемкость жидкости.

Дискретная модель. При построении дискретной модели используем расщепление по физическим процессам [12], при котором все межфазные взаимодействия рассчитываются на первом этапе. Как показывает предварительный анализ, для "быстрых" компонентов решения необходим неявный учет источниковых слагаемых. В соответствии с (3) локальное изменение плотности пара определяется интенсивностью фазового перехода в единице объема

$$(\tilde\rho_{1v} - \rho_{1v}^k)/\tau = -\tilde J_{12} \tag{5}$$

(k — номер шага по времени; знак "$\sim$" соответствует величинам, рассчитанным на первом этапе). Уравнение (5) с учетом соотношений для тепло- и массообмена (1), (2) может быть записано в виде

$$\frac{\tilde\rho_{1v} - \rho_{1v}^k}{\tau} = -\frac{(\alpha_{s1}^k + \alpha_{s2}^k)}{l(p_v^k)}\,\tilde T_S + \frac{\alpha_{s1}^k}{l(p_v^k)}\,T_1^k + \frac{\alpha_{s2}^k}{l(p_v^k)}\,T_2^k, \qquad \alpha_{si} = 1{,}5\,\frac{\alpha_2}{r^2}\,\mathrm{Nu}_i\lambda_i, \tag{6}$$

где α_{si} — коэффициенты теплообмена между Σ-фазой и i-й фазой в единице объема.

Для безытерационного вычисления плотности пара в (6) можно линеаризовать функцию $T_s(p_v)$, как это сделано в [6] для межфазного трения:

$$\tilde T_s = T_s^k + \Big(\frac{\partial T_s}{\partial p_v}\Big)^k (\tilde p_v - p_v^k). \tag{7}$$

Температура на линии насыщения обычно представляется в виде полинома $T_s^k = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j (p_v^k)^j$, тогда $\tilde T_s = c_0' + \tilde p_v \sum\limits_{j=1}^{n} c_j' (p_v^k)^{j-1}$, $c_0' = c_0 - \sum\limits_{j=1}^{n} (j-1) c_j (p_v^k)^j$, $c_j' = j c_j$.

Наконец, с учетом уравнения состояния парового компонента (4) соотношение для определения предварительного значения плотности пара (6) записывается в виде

$$\tilde\rho_{1v} = \Big(\rho_{1v}^k - \tau\,\frac{\alpha_{s1}^k + \alpha_{s2}^k}{l(p_v^k)}\,c_0' + \tau\Big(\frac{\alpha_{s1}^k}{l(p_v^k)}\,T_1^k + \frac{\alpha_{s2}^k}{l(p_v^k)}\,T_2^k\Big)\Big)\Big/\Big(1 + \tau\,\frac{\alpha_{s1}^k + \alpha_{s2}^k}{l(p_v^k)}\,\frac{R_v T_1^k}{\alpha_1^k}\sum_{j=1}^{n} c_j'(p_v^k)^{j-1}\Big).$$

Применяя неявный метод расчета межфазных взаимодействий для других уравнений системы (3), на первом этапе расчета имеем

$$(\tilde\rho_{1v} - \rho_{1v}^k)/\tau = -\tilde J_{12}, \qquad (\tilde\rho_2 - \rho_2^k)/\tau = \tilde J_{12},$$

$$\frac{\tilde\rho_2 \tilde r - \rho_2^k r^k}{\tau} = \frac{4}{3}\,\tilde J_{12}\tilde r \quad \text{при} \quad \tilde J_{12} < 0, \qquad \frac{\tilde\rho_2 \tilde r - \rho_2^k r^k}{\tau} = \frac{4}{3}\,\tilde J_{12} r^k \quad \text{при} \quad \tilde J_{12} > 0,$$

$$\frac{\tilde\rho_1 \tilde{\boldsymbol v}_1 - \rho_1^k \boldsymbol v_1^k}{\tau} = -\beta_1^k \nabla p^k + J_{12}^k\Big(\beta_1^k \boldsymbol w_{12}^k - \beta_2^k\,\frac{\alpha_2^k}{2}\,\frac{\rho_1^k}{\rho_2^k}\,\boldsymbol w_{12}^k - \boldsymbol v_1^k\Big) - \alpha_1^k \beta_2^k \tilde{\boldsymbol F}_\mu(\tilde{\boldsymbol v}_1 - \boldsymbol v_2^k), \tag{8}$$

$$\frac{\tilde\rho_2 \tilde{\boldsymbol v}_2 - \rho_2^k \boldsymbol v_2^k}{\tau} = -(1-\beta_1^k)\nabla p^k + J_{12}^k\Big((1-\beta_1^k)\boldsymbol w_{12}^k + \beta_2^k\,\frac{\alpha_2^k}{2}\,\frac{\rho_1^k}{\rho_2^k}\,\boldsymbol w_{12}^k + \boldsymbol v_2^k\Big) + \alpha_1^k \beta_2^k \tilde{\boldsymbol F}_\mu(\tilde{\boldsymbol v}_1 - \boldsymbol v_2^k),$$

$$(\tilde\rho_2 \tilde u_2 - \rho_2^k u_2^k)/\tau = \tilde Q_{\Sigma 2}(\tilde T_s - \tilde T_2) + \tilde J_{12} u_{2\Sigma}^k, \qquad \tilde E_2 = \tilde u_2 + (\tilde{\boldsymbol v}_2)^2/2,$$

$$\frac{(\tilde\rho_1 \tilde E_1 + 0{,}5\tilde\rho_2 \tilde{\boldsymbol v}_2) - (\rho_1^k E_1^k + 0{,}5\rho_2^k \boldsymbol v_2^k)}{\tau} = \tilde Q_{\Sigma 1}(\tilde T_s - \tilde T_1) - \tilde J_{12}(l(p_v^k) + u_{2\Sigma}^k) - \nabla\cdot(p^k(\alpha_1^k \boldsymbol v_1^k + \alpha_2^k \boldsymbol v_2^k)),$$

$$\tilde T_2 = (\tilde u_2 - u_2^*)/c_2 + T^*, \qquad \tilde T_1 = (\tilde E_1 - \tilde{\boldsymbol v}_1^2/2 - k_{1v}u_{1v}^* - k_{1g}u_{1g}^*)/c_{1v} + T_1^*,$$

где c_{1v} — теплоемкость двухкомпонентного газа при постоянном объеме.

На втором этапе находятся окончательные значения искомых параметров с учетом потоков масс, импульсов и энергий фаз через границы ячеек (стандартным образом), принимая во внимание их направления [12]:

$$
\begin{gathered}
(\rho_{1g}^{k+1}-\rho_{1g}^{k})/\tau+\nabla\cdot(\rho_{1g}^{k}\tilde{\boldsymbol{v}}_1)=0, \qquad (\rho_{1v}^{k+1}-\tilde{\rho}_{1v})/\tau+\nabla\cdot(\tilde{\rho}_{1g}\tilde{\boldsymbol{v}}_1)=0,\\
(\rho_2^{k+1}-\tilde{\rho}_2)/\tau+\nabla\cdot(\tilde{\rho}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_2)=0, \qquad (\rho_2^{k+1}r^{k+1}-\tilde{\rho}_2\tilde{r})/\tau+\nabla\cdot(\tilde{\rho}_2\tilde{r}\tilde{\boldsymbol{v}}_2)=0,\\
(\rho_1^{k+1}\boldsymbol{v}_1^{k+1}-\tilde{\rho}_1\tilde{\boldsymbol{v}}_1)/\tau+\nabla(\tilde{\rho}_1\tilde{\boldsymbol{v}}_1\tilde{\boldsymbol{v}}_1)=0, \qquad (\rho_2^{k+1}\boldsymbol{v}_2^{k+1}-\tilde{\rho}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_2)/\tau+\nabla(\tilde{\rho}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_2)=0, \qquad (9)\\
(\rho_2^{k+1}u_2^{k+1}-\tilde{\rho}_2\tilde{u}_2)/\tau+\nabla\cdot(\tilde{\rho}_2\tilde{u}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_2)=0,\\
(\rho_1^{k+1}E_1^{k+1}+\rho_2^{k+1}E_2^{k+1}-(\tilde{\rho}_1\tilde{E}_1+\tilde{\rho}_2\tilde{E}_2))/\tau+\nabla\cdot(\tilde{\rho}_1\tilde{E}_1\tilde{\boldsymbol{v}}_1+\tilde{\rho}_2\tilde{E}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_2)=0.
\end{gathered}
$$

Тестовые расчеты. Предложенная схема тестировалась на решении одномерной задачи взаимодействия ударной волны прямоугольного профиля с ограниченным слоем смеси воздуха и капель воды, находящейся в начальный момент в условиях фазового равновесия.

Исходные данные следующие: число Маха падающей волны $1 \leqslant \mathrm{M}_0 \leqslant 4$, начальная объемная доля капель воды в слое $\alpha_{20} \leqslant 0{,}1$, начальный радиус капель $r_0 \geqslant 10$ мкм, $T_{10} = T_{20} = T_{s0} = 293$ К, $p_0 = 10^5$ Па. Свойства воды и водяного пара взяты из таблиц в [13] и аппроксимированы полиномами пятой степени.

Расчеты выполнены по сквозной схеме, при этом в случае $\rho_2 < 10^{-6}$ кг/м^3, $r < 10^{-9}$ м для уменьшения объема вычислений из алгоритма исключались расчеты межфазных взаимодействий, не оказывающих существенного влияния на точность решения. Равномерная сетка содержала 200 ячеек с размерами $h \leqslant 0{,}01$ м. В ячейках 81–120 размещался слой газовзвеси с параметрами, указанными выше. На левой границе заданы краевые условия в виде параметров падающей ударной волны, на правой — "мягкие" граничные условия (экстраполяция параметров изнутри расчетной области). Шаг по времени выбирался из условия

$$\tau = \mathrm{Ku}\, h/\max_{\forall j}|v_{1,j}+a_{1,j}|, \qquad \mathrm{Ku} \leqslant 1, \tag{10}$$

где Ku — число Куранта; a_1 — скорость звука в газе; j — номер ячейки.

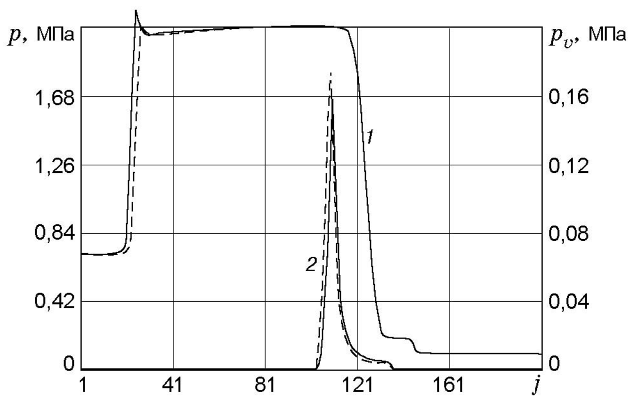

Рис. 1

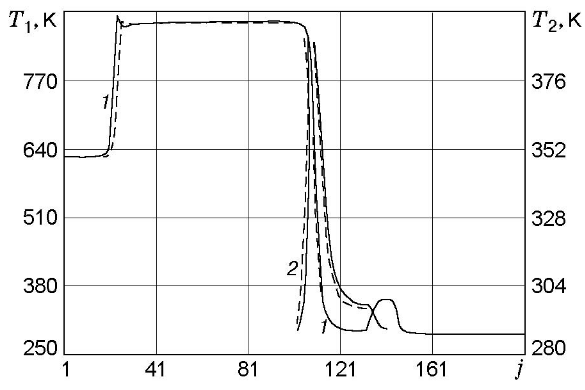

Рис. 2

Рис. 1. Профили давления газа (*1*) и парциального давления пара (*2*):
сплошные кривые — расчет по схеме (8), (9); штриховые — расчет по схеме [3]

Рис. 2. Профили температуры газа (*1*) и капель (*2*):
сплошные кривые — расчет по схеме (8), (9); штриховые — расчет по схеме [3]

Как показали тестовые расчеты, в исследованном диапазоне предложенная дискретная модель (8), (9) является K-устойчивой. Запас устойчивости определяется только критерием Куранта (10) и не зависит от интенсивности межфазных взаимодействий. Число Куранта, при котором расчет устойчив в рамках безытерационной дискретной модели (8), (9), на порядок выше, чем число Куранта в схеме расчета с учетом межфазного обмена в явном виде [3]. Например, при $\mathrm{M}_0 = 2{,}5$, $\alpha_{20} = 0{,}1$, $r_0 = 10$ мкм, $h = 0{,}01$ м схема [3] неустойчива в диапазоне $0{,}07 \leqslant \mathrm{Ku}_2 \leqslant 1$. Как показывает анализ расчетов, неустойчивость связана с сильными колебаниями температуры межфазной поверхности T_s на фронте прошедшей в слой ударной волны и приводит к неограниченному возрастанию решения. При $\mathrm{Ku}_2 \leqslant 0{,}07$ решение возможно с ограниченными осцилляциями большого размаха, которые практически исчезают при $\mathrm{Ku}_2 \simeq 0{,}02$. Предложенная дискретная модель (8), (9) обеспечивает устойчивый расчет при $\mathrm{Ku}_1 = 1$.

На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов по схеме (8), (9) и явной схеме [3] при $\mathrm{Ku}_1 = 1$, $\mathrm{Ku}_2 = 0{,}02$, $t = 0{,}004$ с. Уменьшение шага по времени, определяемого числом Куранта $\mathrm{Ku}_1 \leqslant 0{,}2$, приводит к тому, что оба решения практически совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
2. **Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.** Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях М.: ВИНИТИ, 1981. С. 209-287. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа; Т. 16).
3. **Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.** Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных волновых процессов в многофазных дисперсных средах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17, № 6. С. 1531–1544.
4. **Ивандаев А. И., Кутушев А. Г.** Численное моделирование нестационарных волновых течений газовзвесей с выделением границ двухфазных областей и контактных разрывов в несущем газе // Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14, № 6. С. 58–82.
5. **Садин Д. В.** Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных течений газа в пористой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 10. С. 158–164.
6. **Садин Д. В.** Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 6. С. 1033–1039.
7. **Садин Д. В.** О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 9. С. 1572–1577.
8. **Curtiss C. F., Hirschfelder J. O.** Integration of stiff equation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1952. V. 38. P. 235–243.
9. **Чудновский А. Ф.** Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
10. **Стернин Л. Е., Маслов Б. П., Шрайбер А. А., Подвысоцкий А. М.** Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980.
11. **Ergun S.** Fluid flow through packed columns // Chem. Engng Progress. 1952. V. 48, N 2. P. 89–94.
12. **Белоцерковский О. М.** Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физ.-мат. лит., 1994.
13. **Кириллов П. Л., Юрьев Ю. С., Бобков В. П.** Справочник по теплогидравлическим расчетам (ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы). М.: Энергоатомиздат, 1990.

Поступила в редакцию 28/V 2001 г.,
в окончательном варианте — 23/VIII 2001 г.