11. Б а к а н о в С. П., Д е р я г и н Б. В. К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1, стр. 71.
12. Ц и р и н г С. Течение газа вблизи твердой поверхности. Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 3, стр. 148—153.
13. И в ч е н к о И. Н., Я л а м о в Ю. И. Кинетическая теория течения газа, находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6, стр. 139—143.
14. G r o s s E. P., Z i e r i n g S. Kinetic theory of linear shear flow. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 63, p. 215.

УДК 532.54

К ВОПРОСУ О ТЕЧЕНИИ И ГИДРАВЛИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

А. В. Купавцев

(Москва)

В химической, нефтеперерабатывающей и пищевой промышленностях, в медицине широко используются жидкости со структурной вязкостью, характеризуемые реологической кривой, представленной на фиг. 1. В работе [1] предлагается методика описания реологических свойств таких сред и показывается целесообразность выделения класса этих жидкостей с линейным законом текучести в области напряжений, близких к τ_1.

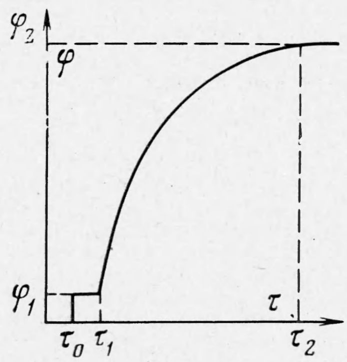
На практике также имеют место течения рассматриваемых жидкостей в области напряжений, приближающихся к τ_2, когда наблюдается постепенный переход к режиму движения среды с наибольшей практически постоянной текучестью φ_2. Так, следует ожидать подобный характер течения крови в кровеносной системе человека и животных при понижении давления и других патологических состояниях [2].

1. Обозначим через τ_2 значение напряжения сдвига такое, что при $\tau > \tau_2$ движение среды можно считать происходящим с постоянной текучестью φ_2. Аппроксимируем участок реологической кривой, примыкающий к τ_2 логарифмической функцией, являющейся обратной экспоненциальной зависимости, предложенной в [1]

$$\varphi_* = 0, \qquad \tau \geqslant \tau_2, \qquad \varphi_* = \ln \tau_*, \qquad \tau \leqslant \tau_2 \qquad (1.1)$$

где τ_* и φ_* — безразмерные комплексы

$$\tau_* = \frac{\tau - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}, \qquad \varphi_* = \frac{1}{\theta}\frac{\varphi - \varphi_2}{\tau_2 - \tau_1}$$



Фиг. 1

(θ — мера структурной устойчивости жидкости) составлены так, чтобы удовлетворить соотношению (1.1) при $\tau = \tau_2$. Поведение этих величин при $\tau \to \tau_1$ может не рассматриваться, так как предлагаемая здесь точка зрения относится к области τ_*, близких к единице.

Для структурированных жидкостей с линейным законом текучести в области τ, близких к τ_2, получаем простое реологическое уравнение $\varphi = \varphi_2 - \theta\,(\tau_2 - \tau)$, в которое вошли величины, характеризующие рассматриваемый верхний участок кривой течения.

2. Рассмотрим ламинарное изотермическое течение исследуемой жидкости со структурной вязкостью в цилиндрическом круговом канале радиуса R с жесткими стенками. Такой случай течения может наблюдаться, например, при движении крови в сосудах с неизменяющимся просветом (склерозированные сосуды).

Поступая таким же образом, как в работе [1], получим, используя соотнощение (1.1), выражения для профиля скорости течения структурированной жидкости

$$w = {}^1/_2\varphi_2 R(\tau_c - \tau_c') \left[(1-\xi^2) + {}^2/_3\vartheta(\tau_c'' - \tau_c')\ln\frac{\tau_c - \tau_c'}{\tau_c'' - \tau_c'}(1-\xi^3)\right]$$

и средней скорости потока

$$\langle w\rangle = {}^1/_4\varphi_2 R(\tau_c - \tau_c') \left[1 + {}^4/_5\vartheta(\tau_c'' - \tau_c')\ln\frac{\tau_c - \tau_c'}{\tau_c'' - \tau_c'}\right]$$

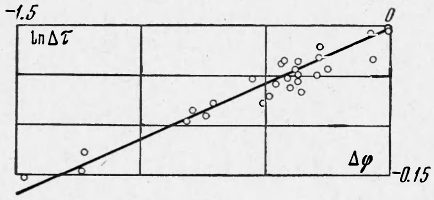
где τ_c — напряжение сдвига на стенке канала, а ξ, ϑ, τ_c' и τ_c'' определяются равенствами

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \vartheta = \frac{\theta}{\varphi_2}, \quad \tau_1 = \tau_c'\xi, \quad \tau_2 = \tau_c''\xi$$

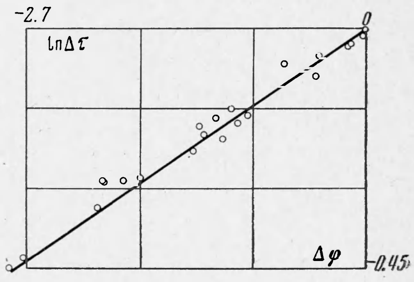
Вводя безразмерные комплексы, аналогичные φ_* и τ_*

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_k - \varphi_2}{\tau_c'' - \tau_c'}, \qquad \Delta\tau = \frac{\tau_c - \tau_c'}{\tau_c'' - \tau_c'}$$

(φ_k — кажущаяся текучесть среды), приходим на основании последнего выражения к заключению о линейной зависимости между $\Delta\varphi$ и $\ln\Delta\tau$. На фиг. 2 и фиг. 3 представлены результаты опытов автора по исследованию течения крови в стальных трубках.



Фиг. 2



Фиг. 3

В этих опытах исследуемая жидкость под действием давления, создаваемого напорным резервуаром, в котором уровень последней поддерживался неизменным, могла протекать через горизонтальные прямые цилиндрические трубки различных диаметров (3—7 *мм*) и длин. Через боковые отростки к этим трубкам присоединялись манометры для измерения разности давлений на концах исследуемого участка. Перепад давления регулировался при помощи крана, установленного за экспериментальным участком на открытом конце системы. Секундный расход жидкости измерялся обычным способом. Экспериментальная установка, в которой предусматривалось создание ламинарного течения с развитым профилем скорости, была опробирована на воде.

Прямые на фиг. 4 получены для крови различной концентрации по данным опытов [3]. На фиг. 5, 6 представлены результаты экспериментов по течению других структурированных жидкостей: битума и раствора резины в толуоле [1]. Фиг. 2—6 показывают, что экспериментальные данные (кружки) укладываются вдоль соответствующих прямых, показанных на каждой фигуре.

3. Для характеристики гидравлического сопротивления движения жидкости со структурной вязкостью в цилиндрическом канале введем величины

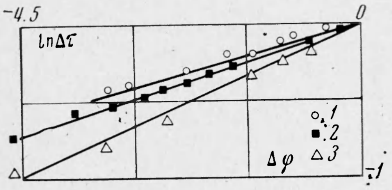
$$\lambda = \frac{8(\tau_c - \tau_c')}{\rho\langle w\rangle^2}, \qquad \lambda_H = \frac{8(\tau_H - \tau_c')}{\rho\langle w\rangle^2}$$

где λ — коэффициент гидравлического сопротивления структурированного потока жидкости при некоторой средней скорости $\langle w\rangle$, а λ_H— коэффициент гидравлического сопротивления ньютоновской жидкости, обладающей текучестью φ_2, при той же скорости течения; τ_H — напряжение сдвига на стенке канала, при котором средняя скорость течения ньютоновской жидкости с текучестью φ_2 будет равна $\langle w\rangle$. Заметим, что для рассматриваемой области напряжений сдвига, когда можно пренебречь величиной τ_c', предложенное определение коэффициентов λ и λ_H совпадает с общепринятым.

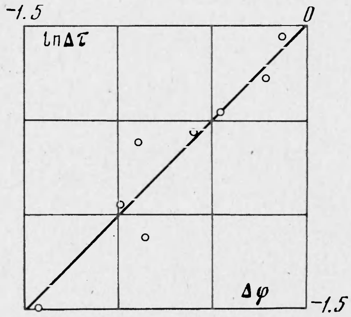
Величину дополнительных гидравлических потерь, вызванных отклонением поведения жидкости со структурной вязкостью от ньютоновского в области $\tau < \tau_2$, охарактеризуем относительным коэффициентом сопротивления, определяемым выражением

$$\lambda = \Lambda \lambda_H$$

Если число Рейнольдса для рассматриваемой жидкости с переменной вязкостью определить так же, как в работе [1], $\mathrm{Re} = 2\rho \langle w \rangle R\varphi_2$, то можем отметить, что при данном выборе коэффициента Λ сравнение величин λ и λ_H происходит при одном и том же числе Рейнольдса.



Фиг. 4



Фиг. 5

Из определения относительного коэффициента гидравлического сопротивления вытекает следующее:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_H} = \frac{\tau_c - \tau_c'}{\tau_H - \tau_c'} \tag{3.1}$$

Величину $\tau_H - \tau_c'$ можно определить из равенства соответствующих средних скоростей

$$\tfrac{1}{4}\varphi_2 R (\tau_H - \tau_c') = \tfrac{1}{4}\varphi_2 R (\tau_c - \tau_c') [1 + \tfrac{4}{5}\vartheta (\tau_c'' - \tau_c') \ln \Delta\tau]$$

Отсюда имеем

$$\tau_H - \tau_c' = (\tau_c - \tau_c') [1 + \tfrac{4}{5}\vartheta (\tau_c'' - \tau_c') \ln \Delta\tau] \tag{3.2}$$

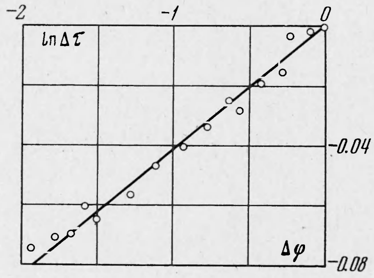
Из полученного выражения вытекает, что с увеличением напряжения сдвига разность между τ_c и τ_H уменьшается и при $\tau = \tau_c''$ становится равной нулю, а относительный коэффициент гидравлического сопротивления Λ становится равным единице.

Подставляя (3.1) в (3.2) и вводя понятие относительной гидравлической проводимости $\zeta = 1/\Lambda$, получаем

$$\zeta = 1 + \tfrac{4}{5}\vartheta (\tau_c'' - \tau_c') \ln \Delta\tau \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что для структурированных жидкостей между величиной характерного коэффициента относительной гидравлической проводимости

$$\Delta\zeta = \frac{1}{0.8\vartheta} \frac{\zeta - 1}{\tau_c'' - \tau_c'}$$



Фиг. 6

и величиной безразмерного напряжения $\Delta\tau$ существует зависимость, аналогичная (1.1)

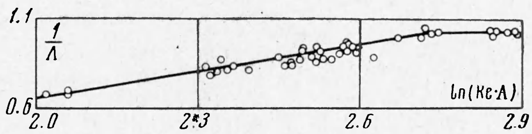
$$\Delta\zeta = \ln \Delta\tau$$

Коэффициент относительной гидравлической проводимости ζ позволяет определить параметры течения жидкости со структурной вязкостью, вычислив соответствующие величины для ньютоновского течения жидкости с постоянной текучестью φ_2, равной наибольшему значению текучести рассматриваемой структурированной среды, при данном градиенте давления

$$\varphi = \varphi_2 \zeta, \quad \langle w \rangle = \langle v \rangle \zeta, \quad \mathrm{Re} = \mathrm{Re}_H \zeta$$

Воспользуемся последним соотношением для получения зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_H \zeta = {}^1/_2 \rho R^2 \varphi_2 \zeta \tau_c = a \zeta \tau_c$$



Фиг. 7

Подставляя это выражение в формулу логарифмической зависимости (3.3), получаем соответствующий логарифмический закон сопротивления (при $\tau_c' \approx 0$)

$$1 / \Lambda = A \ln \mathrm{Re}\, \Lambda + B \qquad (3.4)$$

где

$$A = {}^4/_5\, \vartheta \tau_c'', \quad B = 1 - A \ln a \tau_c''$$

На фиг. 7 производится сопоставление результатов опытов по движению крови в круглых цилиндрических каналах с уравнением (3.4). Излом прямой соответствует установлению режима течения жидкости с постоянной текучестью.

Автор благодарит К. Д. Воскресенского и Э. Э. Кенига за руководство и помощь в работе.

Поступила 9 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Попов В. И., Хабахпашева Е. М. К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью. ПМТФ, 1966, № 1, стр. 45—49.
2. Haynes R. H., Burton A. C. Role of the non-newtonian behavior of blood in hemodynamics. Americ. J. Physiol., 1959, vol. 197, No. 5, pp. 943—950.
3. Cerny L. C. A region of newtonian flow for whole blood. Biorheology, 1963, vol. 1, No. 3, pp. 159—165.

УДК 532.54

ЗАВИСИМОСТЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ ОТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ГРАДИЕНТА ПРИ МАЛЫХ СКОРОСТЯХ ФИЛЬТРАЦИИ

Р. Скавиньски

(Краков)

Приведены экспериментальные данные о зависимости коэффициента фильтрации раствора $CaCl_2$ в пористой среде, состоящей из зерен кварца, от гидравлического градиента.

При описании течения жидкости в пористой среде фундаментальную роль играет формула

$$v = kH \qquad (1)$$

Она связывает единичный расход жидкости (скорость фильтрации) v с гидравлическим градиентом H в направлении течения. Гидравлическая проводимость (коэффи-