

УДК 533

СТАЦИОНАРНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ВИХРЬ В ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Н. Байкин*, С. В. Головин**

* Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

** Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: alexey.baykin@gmail.com, golovin@hydro.nsc.ru

В предположении, что жидкость является вязкой с конечной электрической проводимостью, магнитное поле имеет только осевую и азимутальную компоненты в цилиндрической системе координат, построено точное решение уравнений магнитогидродинамики, описывающее стационарное вихревое течение внутри покоящегося цилиндра, на оси которого находится проводник с текущим по нему заданным током. Установлено, что действие силы Лоренца компенсируется изменением давления. Течение жидкости происходит от периферии к оси цилиндра под действием разности давлений, при этом поток разворачивается и завихряется. Течение жидкости вызывает сгущение магнитных линий вблизи оси цилиндра, обеспечивая экспоненциальное убывание напряженности магнитного поля по мере удаления от оси. Данное течение может рассматриваться как модель локального увеличения напряженности магнитного поля за счет переноса его силовых линий течением электропроводной жидкости.

Ключевые слова: цилиндрический вихрь, электропроводная жидкость, магнитная гидродинамика, точные решения.

1. Основные уравнения. В приближении магнитной гидродинамики (МГД) рассматривается осесимметричное течение электропроводной несжимаемой жидкости внутри бесконечного цилиндра. В предположении о стационарности течения эти уравнения имеют вид [1]

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\mu \rho} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости течения жидкости; ν — кинематическая вязкость; p — давление; ρ — плотность жидкости; \mathbf{B} — напряженность магнитного поля; $\lambda = 1/(\mu\sigma)$ — магнитная вязкость; μ — магнитная проницаемость; σ — электрическая проводимость.

Уравнения (1) запишем в цилиндрической системе координат (r, φ, z) при следующих предположениях:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-0026-а), Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-6706.2012.1) и молодых российских ученых (грант № МД-168.2011.1), а также в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 30.

— движение жидкости и магнитное поле осесимметричны (все входящие в уравнения величины не зависят от угла φ);

— радиальная составляющая магнитного поля B^r равна нулю.

Используя обозначения $\mathbf{u} = (u^r, u^\varphi, u^z)$ для компонент вектора скорости и $\mathbf{B} = (B^r, B^\varphi, B^z)$ для компонент магнитного поля, получаем

$$\begin{aligned} u^r \frac{\partial u^r}{\partial r} + u^z \frac{\partial u^r}{\partial z} - \frac{(u^\varphi)^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru^r) \right) + \frac{\partial^2 u^r}{\partial z^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\mu\rho} \left(\frac{(B^\varphi)^2}{r} + B^\varphi \frac{\partial B^\varphi}{\partial r} + B^z \frac{\partial B^z}{\partial r} \right), \\ u^r \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} + u^z \frac{\partial u^\varphi}{\partial z} + \frac{u^\varphi u^r}{r} &= \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru^\varphi) \right) + \frac{\partial^2 u^\varphi}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\mu\rho} B^z \frac{\partial B^\varphi}{\partial z}, \\ u^r \frac{\partial u^z}{\partial r} + u^z \frac{\partial u^z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u^z}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu\rho} B^\varphi \frac{\partial B^\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial B^z}{\partial z} &= 0, \quad \lambda \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB^r) \right) + \frac{\partial^2 B^r}{\partial z^2} \right) = 0, \\ B^z \frac{\partial u^\varphi}{\partial z} + \frac{B^\varphi u^r}{r} - u^r \frac{\partial B^\varphi}{\partial r} - u^z \frac{\partial B^\varphi}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB^\varphi) \right) + \frac{\partial^2 B^\varphi}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ B^z \frac{\partial u^z}{\partial z} - u^r \frac{\partial B^z}{\partial r} - u^z \frac{\partial B^z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B^z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 B^z}{\partial z^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнений (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u^r &= \frac{\nu}{r} U(x), \quad u^\varphi = \frac{\nu z}{Rr} \sqrt{2} V(x), \quad u^z = -\frac{2\nu z}{R^2} U'(x), \\ p &= p_0 + \frac{2\nu^2}{R^2} \rho \left(Q(x) - 2 \frac{z^2}{R^2} G(x) - \frac{z^4}{R^4} H(x) \right), \\ B^r &= 0, \quad B^\varphi = \sqrt{\mu\rho} \frac{2\nu}{R} \left(X(x) + \frac{z^2}{R^2} E(x) \right), \quad B^z = \sqrt{2\mu\rho} \frac{2\nu}{R} \Psi(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где прописными буквами обозначены новые искомые функции, зависящие от переменной $x = r^2/R^2$; R — характерный масштаб длины; штрих обозначает производную функции по ее аргументу. Подставляя представление решения (3) в уравнения (2) и расщепляя их по свободной переменной z , получаем соотношения

$$2xU'U - U^2 - 4x^2U'' = -4x^2(Q' + 2XX' + 4\Psi\Psi') - 4xX^2; \quad (4)$$

$$-V^2 = 4x^2G' - 4x(xXE)'; \quad (5)$$

$$xH' - E^2 - 2xEE' = 0; \quad (6)$$

$$UV' - U'V - 2xV'' = 4\sqrt{x}\Psi E; \quad (7)$$

$$(U')^2 - UU'' + 2(xU'')' - 2G + 2EX = 0; \quad (8)$$

$$H = E^2; \quad (9)$$

$$\nu(2\sqrt{x}\Psi V + UX - 2xUX') + \lambda(4xX' - X + 4x^2X'' + 2xE) = 0; \quad (10)$$

$$\nu(EU + 4xU'E - 2xUE') + \lambda(4xE' - E + 4x^2E'') = 0; \quad (11)$$

$$-\nu(\Psi U' + U\Psi') + \lambda(2\Psi' + 2x\Psi'') = 0. \quad (12)$$

Из (6), (9) следует $E = H \equiv 0$. При этом уравнения (6), (9), (11) выполняются тождественно. Уравнение (12) можно проинтегрировать один раз. В результате уравнения для функций U, V, G образуют независимую подсистему

$$(U')^2 - UU'' + 2(xU'')' - 2G = 0; \quad (13)$$

$$UV' - U'V - 2xV'' = 0; \quad (14)$$

$$-V^2 = 4x^2G', \quad (15)$$

проинтегрировав которую можно определить функции X и Ψ :

$$\nu(2\sqrt{x}\Psi V + UX - 2xUX') + \lambda(4xX' - X + 4x^2X'') = 0; \quad (16)$$

$$2\lambda x\Psi' = \nu U\Psi - \gamma. \quad (17)$$

Наконец, функция Q находится путем интегрирования соотношения

$$2xU'U - U^2 - 4x^2U'' = -4x^2(Q' + 2XX' + 4\Psi\Psi') - 4xX^2. \quad (18)$$

Заметим, что подсистема (13)–(15) совпадает с системой для уравнений Навье — Стокса в случае отсутствия магнитного поля (см. (3)–(5) в [2], а также [3]). Магнитное поле оказывает влияние только на функцию Q , определяющую давление (18). Таким образом, кинематика рассматриваемых течений жидкости совпадает с рассмотренной в [2]. Действие силы Лоренца компенсируется изменением давления. Прежде чем будет построено явное решение уравнений (16), (17) и проведен анализ возможных магнитных полей при различных режимах течения жидкости, рассмотрим идеализированные уравнения МГД.

2. Случай нулевых вязкостей. Рассмотрим идеальные случаи, когда кинематическая ν и (или) магнитная λ вязкости равны нулю.

2.1. *Нулевая кинематическая вязкость.* При $\nu = 0$ представление решения (3) формально остается верным; величину ν в нем можно считать произвольной константой с размерностью L^2/T , где L, T — характерные масштабы длины и времени. Уравнения для искомых функций упрощаются: в уравнениях (14) и (18) нужно отбросить слагаемое, содержащее U'' и V'' , а в уравнении (13) — слагаемое $2(xU'')'$. Остальные уравнения сохраняются. После указанных изменений уравнение (13) (с учетом (15)) и уравнение (14) могут быть проинтегрированы и приведены к виду

$$V = \alpha U, \quad U'' + \left(\beta + \frac{\alpha^2}{2x}\right)U = 0. \quad (19)$$

Здесь α, β — произвольные постоянные интегрирования. Второе из уравнений (19) определяет функцию U и может быть проинтегрировано с использованием гипергеометрических функций в виде

$$U(x) = \frac{1}{2} e^{-x\sqrt{-\beta}} x \left(C_1 \mathcal{U} \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{-\beta}}, 2, 2x\sqrt{-\beta} \right) + C_2 {}_1\mathcal{F}_1 \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{-\beta}}, 2, 2x\sqrt{-\beta} \right) \right),$$

где ${}_1\mathcal{F}_1$ и \mathcal{U} — вырожденные гипергеометрические функции первого и второго рода соответственно. В работе [2] приведено точное решение уравнения (19), убывающее на бесконечности и выражающееся через элементарные функции. Это решение соответствует значениям параметра $\beta = -\alpha^4/16$ и имеет вид $U = Ax \exp(-\alpha^2 x/4)$.

2.2. *Нулевая магнитная вязкость.* В случае $\lambda = 0$ уравнения (13)–(15), (18) сохраняются, а уравнения (16), (17) упрощаются. Для функций X и Ψ имеем уравнения

$$2\sqrt{x}\Psi V + UX - 2xUX' = 0, \quad \nu U\Psi = \gamma.$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$\Psi = \frac{\gamma}{\nu U}, \quad X = \sqrt{x} \left(\delta + \int_{x_0}^x \frac{\gamma V(s)}{\nu x U(s)^2} ds \right). \quad (20)$$

Те же формулы для магнитного поля применимы в случае нулевой кинематической вязкости. При этом параметр ν играет ту же роль, что и в представлении решения (3).

Из формул (20) следует, что напряженность магнитного поля возрастает при уменьшении абсолютной величины радиальной компоненты скорости U и убывает при ее увеличении. Это явление объясняется вмороженностью магнитных линий в течение жидкости. Движущиеся с ненулевой радиальной скоростью частицы жидкости “уносят” магнитные линии, которые накапливаются в областях с замедленным радиальным потоком, что приводит к усилению магнитного поля.

3. Краевая задача. Будем считать, что течение проводящей жидкости происходит в промежутке между двумя коаксиальными покоящимися цилиндрами с радиусами r_0 и R . По внутреннему цилиндру в осевом направлении течет заданный ток J . На внешнем цилиндре ток равен нулю. В случае вязкой жидкости на стенках цилиндров выполнено условие прилипания

$$\mathbf{u}(r_0, t) = \mathbf{u}(R, t) = 0, \quad (21)$$

в случае идеальной жидкости — условие непротекания

$$u^r(r_0, t) = u^r(R, t) = 0. \quad (22)$$

Граничные условия на двух симметричных сечениях цилиндра $z = \pm Z$ имеют вид, определяемый представлением (3). Таким образом, течение внутри цилиндра задается решением уравнений (13)–(18).

Рассмотрим два варианта:

- 1) внутренний проводник с током имеет очень малый радиус: $r_0 \rightarrow 0$;
- 2) радиусы цилиндров соизмеримы.

3.1. *Течение внутри цилиндра при наличии проводника на оси.* В случае наличия на оси тонкого проводника выделим особенность магнитного поля при $r = 0$, генерируемую текущим током J :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{reg} + \frac{J\mu}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi, \quad X = X_{reg} + \frac{J}{4\pi\nu\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (23)$$

Для плотности тока имеем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B}_{reg} + J\delta(r)\mathbf{e}_z = \\ &= \frac{2\nu\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}R} \left(-\frac{2\sqrt{2}r}{R^2} \Psi' \right) \mathbf{e}_\varphi + \left[\frac{2\nu\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}R} \left(\frac{X_{reg}}{r} + \frac{2r}{R^2} X'_{reg} \right) + J\delta(r) \right] \mathbf{e}_z = \mathbf{j}_{reg} + J\delta(r)\mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (24)$$

где \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z — единичные орты осей цилиндрической системы координат; $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Рассмотрим уравнение (17). При условии конечности Ψ и Ψ' на оси $r = 0$ в силу условия прилипания (21) имеем $\gamma = 0$. Тогда условие равенства нулю азимутальной компоненты плотности тока на оси выполнено автоматически: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \Psi'(x) = 0$. Условие для

осевой компоненты тока выполняется в силу представления (24), если регулярная часть функции плотности тока удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} X_{reg}(x) = 0. \quad (25)$$

Наконец, граничные условия для тока на внешнем цилиндре имеют вид

$$\Psi'(1) = 0, \quad X_{reg}(1) + 2X'_{reg}(1) = 0. \quad (26)$$

3.2. *Течение между коаксиальными цилиндрами.* В случае течения между двумя коаксиальными цилиндрами во внутреннем цилиндре задан ток J . Тогда имеем условие

$$X(x_0) = \frac{J}{4\pi\nu\sqrt{x_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (27)$$

На внешнем цилиндре плотность тока должна быть равна нулю. Это требование эквивалентно условиям (26).

4. Интегрирование уравнений для магнитного поля. При $\gamma = 0$ уравнение (17) интегрируется в виде

$$\Psi(x) = A \exp\left(\frac{\nu}{2\lambda} \int_1^x \frac{U(s)}{s} ds\right) \quad (28)$$

с произвольной константой A .

Рассмотрим однородное уравнение (16). Это уравнение можно привести к виду

$$X'' + \left(\frac{1}{x} - \frac{g(x)}{x}\right)X' + \left(\frac{g(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right)X = 0, \quad (29)$$

где $g(x) = \nu U(x)/(2\lambda)$, $g(0) = 0$. Найдем асимптотики решения уравнения (29) при $x \rightarrow 0$. Следует отметить, что $X(x) = \sqrt{x}$ является решением. Уравнение (29) можно представить в виде

$$X'' + F(x)X' + G(x)X = 0,$$

где $F(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} A_n x^n$; $G(x) = \sum_{n=-2}^{\infty} B_n x^n$; $A_{-1} = 1$; $B_{-2} = -1/4$. Запишем соответствующее характеристическое уравнение [4]

$$\lambda^2 + (1 - 1)\lambda - 1/4 = 0,$$

имеющее корни $\lambda = \pm 1/2$. Следуя [4, 5], получаем представление для двух линейно независимых решений уравнения (16):

$$X_1(x) = \sqrt{x}, \quad X_2(x) = k\sqrt{x} \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1/2}.$$

Найдем решение уравнения (16) в явном виде, подтверждая тем самым справедливость указанной асимптотики.

Выполняя в уравнении (16) замену переменных

$$t = \ln x, \quad q(t) = e^{t/2} X(e^t),$$

получаем следующее уравнение для функции q :

$$q'' + \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(e^t)\right)q' = -\frac{\nu}{2\lambda} \Psi(e^t)V(e^t).$$

Данное уравнение интегрируется в виде

$$q(t) = C_1 \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(e^r)\right) dr\right) ds + AC_2 - \\ - \frac{\nu}{2\lambda} \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(e^r)\right) dr\right) \left[\int_0^s \Psi(e^r) V(e^r) \exp\left(\int_0^r \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(e^\omega)\right) d\omega\right) dr \right] ds$$

с произвольными константами C_1 и C_2 . Выполняя обратную замену, получаем

$$X(x) = C_1 \sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s} \exp\left(-\int_1^s \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(r)\right) dr\right) ds + AC_2 \sqrt{x} - \\ - \frac{\nu}{2\lambda} \sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s} \exp\left(-\int_1^s \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(r)\right) dr\right) \times \\ \times \left[\int_1^s \frac{\Psi(r) V(r)}{r} \exp\left(\int_1^r \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(\omega)\right) d\omega\right) dr \right] ds. \quad (30)$$

С учетом (28) преобразуем последнее слагаемое в (30):

$$\frac{\Psi(r) V(r)}{r} \exp\left(\int_1^r \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(\omega)\right) d\omega\right) = \\ = \frac{AV(r)}{r} \exp\left(\int_1^r \frac{\nu}{2\lambda} \frac{U(\omega)}{\omega} d\omega\right) \exp\left(\int_1^r \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{\nu}{2\lambda} U(\omega)\right) d\omega\right) = \\ = \frac{AV(r)}{r} \exp\left(\int_1^r \frac{1}{\omega} d\omega\right) = AV(r).$$

Отсюда находим

$$\frac{\nu}{2\lambda} \sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s^2} \exp\left(\int_1^s \frac{\nu}{2\lambda} \frac{U(r)}{r} dr\right) \left(\int_1^s AV(r) dr\right) ds = \frac{\nu}{2\lambda} \sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s^2} \Psi(s) \left(\int_1^s V(r) dr\right) ds.$$

Окончательно для функции $X(x)$ имеем представление

$$X(x) = C_1 \sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s^2} \Psi(s) ds + AC_2 \sqrt{x} - \frac{\nu}{2\lambda} \sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s^2} \Psi(s) \left(\int_1^s V(r) dr\right) ds. \quad (31)$$

Ниже изучается асимптотика полученного решения при $x \rightarrow 0$ и проверяются граничные условия (25), (27).

5. Исследование особенности магнитного поля на оси. При $x \rightarrow 0$ функции Ψ и V имеют конечный предел. При этом входящие в (31) интегралы являются расходящимися. Исследуем полученную при $x \rightarrow 0$ особенность.

Для компонент скорости U и V имеем следующие разложения:

$$U = u_1x + u_2x^2 + O(x^3), \quad V = v_0 + v_1x + v_2x^2 + O(x^3).$$

При ненулевой кинематической вязкости в силу условия прилипания (21) дополнительно выполнено условие $u_1 = v_0 = 0$. В любом случае величина $\Psi(0)$ конечна. Выделим особенность в интегралах, входящих в выражение (31):

$$\begin{aligned} C_1\sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s^2} \Psi(0) ds - \frac{\nu}{2\lambda}\sqrt{x} \int_1^x \frac{1}{s^2} \Psi(0) \left(\int_1^0 V(r) dr \right) ds = \\ = \Psi(0)\sqrt{x} \left(C_1 + \frac{\nu}{2\lambda} \int_0^1 V(r) dr \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

В силу представления (23) получаем

$$C_1 = -\frac{J}{4\pi\nu\Psi(0)}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} - \frac{\nu}{2\lambda} \int_0^1 V(r) dr. \quad (32)$$

Таким образом, регулярная часть функции X имеет представление

$$X_{reg} = k\sqrt{x} \ln x + \sqrt{x} f(x) \quad (33)$$

с аналитической в окрестности $x = 0$ функцией $f(x)$. Для коэффициента k имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned} k = C_1\Psi'(0) - \frac{\nu}{2\lambda} \left(\Psi(x) \int_1^x V(s) ds \right)' \Big|_{x=0} = \\ = C_1\Psi'(0) \frac{\nu}{2\lambda} u_1 - \frac{\nu}{2\lambda} \left(\Psi'(0) \frac{\nu}{2\lambda} u_1 \int_1^0 V(s) ds + \Psi(0)v_0 \right) = \\ = -\frac{J\nu}{16\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} u_1^2 - \frac{\nu}{2\lambda} \Psi(0)v_0. \end{aligned}$$

Выполнение условия (25) для регулярной части функции X , определенной формулой (32), проверяется непосредственно. Таким образом, выбор константы C_1 согласно (32) гарантирует выполнение представления (23), а также граничного условия (25) для тока при $x \rightarrow 0$. Проверим граничное условие (26).

Первое из условий (26) выполнено в силу условия непротекания на внешнем цилиндре

$$\Psi'(1) = \Psi(1) \frac{\nu}{2\lambda} U(1) = 0.$$

Из второго условия (26) следует ограничение на величину константы C_2 :

$$X(1) + 2X'(1) = AC_2 + 2(C_1\Psi(1) + AC_2/2) = 2AC_2 + 2AC_1 = 0.$$

Поэтому

$$C_2 = -C_1. \quad (34)$$

Выполнение условия (27) проверяется непосредственно. С учетом (34) имеем

$$C_1 = \left(\frac{J}{4\pi\nu x_0} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} + \frac{\nu}{2\lambda} \int_1^{x_0} \frac{1}{s^2} \Psi(s) \left(\int_1^s V(r) dr \right) ds \right) / \left(\int_1^{x_0} \frac{1}{s^2} \Psi(s) ds - A \right).$$

Оставшаяся свободной константа A является масштабирующим множителем в представлении для компонент магнитного поля (28), (31) и определяет относительный вклад сил инерции и магнитного давления в уравнении (18) для функции Q , задающей давление в жидкости.

6. Характерные картины течения. Ниже представлены графики функций, характеризующие кинематику течения, магнитное поле и плотность электрического тока при некоторых конкретных значениях параметров задачи. Графики для скоростей взяты из [2, 6]. В данной работе на этих графиках представлены только регулярные компоненты поля и тока. При необходимости можно добавить сингулярную часть этих компонент, обусловленную наличием проводника с током. Для безразмерных компонент плотности тока введем следующие обозначения:

$$j_{reg}^{z,*} = \frac{\sqrt{\mu} R^2}{2\sqrt{\rho\nu}} j_{reg}^z, \quad j^{\varphi,*} = \frac{\sqrt{\mu} R^2}{4\sqrt{2\rho\nu}} j^{\varphi}.$$

Значение параметра $\varepsilon = \nu/\lambda$ полагаем равным единице, а значение параметра A , характеризующего вклад магнитного поля в давление, считаем равным 0,05.

6.1. *Течение в цилиндре при наличии проводника на оси.* Рассматривается течение в области, ограниченной цилиндром радиусом R . На оси цилиндра расположен тонкий проводник с током. На боковой поверхности цилиндра ставится условие прилипания (21), а на оси — условие регулярности компонент скорости. Сначала жидкость течет от периферии к оси цилиндра по направлению к плоскости $\{z = 0\}$, затем в точке, где $U' = 0$, происходит ее разворот, после чего жидкость начинает удаляться от этой плоскости (рис. 1, *a*).

На рис. 2 представлены компоненты регулярной части функций, определяющих магнитное поле и плотность тока. Видно, что перенос силовых линий магнитного поля течением жидкости приводит к увеличению напряженности магнитного поля и тока вблизи

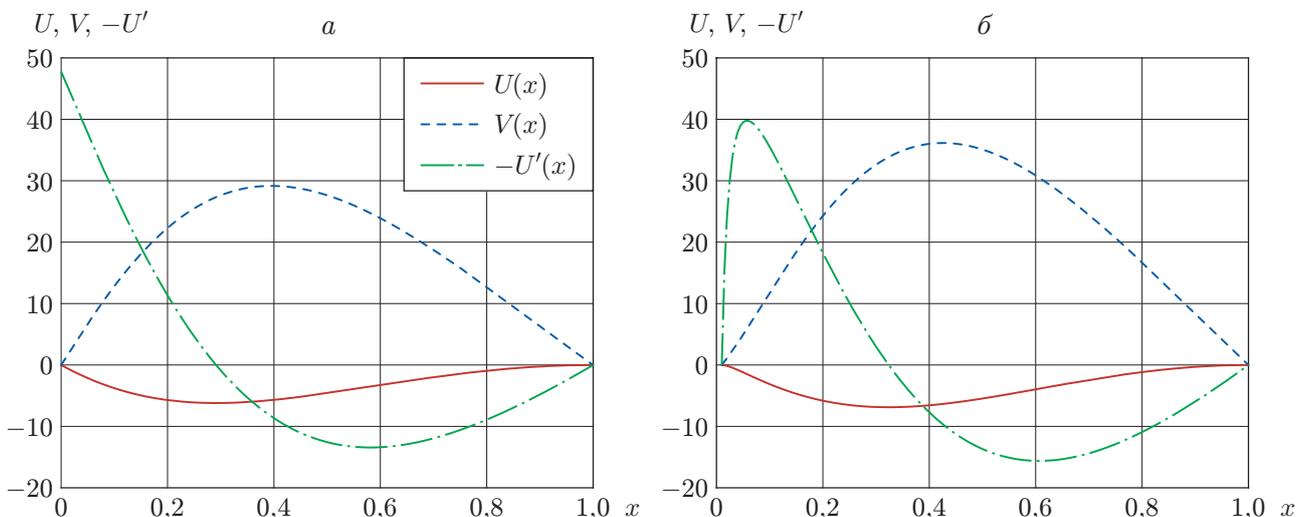


Рис. 1. Функции, характеризующие поле скорости:

- a* — в случае, когда вязкая жидкость течет в области, ограниченной одним цилиндром;
- б* — в случае, когда вязкая жидкость течет между двумя коаксиальными цилиндрами

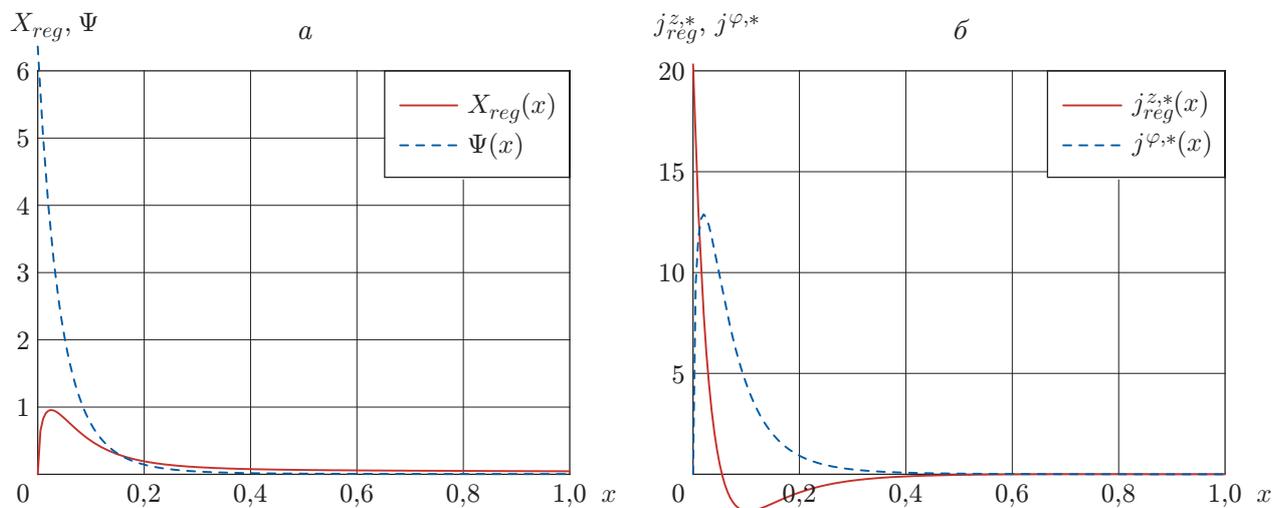


Рис. 2. Безразмерные компоненты регулярной части функций, определяющих магнитное поле (а) и плотность тока (б) в случае, когда вязкая жидкость течет в области, ограниченной одним цилиндром ($J = 0$)

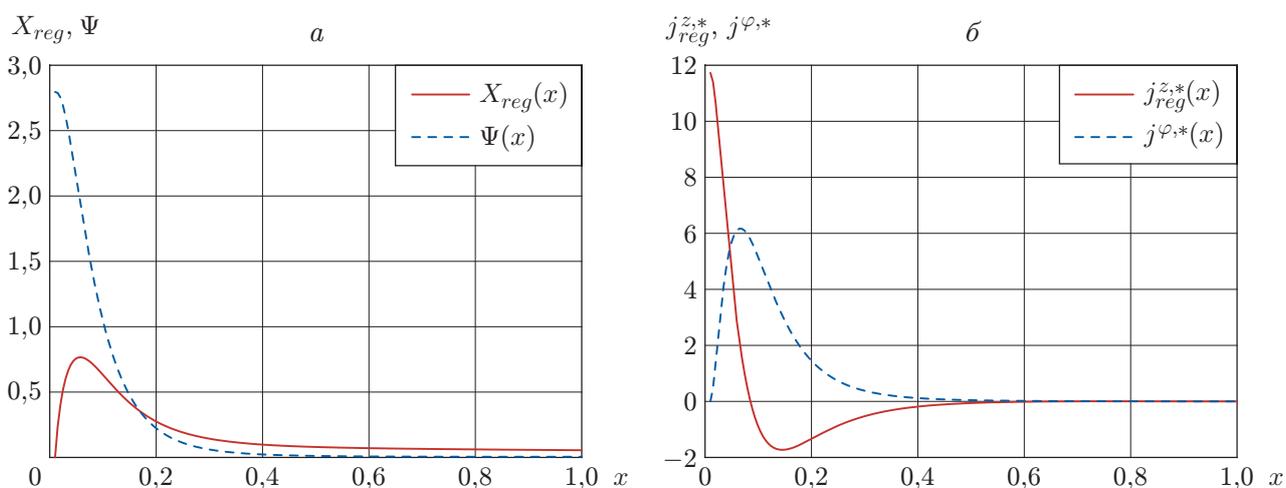


Рис. 3. Безразмерные компоненты регулярной части функций, определяющих магнитное поле (а) и плотность тока (б) в случае, когда вязкая жидкость течет между двумя коаксиальными цилиндрами ($J = 0$)

оси. При уменьшении магнитной вязкости интенсивность переноса магнитного поля жидкостью увеличивается.

6.2. *Течение между коаксиальными цилиндрами.* Рассмотрим случай, когда жидкость течет между двумя коаксиальными цилиндрами с соотношением радиусов $R_0/R = 0,1$. На внутреннем цилиндре задан ток J . Функции, характеризующие кинематику течения жидкости, показаны на рис. 1,б. Картина течения такая же, как и в рассмотренном выше случае. Напряженность магнитного поля и плотность тока увеличиваются вблизи внутреннего цилиндра. На рис. 3 представлена регулярная часть функции X в случае $J = 0$. В случае $J \neq 0$ характер кривых не меняется.

6.3. *Случай нулевой кинематической вязкости.* В случае нулевой кинематической вязкости имеем краевую задачу для функции U , следующую из (22), (19):

$$U'' + \left(\beta + \frac{\alpha^2}{2x}\right)U = 0, \quad U(x_0) = U(1) = 0. \quad (35)$$

Система (35) представляет собой задачу Штурма — Лиувилля для уравнения $(p(x)U')' + (q(x) + \lambda)U = 0$, где $p(x) = 1$; $q(x) = \alpha^2/x$. Константа β играет роль спектрального параметра λ . При $x_0 > 0$ справедлива следующая теорема [7].

Теорема. *Существует неограниченная последовательность вещественных чисел $\beta_0 < \beta_1 < \dots$, такая что:*

1) *задача (35) имеет нетривиальное решение в том и только том случае, если $\beta = \beta_n$ при некотором n ;*

2) *если $\beta = \beta_n$ и $U = U_n(x) \neq 0$ — решение задачи (35), то решение $U_n(x)$ единственно с точностью до постоянного множителя и $U_n(x)$ имеет n нулей при $x_0 < x < 1$ для $n = 0, 1, 2, \dots$;*

3) *если $n \neq m$, то*

$$\int_{x_0}^1 U_n(x)U_m(x) dx = 0.$$

Для решения, регулярного при $x = 0$, нетрудно получить представление в виде степенного ряда. Действительно, предположим, что функция U имеет следующее представление:

$$U = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (36)$$

Подставляя данное представление в уравнение (35) и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем рекуррентные соотношения

$$a_1 = -\frac{\alpha^2}{4} a_0, \quad a_2 = \left(\frac{\alpha^4}{8} - \beta\right) a_0, \quad a_{j+1} = -\frac{2\beta a_{j-1} + \alpha^2 a_j}{2(j+2)(j+1)}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Для отношения $q_j = a_{j+1}/a_j$ находим уравнение

$$q_j q_{j-1} = -\frac{2\beta + \alpha^2 q_{j-1}}{2(j+2)(j+1)}. \quad (37)$$

Полагая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} q_j = q$, из (37) получаем $q = 0$. Следовательно, ряд (36) сходится при любом x .

Из теоремы следует, что в случае нулевой кинематической вязкости при выборе подходящего спектрального параметра $\beta = \beta_n$ описываемое решением задачи (35) течение имеет n стационарных значений $x = x_1, \dots, x = x_n$, при которых радиальная скорость течения U обращается в нуль. В силу симметрии $U \rightarrow -U$ можно считать, что $U > 0$ при $x \in (x_0, x_1)$. Таким образом, цилиндры с радиусами $x = x_{2k}$, $k = 0, 1, \dots$ являются “отталкивающими”, а цилиндры с радиусами $x = x_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots$ — “притягивающими”. Жидкость движется в цилиндрическом слое вдоль “отталкивающего” цилиндра, приближаясь к плоскости $z = 0$. Затем жидкость разворачивается и удаляется от плоскости $z = 0$, приближаясь к “притягивающему” цилиндру. Количество слоев зависит от выбора спектрального параметра β и может быть произвольным. Константа α регулирует степень закрученности траекторий частиц вокруг оси Oz . Магнитное поле фокусируется

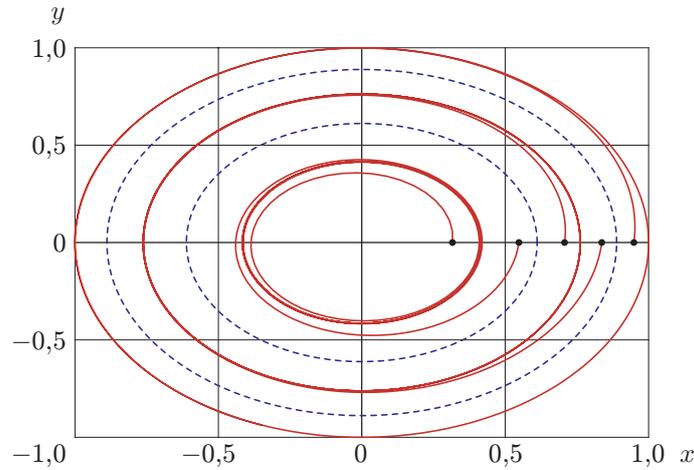


Рис. 4. Проекция линий тока на плоскость $z = 0$: точки — начала траекторий движения частиц; штриховые линии — проекции “отталкивающих” цилиндров

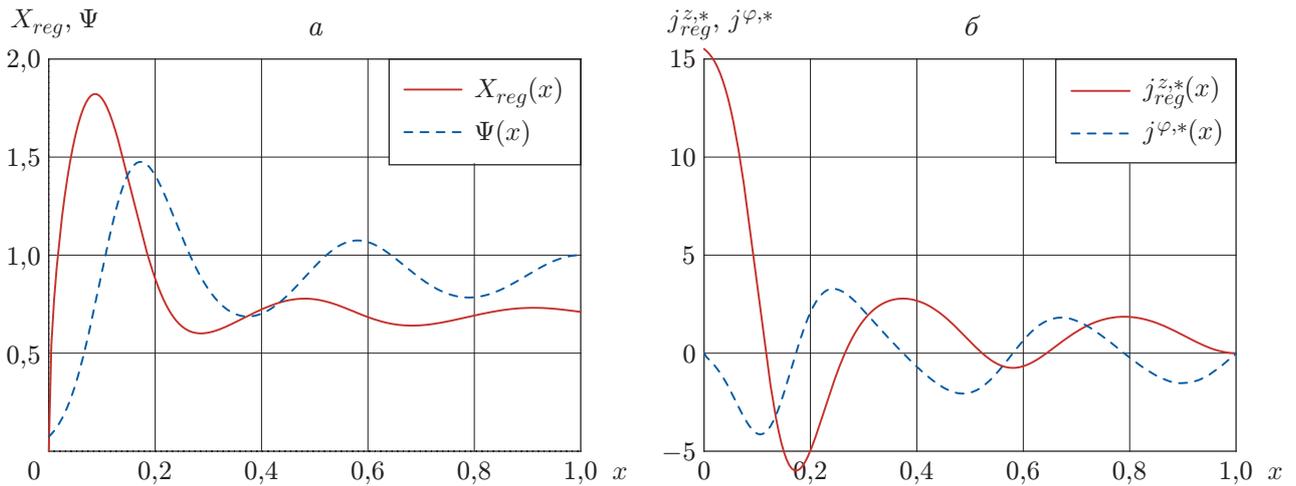


Рис. 5. Безразмерные компоненты регулярной части функций, определяющих магнитное поле (а) и плотность тока (б) (кинематическая вязкость равна нулю, $J = 0$, $\Psi(1) = 1$)

в окрестности “притягивающих” цилиндров тем сильнее, чем меньше магнитная вязкость сплошной среды.

На рис. 4 показаны проекции линий тока частиц на плоскость $z = 0$ в случае, когда функция U имеет четыре нуля внутри промежутка $(0, 1)$, а также проекции “отталкивающих” цилиндров. Проекция линий тока частиц характеризуют степень закрученности течения вокруг оси цилиндров.

На рис. 5 в соответствии с формулами (3) функции X_{reg} и Ψ пропорциональны азимутальной и осевой компонентам магнитного поля. Максимумы функций, характеризующих магнитное поле, соответствуют положению “притягивающих” цилиндров. На рис. 6 представлены компоненты скорости жидкости. Результаты сравнения рис. 5 и рис. 6 показывают, что экстремумы азимутальной и осевой компонент магнитного поля практически совпадают с экстремумами соответствующих компонент вектора скорости. При этом движение жидкости в направлении магнитного поля “вытягивает” магнитные линии и приводит к усилению магнитного поля.

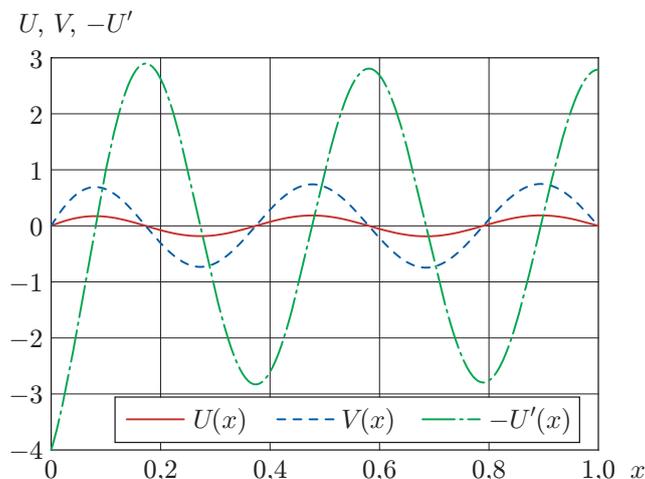


Рис. 6. Функции, характеризующие компоненты скорости в случае, когда жидкость течет в области $0 \leq x \leq 1$ (кинематическая вязкость равна нулю, $G(0) = 8$, $\beta = 214,102$)

Заключение. Построено точное решение уравнений магнитогидродинамики, описывающее стационарный цилиндрический вихрь внутри покоящегося полубесконечного цилиндра, на оси которого находится проводник с текущим по нему заданным током. Электрическая проводимость и вязкость жидкости конечны. Кинематика движения жидкости совпадает с кинематикой, полученной в работе [2]. Действие силы Лоренца компенсируется изменением давления.

Получены точные формулы для магнитного поля при заданной кинематике движения. Проанализирована асимптотика решения вблизи оси цилиндра. Описана кинематика течения жидкости в случае нулевой кинематической вязкости. Показано, что течение разбивается на цилиндрические слои. Отмечено, что перенос силовых линий магнитного поля течением жидкости приводит к увеличению напряженности магнитного поля. С увеличением электрической проводимости жидкости этот эффект усиливается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davidson P. A. An introduction to magnetohydrodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
2. Аристов С. Н. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. АН. 2001. Т. 377, № 4. С. 477–480.
3. Аристов С. Н., Князев Д. В. Стационарное течение вязкой жидкости вблизи продольно деформирующегося цилиндра // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 2. С. 102–110.
4. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеоретиздат, 1941.
5. Линейные уравнения второго порядка. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/ode/odelin2.pdf>.
6. Князев Д. С. Вращательно-симметричные течения вязкой жидкости с пространственным ускорением: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 2007.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.