УДК 539.376

НЕЛИНЕЙНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА

Н. Н. Попов, В. П. Радченко

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара
E-mails: popov@pm.samgtu.ru, radch@samgtu.ru

Разработан аналитический метод решения двумерной нелинейной задачи ползучести на примере двухосного растяжения плоскости из стохастически неоднородного материала с учетом накопления поврежденности и третьей стадии ползучести. Определяющее соотношение ползучести принимается в соответствии с энергетическим вариантом нелинейной теории вязкого течения. Стохастичность материала определяется двумя случайными функциями координат. Получены формулы для вычисления дисперсий напряжений.

Ключевые слова: стохастическая неоднородность, установившаяся ползучесть, поврежденность материала, случайная функция, дисперсии напряжений.

К настоящему времени исследование структурно-неоднородных сред с использованием теории случайных функций проведено достаточно полно только для линейно-упругих сред [1]. В условиях ползучести разработка аналитических методов решения стохастических краевых задач существенно затруднена, в основном из-за физической и стохастической нелинейности определяющих уравнений. На основе метода малого параметра одномерные стохастические задачи установившейся ползучести (например, труба под действием внутреннего давления) могут быть решены с любой степенью точности [2]. Что касается плоских и пространственных задач ползучести, то они решены лишь в первом приближении на основе теории установившейся ползучести [3–5]. До сих пор не разработаны аналитические методы решения стохастических краевых задач с учетом накопления поврежденности и третьей стадии ползучести.

Пусть компоненты тензора номинальных напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2), \tag{1}$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$ — условию

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk,il} = 0, \tag{2}$$

которое получается дифференцированием по времени уравнения совместности деформаций. Здесь Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор. По повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Уравнения (1) и (2) замыкаются стохастическими определяющими соотношениями нелинейной теории вязкого течения (установившейся ползучести) [3]:

$$\dot{p}_{ij} = c\bar{s}^{n-1}(\bar{\sigma}_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\bar{\sigma}_{mm})(1 + \alpha_1 U_1(x_1, x_2)) \qquad (i, j = 1, 2). \tag{3}$$

Здесь $\bar{s}$ — интенсивность напряжений:

$$\bar{s}^2 = (3\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ii}\bar{\sigma}_{jj})/2,$$

$\bar{\sigma}_{ij}$ — компоненты тензора истинных напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера; $U_1(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая реологические свойства материала, с математическим ожиданием $\langle U_1 \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U_1^2 \rangle = 1$; c, n, α_1 — постоянные материала.

При записи определяющих соотношений с учетом третьей стадии ползучести используется энергетический вариант теории установившейся ползучести [6], согласно которому истинные напряжения $\bar{\sigma}_{ij}$ связаны с номинальными напряжениями σ_{ij} соотношением

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}(1 + \omega), \tag{4}$$

где $\omega(t, x_1, x_2)$ — скалярный параметр поврежденности, характеризующий накопление поврежденности материала (в каждой точке материала) вследствие ползучести с течением времени и удовлетворяющий кинетическому уравнению

$$\dot{\omega} = b(1 + \alpha_2 U_2(x_1, x_2))\bar{\sigma}_{ij}\dot{p}_{ij}. \tag{5}$$

Здесь b, α_2 — постоянные материала; $U_2(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая стохастическую повреждаемость материала, с математическим ожиданием $\langle U_2 \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U_2^2 \rangle = 1$.

Поставленная задача является физически и статистически-нелинейной, поэтому решается приближенно относительно номинальных напряжений σ_{ij} на основе линеаризации методом малого параметра.

Используя (4), запишем соотношения (3) в виде

$$\dot{p}_{ij} = \dot{r}_{ij}(1 + \omega)^n, \tag{6}$$

где

$$\dot{r}_{ij} = cs^{n-1}(\sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{mm})(1 + \alpha_1 U_1(x_1, x_2)). \tag{7}$$

Здесь s — интенсивность номинальных напряжений. Соотношение, определенное формулой (7), задает закон ползучести при $\omega(t) \equiv 0$. Уравнение (5) для параметра поврежденности ω с учетом (6) можно представить в виде

$$\dot{\omega} = b(1 + \alpha_2 U_2)\dot{r}_{ij}(1 + \omega)^n. \tag{8}$$

Проинтегрировав уравнение (8) при начальном условии $\omega(0) = 0$, для величины $(1 + \omega)^n$ получим

$$(1 + \omega)^n = 1 \Big/ \Big(1 - bn(1 + \alpha_2 U_2) \int_0^t \sigma_{mn}\dot{r}_{mn}\, d\tau\Big).$$

Проводя линеаризацию правой части последнего соотношения, получим

$$(1 + \omega)^n \approx 1 + bn(1 + \alpha_2 U_2) \int_0^t \sigma_{mn}\dot{r}_{mn}\, d\tau. \tag{9}$$

С учетом (9) соотношение (6) приводится к виду

$$\dot{p}_{ij} = \dot{r}_{ij}\Big(1 + bn(1 + \alpha_2 U_2) \int_0^t \sigma_{mn}\dot{r}_{mn}\, d\tau\Big). \tag{10}$$

Пусть тензор номинальных напряжений представлен в виде суммы детерминированного слагаемого σ_{ij}^0 и флуктуации σ_{ij}^*:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \qquad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0.$$

Линеаризация соотношения (7) выполнена в работе [3] при условии, что σ^0_{11} и σ^0_{22} являются постоянными, а $\sigma^0_{12} = 0$:

$$\dot r_{11} = \dot r^0_{11} + (1/3)cs_0^{n-1}(2\sigma^*_{11} - \sigma^*_{22} + (\sigma^*_{11}l_1 + \sigma^*_{22}l_2)k_1 + \alpha_1 U_1 l_1),$$
$$\dot r_{22} = \dot r^0_{22} + (1/3)cs_0^{n-1}(2\sigma^*_{22} - \sigma^*_{11} + (\sigma^*_{11}l_1 + \sigma^*_{22}l_2)k_2 + \alpha_1 U_1 l_2), \qquad (11)$$
$$\dot r_{12} = cs_0^{n-1}\sigma^*_{12}.$$

Здесь

$$\dot r^0_{11} = (1/3)cs_0^{n-1}l_1, \qquad \dot r^0_{22} = (1/3)cs_0^{n-1}l_2, \qquad s_0^2 = (\sigma^0_{11})^2 + (\sigma^0_{22})^2 - \sigma^0_{11}\sigma^0_{22},$$
$$l_1 = 2\sigma^0_{11} - \sigma^0_{22}, \qquad l_2 = 2\sigma^0_{22} - \sigma^0_{11}, \qquad k_i = (n-1)l_i/(2s_0^2).$$

Каждую из величин $\dot p_{ij}$, σ_{ij}, $\dot r_{ij}$ в соотношении (10) представим в виде детерминированной и случайной частей:

$$\dot p^0_{ij} + \dot p^*_{ij} = (\dot r^0_{ij} + \dot r^*_{ij})\Big(1 + bn(1 + \alpha_2 U_2)\int\limits_0^t (\sigma^0_{mn} + \sigma^*_{mn})(\dot r^0_{mn} + \dot r^*_{mn})\,d\tau\Big). \qquad (12)$$

Раскрывая скобки в правой части выражения (12) с учетом соотношений (11), приводя подобные члены и отбрасывая члены второго и третьего порядков малости, для флуктуаций скоростей деформаций получим

$$\dot p^*_{11} = A^2bnl_1\Big(B\int\limits_0^t \sigma^*_{11}\,d\tau + C\int\limits_0^t \sigma^*_{22}\,d\tau\Big) + A^2bnl_1\alpha_1U_1(\sigma^0_{11}l_1 + \sigma^0_{22}l_2)t +$$
$$+ A^2bnl_1\alpha_2U_2(\sigma^0_{11}l_1 + \sigma^0_{22}l_2)t + A(\sigma^*_{11}(2 + l_1k_1) + \sigma^*_{22}(-1 + l_1k_2) + \alpha_1U_1l_1)(1 + A_1t), \qquad (13)$$
$$\dot p^*_{22} = A^2bnl_2\Big(B\int\limits_0^t \sigma^*_{11}\,d\tau + C\int\limits_0^t \sigma^*_{22}\,d\tau\Big) + A^2bnl_2\alpha_1U_1(\sigma^0_{11}l_1 + \sigma^0_{22}l_2)t +$$
$$+ A^2bnl_2\alpha_2U_2(\sigma^0_{11}l_1 + \sigma^0_{22}l_2)t + A(\sigma^*_{11}(-1 + l_1k_2) + \sigma^*_{22}(2 + l_2k_2) + \alpha_1U_1l_2)(1 + A_1t),$$
$$\dot p^*_{12} = 3A\sigma^*_{12}(1 + A_1t),$$

где

$$A = (1/3)cs_0^{n-1}, \qquad A_1 = Abn(\sigma^0_{11}l_1 + \sigma^0_{22}l_2),$$
$$B = l_1 + \sigma^0_{11}(2 + l_1k_1) + \sigma^0_{22}(-1 + l_1k_2), \qquad C = l_2 + \sigma^0_{11}(-1 + l_2k_1) + \sigma^0_{22}(2 + l_2k_2).$$

Если в уравнение совместности для флуктуаций скоростей деформаций

$$\dot p^*_{11,22} + \dot p^*_{22,11} - 2\dot p^*_{12,12} = 0$$

подставить (13), то получим следующее соотношение:

$$Abn\Big(l_1B\int\limits_0^t (\sigma^*_{11,11} + \sigma^*_{11,22})\,d\tau + l_2C\int\limits_0^t (\sigma^*_{22,11} + \sigma^*_{22,22})\,d\tau\Big) +$$
$$+ Abnt\alpha_1(l_1U_{1,22} + l_2U_{1,11})(\sigma^0_{11}l_1 + \sigma^0_{22}l_2) + (\sigma^*_{11,22}(2 + l_1k_1) + \sigma^*_{22,22}(-1 + l_1k_2) +$$
$$+ \sigma^*_{11,11}(-1 + l_2k_1) + \sigma^*_{22,11}(2 + l_2k_2) + \alpha_1(U_{1,22}l_1 + U_{1,11}l_2))(1 + A_1t) +$$
$$+ Abnt\alpha_2(l_1U_{2,22} + l_2U_{2,11})(\sigma^0_{11}l_1 + \sigma^0_{22}l_2) - 6\sigma^*_{12,12}(1 + A_1t) = 0. \qquad (14)$$

К этому уравнению необходимо добавить уравнения равновесия для флуктуаций напряжений

$$\sigma^*_{ij,j} = 0. \tag{15}$$

Если ввести функцию напряжения F для флуктуаций тензора номинальных напряжений

$$\sigma^*_{11} = F_{,22}, \qquad \sigma^*_{22} = F_{,11}, \qquad \sigma^*_{12} = -F_{,12}, \tag{16}$$

то вместо системы (14), (15) получим дифференциальное уравнение относительно функции F:

$$\begin{gathered}
Abn\Big(l_1 B \int\limits_0^t (F_{,2222} + F_{,1122})\, d\tau + l_2 C \int\limits_0^t (F_{,1111} + F_{,1122})\, d\tau\Big) + \\
+ Abnt\alpha_1(l_1 U_{1,22} + l_2 U_{1,11})(\sigma^0_{11} l_1 + \sigma^0_{22} l_2) + (F_{,1111}(2 + l_2 k_2) + 2F_{,1122}(2 + l_1 k_2) + \\
+ F_{,2222}(2 + l_1 k_1) + \alpha_1 U_{1,22} l_1 + \alpha_1 U_{1,11} l_2)(1 + A_1 t) + \\
+ Abnt\alpha_2(l_1 U_{2,22} + l_2 U_{2,11})(\sigma^0_{11} l_1 + \sigma^0_{22} l_2) = 0.
\end{gathered} \tag{17}$$

В силу вычислительных трудностей, возникающих при решении уравнения (17), далее будем анализировать только случай равномерного растяжения ($\sigma^0_{11} = \sigma^0_{22} = \sigma^0$). Тогда уравнение (17) приводится к виду

$$\begin{gathered}
\frac{n+3}{2}(F_{,1111} + 2F_{,1122} + F_{,2222})(1 + A_1 t) + \frac{A_1}{2}(n+1) \int\limits_0^t (F_{,1111} + 2F_{,1122} + F_{,2222})\, d\tau = \\
= -(1 + 2A_1 t)\alpha_1 \sigma^0 (U_{1,11} + U_{1,22}) - A_1 t \alpha_2 \sigma^0 (U_{2,11} + U_{2,22}).
\end{gathered} \tag{18}$$

Пусть функции $U_k(x_1, x_2)$ $(k = 1, 2)$, с помощью которых задаются случайные поля возмущений механических свойств материала, являются однородными и изотропными. Тогда их можно представить в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса [6]

$$U_k(x_1, x_2) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)}\, d\varphi_k(q_1, q_2) \qquad (k = 1, 2), \tag{19}$$

причем для случайных дифференциалов имеет место соотношение

$$\langle d\varphi_k(q_1, q_2)\overline{d\varphi_k(q_1', q_2')}\rangle = S_k(q_1, q_2)\delta(q_1 - q_1')\delta(q_2 - q_2')\, dq_1\, dq_2\, dq_1'\, dq_2',$$

где $S_k(q_1, q_2)$ — спектральная плотность поля U_k; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; черта означает комплексное сопряжение (по индексу k суммирование не проводится).

Так как случайные поля микронеоднородностей $U_k(x_1, x_2)$ являются быстроосциллирующими, то решение линеаризованной задачи (18) будет однородным и его можно искать в виде

$$F = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)}(b_1(q_1, q_2, t)\, d\varphi_1(q_1, q_2) + b_2(q_1, q_2, t)\, d\varphi_2(q_1, q_2)), \tag{20}$$

где $b_k(q_1, q_2, t)$ $(k = 1, 2)$ — неизвестные весовые функции.

Если представления (19), (20) подставить в соотношение (18), то для вычисления весовых функций $b_k(q_1, q_2, t)$ получим два уравнения

$$\frac{n+3}{2}\, b_1 q^2 (1 + A_1 t) + \frac{A_1}{2}\,(n+1) q^2 \int\limits_0^t b_1\, d\tau = (1 + 2A_1 t)\alpha_1 \sigma^0; \tag{21}$$

$$\frac{n+3}{2}\, b_2 q^2 (1 + A_1 t) + \frac{A_1}{2}\,(n+1) q^2 \int\limits_0^t b_2\, d\tau = A_1 t \alpha_2 \sigma^0, \qquad q^2 = q_i q_i. \tag{22}$$

Рассмотрим решение уравнения (21). Если использовать замену переменной $b_1(t) = \dot{x}(t)$, то уравнение (21) становится линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{n+3}{2}\, \dot{x}(t) q^2 (1 + A_1 t) + \frac{A_1}{2}\,(n+1) q^2 x(t) = (1 + 2A_1 t)\alpha_1 \sigma^0,$$

решение которого имеет вид

$$x(t) = C(1 + A_1 t)^{-(n+1)/(n+3)} + \frac{2\alpha_1 \sigma^0 (1 + 2A_1 t)}{A_1 (n+1) q^2} - \frac{2\alpha_1 \sigma^0 (1 + A_1 t)(n+3)}{A_1 (n+1)(n+2) q^2} \tag{23}$$

(C — произвольная постоянная). Продифференцировав решение (23), получим

$$b_1(t) = -C A_1\, \frac{n+1}{n+3}\,(1 + A_1 t)^{-2(n+2)/(n+3)} + \frac{2\alpha_1 \sigma^0}{(n+2) q^2}.$$

Постоянную C можно найти, используя начальное условие

$$b_1(0) = \frac{2\alpha_1 \sigma^0}{(n+3) q^2},$$

вычисленное в соответствии с результатами работы [3] при $\omega = 0$. В итоге весовая функция $b_1(t)$ определяется формулой

$$b_1(t) = -\frac{2\alpha_1 \sigma^0 (1 + A_1 t)^{-2(n+2)/(n+3)}}{(n+2)(n+3) q^2} + \frac{2\alpha_1 \sigma^0}{(n+2) q^2}. \tag{24}$$

Уравнение (22) решается аналогично. Его решение имеет вид

$$b_2(t) = \frac{2\alpha_2 \sigma^0}{(n+2) q^2} \big(1 - (1 + A_1 t)^{-2(n+2)/(n+3)}\big). \tag{25}$$

Таким образом, согласно (9), (24), (25) компоненты тензора флуктуаций номинальных напряжений вычисляются по формуле

$$\sigma^*_{kl} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)} (c_{kl}(q_1, q_2, t)\, d\varphi_1(q_1, q_2) + d_{kl}(q_1, q_2, t)\, d\varphi_2(q_1, q_2)), \tag{26}$$

где $c_{11} = -q_2^2 b_1$, $c_{12} = q_1 q_2 b_1$, $c_{22} = -q_1^2 b_1$; $d_{11} = -q_2^2 b_2$, $d_{12} = q_1 q_2 b_2$, $d_{22} = -q_1^2 b_2$.

Полученное решение (26) может быть использовано при исследовании случайного поля напряжений в случае ползучести плоской пластины. При быстроизменяющихся случайных полях микронеоднородностей U_k влияние границ на напряженно-деформированное состояние во внутренней области достаточно мало. Поэтому вдали от границы пластины напряженное состояние определяется формулой (26). Вблизи границы, на которой заданы

Таблица 1

α_1	$\sqrt{D_{11}(0)}/\sigma^0 \cdot 10^2$
0,1	1,98
0,2	3,95
0,3	5,93
0,4	7,90
0,5	9,88

Таблица 2

α_1	$\sqrt{D_{11}(1000)}/\sigma^0 \cdot 10^2$				
	$\alpha_2 = 0{,}1$	$\alpha_2 = 0{,}2$	$\alpha_2 = 0{,}3$	$\alpha_2 = 0{,}4$	$\alpha_2 = 0{,}5$
0,1	3,30	5,20	7,30	9,50	11,80
0,2	5,25	6,60	8,40	10,30	12,50
0,3	7,43	8,40	9,90	11,70	13,40
0,4	9,70	10,40	11,70	13,20	14,90
0,5	12,00	12,60	13,70	15,00	16,50

детерминированные граничные условия, необходимо провести дополнительные исследования.

Для определения дисперсий случайного поля напряжений предположим, что процессы ползучести и накопления поврежденности оказывают независимое влияние на вероятностные характеристики напряжений. При этом условии дисперсии напряжений определяются формулой

$$D_{kl}(t) = D(\sigma_{kl}) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (S_1(q_1,\, q_2) c_{kl}^2(q_1, q_2, t) + S_2(q_1,\, q_2) d_{kl}^2(q_1, q_2, t))\, dq_1\, dq_2. \qquad (27)$$

Спектральная плотность S_i изотропного скалярного поля U_i зависит только от модуля волнового вектора $q_0 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, и для дисперсии имеет место равенство [7]

$$D_{U_i} = 2\pi \int\limits_0^\infty S_i(q_0) q_0\, dq_0 = 1. \qquad (28)$$

Если в интеграле (27) перейти к полярной системе координат $q_1 = q_0 \cos\varphi$, $q_2 = q_0 \sin\varphi$ и проинтегрировать его с учетом (28), то дисперсии напряжений будут определяться следующими равенствами:

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = 3D_{12}(t) = \\ = \frac{3\alpha_1^2(\sigma^0)^2}{2(n+2)^2}\Big(1 - \frac{(1 + A_1 t)^{-2(n+2)/(n+3)}}{n+3}\Big)^2 + \frac{3\alpha_2^2(\sigma^0)^2}{2(n+2)^2}\big(1 - (1 + A_1 t)^{-2(n+2)/(n+3)}\big)^2.$$

В качестве примера рассмотрим равномерное растяжение пластины из стали 12Х18Н10Т при температуре $T = 1123$ К, напряжении $\sigma^0 = 39{,}24$ МПа и следующих параметрах определяющих соотношений: $n = 3{,}2$; $c = 6{,}67 \cdot 10^{-9}$ МПа$^{-3{,}2} \cdot$ ч$^{-1}$; $b = 0{,}141$. Эти данные заимствованы из работы [8]. В табл. 1 приведены значения коэффициента вариации $\sqrt{D_{11}(0)}/\sigma^0$ при $t = 0$ и различных значениях α_1, что соответствует случаю установившейся ползучести без учета накопления поврежденности. В табл. 2 представлены значения $\sqrt{D_{11}(1000)}/\sigma^0$ при $t = 1000$ ч в зависимости от параметров α_1 и α_2.

Из табл. 1, 2 следует, что коэффициент вариации $\sqrt{D_{11}(t)}/\sigma^0$ может быть существенным и в зависимости от параметров α_1, α_2 и времени t может в несколько раз превышать соответствующее значение в случае установившейся ползучести без учета поврежденности материала. Иными словами, на третьей стадии ползучести происходит изменение (увеличение) флуктуаций напряжений с течением времени, что, в свою очередь, может служить теоретическим обоснованием экспериментально наблюдаемого увеличения разброса деформации ползучести на стадии разупрочнения по сравнению с разбросом на стадии установившейся ползучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ломакин В. А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
2. **Должковой А. А., Попов Н. Н., Радченко В. П.** Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 161–171.
3. **Кузнецов В. А.** Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // Математическая физика: Сб. науч. тр. Куйбышев: Куйбышев. политехн. ин-т, 1977. С. 69–74.
4. **Попов Н. Н., Самарин Ю. П.** Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ. 1988. № 1. С. 159–164.
5. **Попов Н. Н., Самарин Ю. П.** Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ. 1985. № 2. С. 150–155.
6. **Радченко В. П.** Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций / В. П. Радченко, Ю. А. Еремин. М.: Машиностроение-1, 2004.
7. **Свешников А. А.** Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
8. **Закономерности** ползучести и длительной прочности: Справ. / Под общ. ред. С. А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983.

Поступила в редакцию 26/IV 2006 г.