

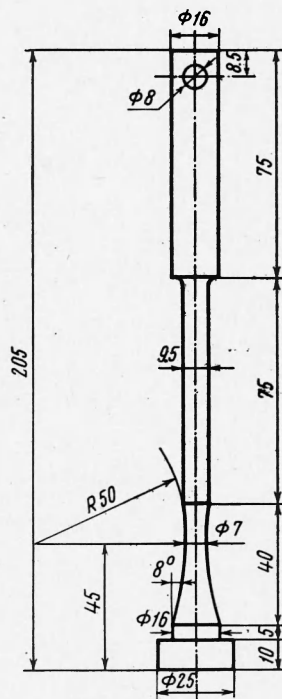
## О ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ НЕКОТОРЫХ МАТЕРИАЛОВ ОТ СКОРОСТИ НАГРУЖЕНИЯ

Ю. А. Беляев, А. Ф. Мельшанов, Ю. В. Суворова

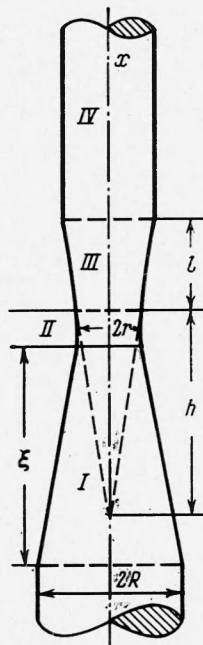
(Москва)

Исследовано изменение динамического предела текучести некоторых металлов и сплавов в зависимости от скорости нагружения при температурах  $+20$  и  $-196^\circ\text{C}$ . Эксперименты осуществлялись таким образом, чтобы скорость нагружения оставалась постоянной вплоть до появления пластических деформаций, т. е.  $\sigma(t) = \dot{\sigma}t$ , где  $\dot{\sigma} = \text{const}$ . Определены пределы текучести материалов и время до появления пластических деформаций по осциллограммам зависимости деформации и нагрузки в функции времени.

1. В лаборатории разработаны методики и аппаратура, позволяющие проводить динамические испытания на ударное растяжение со скоростями нагружения примерно  $2 \cdot 10^3$ ,  $1 \cdot 10^6$  и  $4 \cdot 10^7$  кг/мм<sup>2</sup>сек (соответствующие скорости деформации при этом  $1 \cdot 10^{-1}$ ,  $5 \cdot 10$ ,  $2 \cdot 10^3$  сек<sup>-1</sup>) [1,2]. Для создания скоростей деформации порядка  $10^{-1}$  сек<sup>-1</sup> использовалась специально сконструированная пневматическая установка, а для создания скоростей порядка  $5 \cdot 10$  сек<sup>-1</sup> — вертикальный копер, в котором падающий груз ударял по нижнему концу образца, закрепленного вертикально. Образцы, использованные в обоих этих случаях, были одинаковые и имели рабочую часть 12 мм, так что время прохождения волны по ней  $t = 2,4 \cdot 10^{-6}$  сек. Время до появления пластических деформаций на этих установках составляло примерно  $10^{-2}$ — $10^{-4}$  сек. За это время волны много раз пробежали по рабочей части образца и, следовательно, искажения волн, вызванные их отражением от границ рабочей части, успевали сгладиться.



Фиг. 1



Фиг. 2

Иная картина возникает при испытании с более высокими скоростями деформации порядка  $2 \cdot 10^3$  сек<sup>-1</sup>, полученными на пневматическом копере, устройство которого подробно описано в [2]. Здесь нагрузка осуществлялась грузом, ударяющим со скоростью 100 м/сек по сфере, помещенной на торец полого волновода, внутри которого закреплен образец. По волноводу нагрузка передавалась на нижний конец образца, верхний конец которого не был закреплен, а лишь подвешен на шпильке, так как разрушение образца происходило, прежде чем волна нагрузки успевала пройти по всей его длине.

На фиг. 1 приведены размеры и форма образца, а на фиг. 2 — его схематизация, принятая в дальнейших расчетах.

Подсчитано, что коэффициент концентрации напряжений, возникающий вследствие неравномерности поперечного сечения образца, невелик и составляет 1,05, следовательно, можно считать, что распределение напряжений по сечению будет равномерным.

Длина рабочей части *II* принимается равной 4 мм — ширине датчика деформации, который был приклеен в самом узком сечении между двумя коническими участками. Датчик напряжения находился в части *IV* образца, деформируемой лишь упруго. Подобная форма образца и расположение датчиков обусловлены тем, что надо было зафиксировать то место, где должна впервые появиться пластическая деформация.

При выборе формы рабочей части образца были учтены следующие соображения. Если скорость нагружения велика, фронт волны, проходящей через рабочую часть, крутой. Поэтому может оказаться, что пластическая деформация возникнет не в том сечении, где площадь минимальна, а ближе к головке. Элементарный расчет грубо прикидочного характера показывает, что для образца принятой формы скорость нагружения не должна превышать  $7 \cdot 10^7$  кг/мм<sup>2</sup>сек. Максимальная скорость нагружения, достигнутая в эксперименте, составила  $4 \cdot 10^7$  кг/мм<sup>2</sup>сек. Таким образом, необходимое условие выполняется с достаточным запасом, исключающим необходимость более точного анализа.

2. При постановке экспериментов необходимо обратить внимание не только на выбор правильной формы, размеров образца и условий нагружения, но также и на качество и достоверность проводимых измерений. Уже упоминалось о том, что датчик напряжения приклеен в части *IV* образца. При этом необходимо выяснить, как искажается волна нагружения при отражении ее в месте соединения конической *III* и цилиндрической *IV* частей стержня и как это искажение влияет на величину напряжения, измеряемую датчиком.

Для простоты исследования задачи рассмотрим лишь части стержня *III* и *IV*, причем будем считать, что цилиндрическая часть *IV* является полубесконечной и в этой части распространяются только прямые волны. Поместим начало координат в центре меньшего основания конической части *III*. Пусть к этому основанию в момент времени  $t = 0$  приложена нагрузка такая, что  $\varepsilon = \varepsilon_0 t$ , где  $\varepsilon_0 = \text{const}$ . Это соответствует тому, что происходит на самом деле и что подтверждается осциллограммами, полученными от датчика деформации и показывающими изменение деформации во времени в сечении  $x = 0$ . Необходимо выяснить, как искажается волна нагрузки при отражении ее от оснований конуса  $x = l$  и  $x = 0$  и в каком виде она приходит в цилиндрическую часть стержня. В цилиндрической части *IV* идет только прямая волна, поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь одного сечения  $x = l$ , так как во всех остальных сечениях будет та же картина, лишь со сдвигом по времени, и определить в этом сечении изменение деформации  $\varepsilon(t)$  и скорости деформации  $\dot{\varepsilon}(t)$ .

Для конической *III* и цилиндрической *IV* частей стержня можно записать следующие волновые уравнения и граничные и начальные условия:

для части *III*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{h+x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon|_{t=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$\varepsilon|_{x=0} = \varepsilon_0 t, \quad \varepsilon|_{x=l} = \varepsilon(t) \quad (2.3)$$

для части *IV*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

$$u|_{t=l/a} = 0, \quad \varepsilon|_{t=l/a} = 0, \quad \varepsilon|_{x=l} = \varepsilon(t) \quad (2.5)$$

Здесь  $\varepsilon(t)$  — неизвестная функция, определение которой и является нашей задачей. Решение уравнения (2.1) будем искать в виде [3]

$$u_{III} = \frac{\varphi(at-x) + \psi(at+x)}{h+x} \quad (2.6)$$

а уравнения (2.4) в виде

$$u_{IV} = f(at-x) \quad (2.7)$$

где функции  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $f$  определяются из соответствующих граничных условий.

В сечении  $x = l$  имеем  $u_{III}|_{x=l} = u_{IV}|_{x=l}$ . Отсюда определяется функция  $\varepsilon(t)$ ; она строится последовательно для различных интервалов времени. Первый из них начинается с момента, когда волна придет в сечение  $x = l$  и продолжается до момента, когда волна, возвратившись к сечению  $x = 0$  и отразившись от него, придет обратно. Это интервал  $l/a < t < 3l/a$ . Длительность этого и каждого последующего интервала

времен равна  $2l/a$ , что соответствует времени, за которое упругая волна успеваеет дважды пробежать всю длину конической части.

Рассмотрим сначала промежуток времени  $0 < t < l/a$ , когда волна еще не дошла до границы  $x = l$  и отраженной волны нет:  $\psi(at + x) = 0$ . Пользуясь условием (2.2), получим уравнение

$$\varphi'(z) + h^{-1}\varphi(z) + h\alpha z = 0 \quad (z = at, \alpha = \varepsilon_0 / a)$$

Отсюда имеем

$$\varphi(z) = h^2\alpha\{h[1 - \exp(-z/h)] - z\} \quad (2.8)$$

Для определения функции  $\psi$  воспользуемся условием (2.3) для интервала  $l/a < t < 3l/a$  и получим уравнение

$$\psi'(z) - \frac{1}{h+l}\psi(z) + \frac{l}{h(h+l)}\varphi(z-2l) + h\alpha(z-2l) - \varepsilon\left(\frac{z-l}{a}\right)(h+l) = 0 \quad (2.9)$$

Здесь  $z = at + l$ , а  $\varphi(z-2l)$  — функция, определяемая выражением (2.8) с заменой  $z$  на  $z-2l$ . Решение уравнения (2.9)

$$\psi(z) = \exp\left(\frac{z-2l}{h+l}\right) \left\{ -\frac{h^3l}{2h+l} \exp\left[-\frac{(z-2l)(2h+l)}{h(h+l)}\right] + h^2\alpha(2l+h) \exp\left(-\frac{z-2l}{h+l}\right) - \frac{2h^2\alpha(h+l)^2}{2h+l} + h^2\alpha \exp\left(-\frac{z-2l}{h+l}\right)(z-2l) + (h+l) \int_{2l}^z \varepsilon\left(\frac{z-l}{a}\right) \exp\left(-\frac{z-2l}{h+l}\right) dz \right\}$$

Функцию  $f$  определяем при помощи условия (2.5)

$$f(z) = - \int_{2l}^z \varepsilon\left(\frac{z-l}{a}\right) dz \quad (z = at + l)$$

Приравнявая перемещения  $u_{III}$  и  $u_{IV}$ , определяемые выражениями (2.6) и (2.7) на границе  $x = l$ , получим интегральное уравнение для неизвестной функции  $\varepsilon(t)$ , входящей в выражения для  $\psi$  и  $f$

$$\begin{aligned} & -\frac{2h^3\alpha(h+l)}{2(h+l)} \exp\left[-\frac{(z-2l)(2h+l)}{h(h+l)}\right] + 2h^2\alpha(h+l) \exp\left(-\frac{z-2l}{h+l}\right) - \\ & -\frac{2h^2\alpha(h+l)^2}{2h+l} + (h+l) \int_{2l}^z \varepsilon\left(\frac{z-l}{a}\right) \exp\left(-\frac{z-2l}{h+l}\right) dz + \\ & + (h+l) \exp\left(-\frac{z-2l}{h+l}\right) \int_{2l}^z \varepsilon\left(\frac{z-l}{a}\right) dz = 0 \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon(z) = \frac{2h^2\alpha}{3h+2l} \left\{ \exp\left[\frac{z-2l}{2(h+l)}\right] - \exp\left(-\frac{z-2l}{h}\right) \right\} \\ (z = at + l, \quad 2l < z < 4l)$$

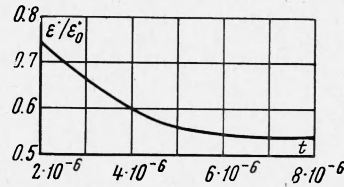
При этом для скорости деформации (заменяя  $z$  его выражением через  $t$ ) получим

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{2h^2\dot{\varepsilon}_0}{3h+2l} \left\{ \frac{1}{2(h+l)} \exp\left[\frac{at-l}{2(h+l)}\right] + \frac{1}{h} \exp\left(-\frac{at-l}{h}\right) \right\}$$

Итак, функции  $\varepsilon(t)$  и  $\dot{\varepsilon}(t)$  построены в первом из исследуемых интервалов времен  $l/a < t < 3l/a$ . В следующем интервале  $3l/a < t < 5l/a$ , действуя таким же образом, легко получить

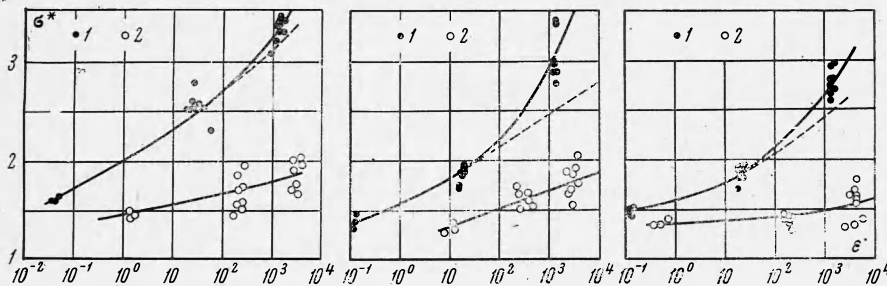
$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_0 & \left\{ \left[ \frac{h^2}{(3h+2l)(h+l)} \exp\left(\frac{l}{h+l}\right) - \frac{2h^2(2l-h)}{(3h+2l)^2} \right] \exp\left[\frac{at-3l}{2(h+l)}\right] + \right. \\ & + \left[ \frac{2h^2(2l-h)}{(3h+2l)^2} + \frac{2h}{3h+2l} \exp\left(-\frac{2l}{h}\right) \right] \exp\left(-\frac{at-3l}{h}\right) - \\ & \left. - \frac{h^2(2l+h)}{2(3h+2l)^2(h+l)^2} \exp\left[\frac{at-3l}{2(h+l)}\right] (at-3l) + \frac{4h}{(3h+2l)^2} \exp\left(-\frac{at-3l}{h}\right) (at-3l) \right\} \end{aligned}$$

На фиг. 3 в качестве иллюстрации приведена зависимость  $\epsilon'(t) / \epsilon_0'$  во времени ( $h = 30$  мм и  $l = 10$  мм, время измеряется в секундах). Видно, что основное падение функции происходит в течение первого интервала времени, длящегося 4 мксек, т. е. одного отражения волны от границы  $x = l$ , а второе отражение волны уже по существу не влияет на изменение скорости деформации. При этом функция  $\epsilon'(t) / \epsilon_0'$  стремится к значению, соответствующему отношению площадей поперечных сечений конической части стержня при  $x = 0$  и цилиндрической. (Для нашего образца это отношение площадей равно 0.54.) Поскольку измерение динамического предела текучести в сечении  $x = l$  проводится через 5 мксек после того, как волна пришла в это сечение, можно считать, что искажения, вызванные отражением волн в месте соединения конической и цилиндрической частей, не влияют на результаты.



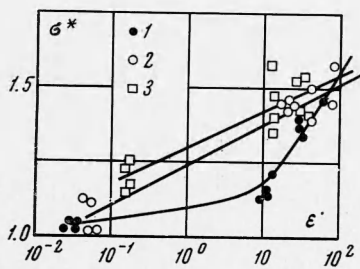
Фиг. 3

3. В работе исследованы две группы материалов. К группе А отнесены материалы, диаграмма зависимости напряжения от деформации которых при одноосном растяжении характеризуется зубом и площадкой текучести: армо-железо, сталь 3 и сталь 45. К группе В отнесены материалы, у которых диаграмма  $\sigma \sim \epsilon$  может быть описана непрерывно возрастающей функцией, причем  $d^2\sigma / d\epsilon^2 < 0$ : АМГ-6, ОТ-4 и IX18Н9Т.

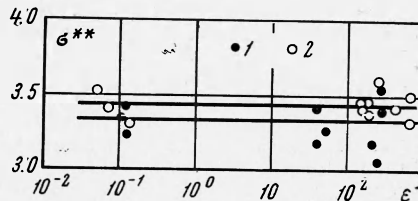


Фиг. 4

Материалы обеих групп были испытаны при скоростях деформации  $1 \cdot 10^{-1}$ ,  $5 \cdot 10$  и  $2 \cdot 10^3$  сек<sup>-1</sup> при нормальной (+ 20° С) температуре, а армо-железо и сталь 3 также при температуре - 196° С. Полученные результаты по зависимости динамического предела текучести от скорости деформации представлены на фиг. [4,5,6] (на фиг. 4 представлены результаты испытаний: а для армо-железа, б для стали 3, в для стали 45, причем



Фиг. 5



Фиг. 6

1 соответствует результатам, полученным для верхнего предела текучести, а 2 — для нижнего; на фиг. 5: 1 — АМГ-6, 2 — ОТ-4, 3 — IX18Н9Т, на фиг. 6: 1 — армо-железо, 2 — сталь 3). На фиг. 4 и 5 по оси абсцисс отложена величина скорости деформации в сек<sup>-1</sup>, по оси ординат — безразмерная величина  $\sigma^*$  — отношение динамического предела текучести  $\sigma_s$  к статическому  $\sigma_0$ . Эти графики получены путем обработки осциллограмм, записываемых во время эксперимента  $\epsilon(t)$ ,  $P(t)$  и  $P(\epsilon)$ . Для материалов группы А момент достижения предела текучести хорошо заметен и может быть определен с большой точностью. На фиг. 7 в качестве примера приведена осциллограмма испытания, проведенного со скоростью удара 100 м/сек (скорость деформации при этом была  $2 \cdot 10^3$  сек<sup>-1</sup>) для стали 3. Точки  $P_+$  и  $P_-$  соответствуют верхнему и нижнему пределам текучести соответственно.

Для материалов группы В можно было определить лишь условный предел текучести, соответствующий обычно принятой деформации в 0.2% —  $P_{0,2}$ .

По осциллограммам, полученным для обеих групп материалов можно было также проследить, выполняется ли условие постоянства скоростей деформации и нагружения и определить их величину.

Из фиг. 4 и 5 следует, что с ростом скорости деформации предел текучести растет для всех материалов, однако для материалов группы А его увеличение интенсивнее.

Это может быть объяснено тем, что для материалов группы А, относящихся к классу малоуглеродистых сталей, характерно явление запаздывания текучести, проявляющееся при динамическом нагружении и объясняемое обычно движением дислокаций в «атмосфере» растворенных атомов. Согласно критерию Кэмпбелла [4] для случая испытаний с постоянной скоростью зависимость времени запаздывания  $t_0$  (т. е. времени от начала нагружения до появления пластических деформаций) от предела текучести записывается следующим образом:

$$t_0 = C (\alpha + 1) (\sigma_s / \sigma_0)^{-\alpha} \quad (3.1)$$

Здесь  $C$  и  $\alpha$  — величины, зависящие от температуры и состава материала, причем  $\alpha$  — безразмерная величина, а  $[C] = [t]$ . Поскольку  $t_0 = \sigma_s / \dot{\sigma}_0$  эта формула описывает также связь между скоростью нагружения (или деформации) и динамическим пределом текучести.

В работе [5] приведен обзор известных экспериментальных работ по исследованию зависимостей времени запаздывания от величины и вида функции нагружения, от состава и обработки материалов, а также от температуры. Для удобства сравнения с результатами других авторов, представленными в [5], вместо  $C$  рассмотрим величину  $c = C \sigma_0^\alpha$ , имеющую размерность  $[\text{кг/мм}^2]^\alpha$ . В работе [5] показано, что значение десятичного логарифма этой величины  $\lg c$  может меняться в зависимости от исследуемого материала при комнатной температуре в пределах от 12 до 24, а значение безразмерной величины  $\alpha$  — от 9 до 16.

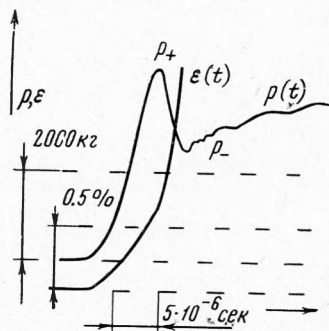
По графикам зависимостей  $\varepsilon \sim \sigma_s$  (фиг. 4) можно подсчитать величины  $\lg c$  и  $\alpha$  для материалов, исследованных в работе. На участках кривых от  $1 \cdot 10^{-1}$  до  $5 \cdot 10^{-1} \text{ сек}^{-1}$  (соответствующая область времен запаздывания  $1 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$ ) получим для армо-железа, для стали 3 и для стали 45 следующие значения:  $\lg c = 20.56, 23.80, 18.76$  и  $\alpha = 14.1, 16.0, 12.5$  соответственно. Эти значения лежат в указанных интервалах.

Пунктирными линиями на фигурах 4 нанесены кривые, вычисленные по формуле (3.1). Видно, что начиная примерно со значения  $\varepsilon$  в  $5 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$  ( $t_0$  порядка  $3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$ ), экспериментальные точки лежат значительно выше вычисленных кривых. Среди многочисленных работ, посвященных изучению явления запаздывания текучести, можно указать лишь на эксперименты Краффта [6], в которых исследованы столь малые времена запаздывания вплоть до  $10^{-6} \text{ сек}$ . При временах, меньших примерно  $5 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$ . Краффтом получено резкое увеличение наклона кривой, характеризующей зависимость  $\sigma_s \sim t_0$ , что согласуется с результатами, полученными в данной работе.

На фиг. 4 приведены также зависимости нижнего предела текучести от скорости деформации. Этот предел, вообще говоря, носит лишь условный характер, поскольку по осциллограммам ввиду сильных колебаний, возникающих с появлением пластических деформаций (фиг. 7), трудно установить его величину. Однако несомненно, что зависимость нижнего предела текучести  $\sigma_- / \sigma_0$  от скорости деформации гораздо слабее, чем верхнего предела  $\sigma_+ / \sigma_0$ . Подобное же явление отмечено и в работах [7, 8].

На фиг. 6 представлены зависимости предела текучести армо-железа и стали 3 от скорости деформации при температуре  $-196^\circ \text{C}$ .

По оси абсцисс отложена скорость деформации  $\dot{\varepsilon}$  в  $\text{сек}^{-1}$ , а по оси ординат  $\sigma^{**}$  — верхний динамический предел текучести при  $-196^\circ \text{C}$ , отнесенный к верхнему статическому пределу при  $+20^\circ \text{C}$ . Из фигуры видно, что в исследованном диапазоне скоростей деформации  $\sigma^{**}$  есть величина постоянная. Эти результаты подтверждаются работами Краффта [6, 9] и Кларка и Вуда [10], проведенными для случая нагружения внезапно прикладываемым постоянным напряжением. Ими отмечено, что существует верхнее предельное значение напряжения, выше которого происходит хрупкое разрушение и явление запаздывания не наблюдается. В данном случае это ограничение касается скоростей нагружения (деформации). По-видимому, если рассматривать более низкие скорости, чем исследованные в данной работе, появится тенденция к уменьшению  $\sigma^{**}$  и при достаточно малых скоростях деформации, при которых нагружение можно считать статическим, величина  $\sigma^{**}$  будет равна отношению верхнего статического предела текучести при  $-196^\circ \text{C}$  к верхнему статическому пределу при  $+20^\circ \text{C}$ .



Фиг. 7

## ЛИТЕРАТУРА

1. Волошенко - Климовицкий Ю. Я. Динамический предел текучести. М., «Наука», 1965.
2. Волошенко - Климовицкий Ю. Я., Беляев Ю. А., Мельшанов А. Ф. Аппаратура для испытаний материалов при высоких скоростях нагружения. Заводск. лаборатория, 1967, т. 33, № 8, стр. 1016—1019.
3. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ, 1946, т. 10, вып. 5, стр. 597—616.
4. Campbell J. D. Dynamic yielding of mild steel. Acta Metallurgica, 1953, vol. 1, № 6, pp. 706—710.
5. Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в сталях (обзор экспериментальных работ). ПМТФ, 1968, № 3.
6. Krafft J. M. Effect of temperature on delayed yielding of mild steel for short loading duration. Trans. Amer. Soc. Metals, 1956, vol. 48, pp. 249—261.
7. Warnock F. V. and Taylor D. B. C. Yield Phenomena of a Medium Carbon Steel under Dynamic Loading. Proc. Instn. Mech. Engrs, 1949, vol. 161, p. 165.
8. Elam C. F. The Influence of rate of deformation on the tensile test with special reference to the yield point in iron and steel. Proc. Roy. Soc., London, 1938, vol. 165, pp. 568—592.
9. Krafft J. M., Sullivan A. M. Effect of grain size and carbon content on the yield delay time of mild steel. Trans. Amer. Soc. Metals, 1959, vol. 51, pp. 643—665.
10. Wood D. S., Clark D. S. The influence of temperature upon the time delay for yielding in annealed mild Steels. Trans. Amer. Soc. Metals, 1951, vol. 43, pp. 571—586.

**ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
ОБРАЗЦОВ С ШЕЙКОЙ**

*В. М. Сегал (Минск)*

Рассматривается пластическое растяжение образца, ограниченного криволинейной поверхностью вращения. Такая конфигурация может возникать, например, вследствие образования шейки при растяжении. Материал образца подчиняется условию пластичности Треска и ассоциированному закону течения. Приближенные решения для распределения напряжений в шейке рассматриваются в [6]. Растяжение цилиндрических образцов с вырезами исследовалось в [2,4] численным и графическим методами. Ниже дается аналитическое решение задачи для достаточно плавной формы шейки; учитывается малая неоднородность пластических свойств.

1. Примем, что рассматриваемое пластическое состояние соответствует режиму Хаара — Кармана [1]; справедливость этого предложения, как обычно, оправдывается возможностью получения полного решения. При растяжении радиальная составляющая скорости течения  $u < 0$ , и согласно принятому режиму окружное главное напряжение

$$\sigma_{\theta} = 1/2 (\sigma_r + \sigma_z) - k$$

а компоненты  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  должны удовлетворять условиям равновесия и пластичности

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2r} + \frac{k}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2 \quad (1.1)$$

Здесь  $k$  — предел текучести материала на сдвиг. Пластическое течение возникает в области  $AOB$  (фиг. 1), примыкающей к минимальному сечению образца. Отсутствие напряжений на свободной поверхности позволяет записать граничные условия для системы (1.1)

$$\sigma_r = k - k \cos 2\lambda, \quad \sigma_z = k + k \cos 2\lambda, \quad \tau_{rz} = k \sin 2\lambda \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  — угол между касательной к  $AB$  и осью  $oz$ .

Форма шейки вне  $AB$  не оказывает влияния на решение, однако она должна быть такой, чтобы в жестких областях нигде не превышалось условие пластичности. В области определения решения (на участке  $AB$ ) будем считать, что шейка образована гладкой кривой, уравнение которой может быть записано в виде

$$\frac{r}{a} = 1 + \delta\Phi\left(\frac{z}{a}\right), \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0 \quad (1.3)$$