

УДК 532.591+517.958

## СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ПРОСТРАНСТВЕННОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

Рассматриваются нелинейные уравнения, описывающие распространение длинных волн на пространственном сдвиговом потоке тяжелой идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Методами симметричного анализа найдена 9-мерная группа преобразований, допускаемая уравнениями движения. С использованием двумерных подгрупп выписаны более простые интегродифференциальные подмодели, определяющие классы точных решений, некоторые из них проинтегрированы. Получены новые стационарные и нестационарные вращательно-симметричные решения с нетривиальным распределением скорости по глубине.

**Ключевые слова:** симметрии, точные решения, пространственные сдвиговые потоки, длинные волны.

**Введение.** Приближенные модели теории мелкой воды используются при моделировании волновых процессов в жидкостях, а также при описании крупномасштабных движений в атмосфере и океане. Математическое обоснование классического (осредненного по глубине) приближения мелкой воды дано Л. В. Овсянниковым [1]. В меньшей степени исследована длинноволновая модель, учитывающая сдвиг скорости по глубине, особенно в пространственном случае. Изучению нелинейных уравнений вихревой мелкой воды для плоскопараллельных движений посвящены работы [2–7] и др., в которых найдены бесконечные серии законов сохранения, построены классы точных решений, сформулированы условия обобщенной гиперболичности и корректности постановки задачи Коши. В работах [8, 9] рассмотрены уравнения мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке, установлено существование простых волн, построено обобщение волн Прандтля — Мейера, сформулированы условия обобщенной гиперболичности стационарных уравнений.

В данной работе проведен теоретико-групповой анализ пространственных уравнений мелкой воды для сдвиговых течений. Найдена 9-мерная группа допускаемых преобразований. Установлено, что соответствующая этим преобразованиям алгебра Ли операторов  $L_9$  изоморфна алгебре Ли допускаемых операторов для уравнений двумерных изоэнтропических движений политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ , для которой известна оптимальная система подалгебр [10]. С использованием оптимальной системы подалгебр, позволяющей классифицировать подмодели, построены и интерпретированы новые классы точных решений. Получены стационарные вращательно-симметричные решения, описывающие движения с зонами возвратного течения. Найдены устойчивые нестационарные

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00609), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5245.2006.1) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 2.15.

сдвиговые решения, описывающие процесс растекания (схлопывания) параболической полости.

**1. Математическая модель и допускаемые преобразования.** Решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + wu_z + \rho^{-1}p_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y &= 0, \quad \rho^{-1}p_z = -g, \\ u_x + v_y + w_z &= 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leq z \leq h(t, x, y)) \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$z = 0: \quad w = 0, \quad z = h(t, x, y): \quad h_t + uh_x + vh_y = w, \quad p = p_0 \quad (2)$$

описывают нестационарные трехмерные движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей над ровным дном в поле силы тяжести в приближении длинных волн. Модель (1) следует из точных уравнений Эйлера в длинноволновом пределе  $\varepsilon = H_0/L_0 \rightarrow 0$ , где  $H_0, L_0$  — характерный вертикальный масштаб и характерная длина волны. Безразмерные переменные  $t, x, y, z, u, v, w, p, h$  соответствуют времени, декартовым координатам, компонентам вектора скорости, давлению и глубине слоя жидкости; безразмерные постоянные  $\rho, g$  — плотность жидкости и ускорение свободного падения (без ограничения общности можно считать  $g = 1$ ). В силу третьего уравнения системы (1) давление в жидкости гидростатическое и распределено по глубине по закону

$$p = \rho g(h - z) + p_0$$

(учтено динамическое условие на свободной границе), что позволяет исключить давление из уравнений (1).

Для исследования симметричных свойств рассматриваемой модели кинематическое условие на свободной границе целесообразно упростить с помощью замены переменных

$$z' = \frac{z}{h(t, x, y)}, \quad w' = \frac{dz'}{dt} = \frac{1}{h} \left( w - \frac{z}{h} (h_t + uh_x + vh_y) \right).$$

В новых переменных система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + w'u_{z'} + gh_x &= 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + w'v_{z'} + gh_y = 0, \\ h_t + uh_x + vh_y + h(u_x + v_y + w'_{z'}) &= 0, \quad h_{z'} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия (2) записываются следующим образом:

$$w'|_{z'=0} = 0, \quad w'|_{z'=1} = 0. \quad (4)$$

В систему (3) включено уравнение  $h_{z'} = 0$ , что позволяет считать все искомые функции  $\mathbf{u}$  зависящими от всех независимых переменных  $\mathbf{x}$ .

Согласно общей теории группового анализа [11] определим инфинитезимальный оператор  $X$  и его первое продолжение  $Y$ :

$$X = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{x^i} + \eta^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{u^j}, \quad Y = X + \zeta_i^j \partial_{u_i^j} \quad (i, j = 1, \dots, 4).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^4) &= (t, x, y, z'), \quad \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^4) = (u, v, w', h), \\ \zeta_i^j &= D_i \eta^j - u_i^j D_i \xi^j, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} \quad \left( u_i^j = \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right), \end{aligned}$$

по повторяющимся индексам проводится суммирование. Для вычисления группы преобразований, допускаемой системой уравнений (3), подействуем на нее первым продолжением оператора  $X$  и перейдем на множество решений системы (3). В результате получим систему определяющих уравнений для искомым функций  $\xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  и  $\eta^j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , которая допускает расщепление по переменным  $u_i^j$ . Опуская весьма громоздкие промежуточные выкладки, приведем результат вычисления группы:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= a_1 t^2 + a_2 t + a_3, & \xi^2 &= a_1 t x + b_1 x + b_2 y + b_3 t + b_4, \\ \xi^3 &= a_1 t y - b_2 x + b_1 y + c_1 t + c_2, & \xi^4 &= d_1 z' + d_2(t, x, y), \\ \eta^1 &= (b_1 - a_2 - a_1 t)u + b_2 v + a_1 x + b_3, & (5) \\ \eta^2 &= -b_2 u + (b_1 - a_2 - a_1 t)v + a_1 y + c_1, \\ \eta^3 &= d_{2x}u + d_{2y}v + d_{2t} + (d_1 - a_2 - a_1 t)w', & \eta^4 &= 2(b_1 - a_2 - a_1 t)h. \end{aligned}$$

Здесь  $a_i, b_i, c_1, d_1$  — постоянные. Потребуем инвариантности граничных условий (4) относительно найденных преобразований (5), допускаемых уравнениями (3). Легко заметить, что это требование приводит к следующим ограничениям:  $d_1 = 0, d_2 = 0$ . Таким образом, система уравнений (3), (4) допускает алгебру Ли операторов  $L_9$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= t \partial_x + \partial_u, \\ X_4 &= t \partial_y + \partial_v, & X_5 &= -y \partial_x + x \partial_y - v \partial_u + u \partial_v, \\ X_6 &= x \partial_x + y \partial_y + u \partial_u + v \partial_v + 2h \partial_h, & X_7 &= \partial_t, & (6) \\ X_8 &= t^2 \partial_t + tx \partial_x + ty \partial_y + (x - tu) \partial_u + (y - tv) \partial_v - 2tw' \partial_{w'} - 2th \partial_h, \\ X_9 &= 2t \partial_t + x \partial_x + y \partial_y - u \partial_u - v \partial_v - 2w' \partial_{w'} - 2h \partial_h. \end{aligned}$$

Установлено, что уравнения мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке допускают преобразования переноса по времени и “горизонтальным” пространственным переменным, галилеевы переносы по  $x$  и  $y$ , два растяжения, вращение вокруг оси  $z$  и нетривиальное проективное преобразование.

Важным и трудоемким этапом теоретико-группового анализа модели является построение оптимальной системы подалгебр [12] для найденной алгебры Ли операторов. В данном случае можно использовать результаты исследований, проведенных в рамках программы “ПОДМОДЕЛИ” [13], реализуемой в Институте гидродинамики СО РАН. Из приведенной ниже таблицы коммутаторов следует, что алгебра Ли  $L_9$  операторов (6) разлагается в полупрямую сумму радикала  $J = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$  и фактора Леви  $N = \{X_7, X_8, X_9\}$ . При этом алгебра Ли  $L_9$  совпадает с алгеброй Ли операторов, допускаемых уравнениями двумерных изоэнтропических движений политропного газа с  $\gamma = 2$ , для которой в [10] построена оптимальная система подалгебр. Система оптимальна в том смысле, что решения, получаемые с помощью ее представителей, исчерпывают все возможные инвариантные и частично инвариантные решения с точностью до замены переменных.

Для построения и анализа точных решений модели длинных волн на пространственном сдвиговом потоке с использованием найденных симметрий (6) удобно перейти к полулагранжевым координатам  $(x, y, \lambda)$ . Этот переход осуществляется заменой “вертикальной” эйлеровой переменной  $z = \Phi(t, x, y, \lambda)$ , где функция  $\Phi(t, x, y, \lambda)$  есть решение задачи Коши [3]

$$\begin{aligned} \Phi_t + u(t, x, y, \Phi)\Phi_x + v(t, x, y, \Phi)\Phi_y &= w(t, x, y, \Phi), \\ \Phi(0, x, y, \lambda) &= \lambda h(0, x, y) \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \end{aligned}$$

Коммутаторы  $L_9$ 

Оператор	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$
$X_1$	0	0	0	0	$X_2$	$X_1$	0	$X_3$	$X_1$
$X_2$	0	0	0	0	$-X_1$	$X_2$	0	$X_4$	$X_2$
$X_3$	0	0	0	0	$X_4$	$X_3$	$-X_1$	0	$-X_3$
$X_4$	0	0	0	0	$-X_3$	$X_4$	$-X_2$	0	$-X_4$
$X_5$	$-X_2$	$X_1$	$-X_4$	$X_3$	0	0	0	0	0
$X_6$	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	0	0	0	0	0
$X_7$	0	0	$X_1$	$X_2$	0	0	0	$X_9$	$2X_7$
$X_8$	$-X_3$	$-X_4$	0	0	0	0	$-X_9$	0	$-2X_8$
$X_9$	$-X_1$	$-X_2$	$X_3$	$X_4$	0	0	$-2X_7$	$2X_8$	0

Тогда для определения искомых величин  $u(t, x, y, \lambda)$ ,  $v(t, x, y, \lambda)$  и  $H(t, x, y, \lambda) = \Phi_\lambda$  получаем интегродифференциальную систему уравнений [8]

$$u_t + uu_x + vv_y + g \int_0^1 H_x d\lambda = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + g \int_0^1 H_y d\lambda = 0, \quad (7)$$

$$H_t + (uH)_x + (vH)_y = 0.$$

Замена переменных обратима при выполнении условия  $\Phi_\lambda > 0$ .

Обозначим через  $X'_i$  допускаемые системой (7) операторы, которые соответствуют преобразованиям  $X_i$ , заданным в (6) в эйлеровых координатах. Операторы  $X'_i$  имеют вид

$$X'_i = X_i \quad (i = 1, \dots, 5, 7), \quad X'_6 = x \partial_x + y \partial_y + u \partial_u + v \partial_v + 2H \partial_H,$$

$$X'_8 = t^2 \partial_t + tx \partial_x + ty \partial_y + (x - tu) \partial_u + (y - tv) \partial_v - 2tH \partial_H,$$

$$X'_9 = 2t \partial_t + x \partial_x + y \partial_y - u \partial_u - v \partial_v - 2H \partial_H.$$

Найденные симметрии уравнений мелкой воды для пространственных сдвиговых течений и построенная в [10] оптимальная система подалгебр, содержащая 179 представителей, позволяют строить инвариантные и частично инвариантные решения модели. В случае отсутствия сдвига скорости по глубине ( $u_\lambda = v_\lambda = 0$ ,  $H = h$ ) модель (7) сводится к двумерным уравнениям изоэнтропической газовой динамики для политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$  и все решения этой модели газовой динамики являются частным классом решений более общей системы уравнений (7). Таким образом, наибольший интерес представляет получение решений с нетривиальным распределением скорости по глубине, учитывающих специфику сдвиговых потоков.

**2. Вращательно-симметричные подмодели.** В работе рассмотрены все подмодели, построенные по двумерным представителям оптимальной системы подалгебр  $\theta L_9$ , в которых один из базисных операторов является оператором вращения. Имеется пять таких представителей (всего в оптимальную систему входят 34 двумерные подалгебры). Ниже приводятся инвариантные вращательно-симметричные подмодели уравнений (7) и представления решений с использованием следующих обозначений для полярных координат, радиальной и окружной компонент вектора скорости:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad U = \frac{xu + yv}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad V = \frac{xv - yu}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1. Подмодель, построенная по подалгебре  $(X_5, X_6)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_t + \varphi^2 - \psi^2 + 2g \int_0^1 \eta d\lambda &= 0, \\ \psi_t + 2\varphi\psi &= 0, \quad \eta_t + 4\varphi\eta = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Представление решения:

$$U = r\varphi(t, \lambda), \quad V = r\psi(t, \lambda), \quad H = r^2\eta(t, \lambda).$$

2. Подмодель, построенная по подалгебре  $(X_5, X_7)$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U^2}{2} + g \int_0^1 H d\lambda \right) = \frac{V^2}{r}, \quad U \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial(rUH)}{\partial r} = 0 \quad (9)$$

$(U, V, H$  — функции переменных  $r$  и  $\lambda$ ).

3. Подмодель, построенная по подалгебре  $(X_5, X_6 + X_7)$ :

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi - 1)\varphi_\zeta + \varphi^2 - \psi^2 + g \int_0^1 (2\eta + \zeta\eta_\zeta) d\lambda &= 0, \\ \zeta(\varphi - 1)\psi_\zeta + 2\varphi\psi &= 0, \quad \zeta(\varphi - 1)\eta_\zeta + \zeta\eta\varphi_\zeta + 4\varphi\eta = 0. \end{aligned}$$

Представление решения:

$$U = r\varphi(\zeta, \lambda), \quad V = r\psi(\zeta, \lambda), \quad H = r^2\eta(\zeta, \lambda), \quad \zeta = r \exp(-t).$$

4. Подмодель, построенная по подалгебре  $(X_5, bX_6 + X_7 + X_8)$ :

$$\begin{aligned} (\varphi - b\zeta)\zeta\varphi_\zeta + b\zeta\varphi - \psi^2 + \zeta^2 + g\zeta \int_0^1 \eta_\zeta d\lambda &= 0, \\ (\varphi - b\zeta)\zeta\psi_\zeta + (\varphi + b\zeta)\psi &= 0, \quad (\varphi - b\zeta)\zeta\eta_\zeta + \eta\varphi_\zeta + (\varphi + 2b\zeta)\eta = 0. \end{aligned}$$

Представление решения:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varphi(\zeta, \lambda)}{\sqrt{t^2 + 1}} \exp(b \operatorname{arctg} t) + \frac{rt}{t^2 + 1}, \quad V = \frac{\varphi(\zeta, \lambda)}{\sqrt{t^2 + 1}} \exp(b \operatorname{arctg} t), \\ H &= \frac{\eta(\zeta, \lambda)}{t^2 + 1} \exp(2b \operatorname{arctg} t), \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{t^2 + 1}} \exp(-b \operatorname{arctg} t) \quad (b \geq 0). \end{aligned}$$

5. Подмодель, построенная по подалгебре  $(X_5, bX_6 + X_9)$ :

$$(2\varphi - (b+1)\zeta)\zeta\varphi_\zeta + (b-1)\zeta\varphi - 2\psi^2 + 2g\zeta \int_0^1 \eta_\zeta d\lambda = 0,$$

$$(2\varphi - (b+1)\zeta)\zeta\psi_\zeta + (2\varphi + (b-1)\zeta)\psi = 0, \quad (2\varphi - (b+1)\zeta)\zeta\eta_\zeta + 2\zeta\eta\varphi_\zeta + 2(b-1)\zeta\eta + 2\varphi\eta = 0.$$

Представление решения:

$$\begin{aligned} U &= \varphi(\zeta, \lambda)t^{(b-1)/2}, \quad V = \psi(\zeta, \lambda)t^{(b-1)/2}, \\ H &= \eta(\zeta, \lambda)t^{b-1}, \quad \zeta = rt^{(b+1)/2} \quad (b \geq 0). \end{aligned}$$

**3. Растекание (схлопывание) параболической полости.** Получен класс решений интегродифференциальной подмодели (8), описывающих сдвиговые движения жидкости при расширении или сужении параболической полости. Реализация режима схлопывания или растекания жидкости определяется начальным распределением поля скоростей. Установлено отсутствие комплексных характеристических корней на полученном решении, что является необходимым условием устойчивости течения.

Вводя функцию

$$w(t, \lambda) = \exp\left(\int_0^t \varphi(t', \lambda) dt'\right),$$

систему уравнений (8) можно свести к одному интегродифференциальному уравнению второго порядка

$$w_{tt} - \psi_0^2(\lambda)w^{-3} + 2gw \int_0^1 \eta_0(\lambda)w^{-4} d\lambda = 0. \quad (10)$$

При этом функции  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\eta$  выражаются через  $w$  следующим образом:

$$\varphi = w^{-1}w_t, \quad \psi = \psi_0(\lambda)w^{-2}, \quad \eta = \eta_0(\lambda)w^{-4}$$

( $\psi_0(\lambda)$ ,  $\eta_0(\lambda)$  — произвольные функции). Структура уравнения (10) в случае  $\psi_0(\lambda) = 0$  позволяет искать решение в виде  $w(t, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i(\lambda)b_i(t)$  с произвольно заданными функциями  $a_i(\lambda)$  и  $\eta_0(\lambda)$ . Тогда для определения функций  $b_i(t)$  получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$b_i'' + 2gb_i \int_0^1 \eta_0(\lambda) \left(\sum_{i=1}^n a_i(\lambda)b_i(t)\right)^{-4} d\lambda = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ниже рассматривается случай  $n = 2$  и приводится аналитическое решение в параметрической форме (в случае  $n = 1$  интегрирование уравнения приводит к решению без сдвига скорости по глубине). Функции  $a_1(\lambda)$  и  $a_2(\lambda)$  зададим таким образом, чтобы выполнялись неравенства  $l(\lambda) = a_2(\lambda)a_1^{-1}(\lambda) > 0$  и  $l'(\lambda) > 0$ , при этом  $\eta_0(\lambda) = a_1^4(\lambda)l'(\lambda)/(2g)$ . Тогда для определения функций  $b_1(t)$  и  $b_2(t)$  получаем систему

$$\begin{aligned} b_1'' + \frac{b_1}{3b_2} \left( \frac{1}{(b_1 + l_0 b_2)^3} - \frac{1}{(b_1 + l_1 b_2)^3} \right) &= 0, \\ b_2'' + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(b_1 + l_0 b_2)^3} - \frac{1}{(b_1 + l_1 b_2)^3} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $l_0 = l(0)$ ;  $l_1 = l(1)$ . Из соотношения  $b_2 b_1'' - b_1 b_2'' = 0$ , являющегося следствием уравнений (11), находим интеграл  $b_2 b_1' - b_1 b_2' = k_1 = \text{const}$ . С помощью замены переменных

$$m(\tau) = \frac{b_1(t(\tau))}{b_2(t(\tau))}, \quad F(\tau) = \frac{1}{b_2(t(\tau))}, \quad t'(\tau) = \frac{1}{F^2(\tau)}$$

при использовании указанного выше интеграла уравнения (11) принимают вид

$$m'(\tau) = k_1, \quad F''(\tau) = \frac{F(\tau)}{3} \left( \frac{1}{(m(\tau) + l_0)^3} - \frac{1}{(m(\tau) + l_1)^3} \right).$$

Первое уравнение легко интегрируется:  $m(\tau) = k_1\tau + k_2$ , а второе сводится к уравнению Риккати

$$s' + s^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(k_1\tau + k_2 + l_0)^3} - \frac{1}{(k_1\tau + k_2 + l_1)^3} \right), \quad (12)$$

где  $s(\tau) = F'(\tau)/F(\tau)$ . Для получения решения уравнений (11) в параметрическом виде

$$b_1(t) = \frac{k_1\tau + k_2}{F(\tau)}, \quad b_2(t) = \frac{1}{F(\tau)},$$

$$F(\tau) = \exp \left( s(0) + \int_0^\tau s(\tau') d\tau' \right), \quad t = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{F^2(\tau')}$$

( $k_i$  — произвольные постоянные) необходимо проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (12). Получить решение уравнения (12) в явном виде затруднительно, но легко провести его качественный анализ и численное интегрирование. Таким образом, построенный класс решений задается формулами

$$U(t, r, \lambda) = \frac{b_1'(t) + l(\lambda)b_2'(t)}{b_1(t) + l(\lambda)b_2(t)} r, \quad V(t, r, \lambda) = 0,$$

$$H(t, r, \lambda) = \frac{l'(\lambda)r^2}{2g(b_1(t) + l(\lambda)b_2(t))^4}, \quad (13)$$

где  $l(\lambda)$  — произвольная функция. Уравнение свободной границы

$$z = h(t, r) = \frac{r^2}{6gb_2(t)} \left( \frac{1}{(b_1(t) + l_0b_2(t))^3} - \frac{1}{(b_1(t) + l_1b_2(t))^3} \right)$$

является уравнением эллиптического параболоида (в каждый фиксированный момент времени). Условие  $H = \Phi_\lambda > 0$ , гарантирующее обратимость замены  $z = \Phi(t, x, y, \lambda)$ , выполнено. Отметим, что решение (13) является сдвиговым ( $U_\lambda \neq 0$ ), если произвольная постоянная  $k_1$  отлична от нуля.

Выясним, какие режимы движения описывает найденное решение. Пусть  $k_1 > 0$  и величины  $k_2 + l_i > 0$  ( $i = 0, 1$ ). Тогда за бесконечное время происходит растекание параболической полости и замедление движения потока. Глубина слоя жидкости  $h$  и радиальная компонента скорости  $U$  в каждой фиксированной точке стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . На рис. 1, 2 показано распределение глубины слоя жидкости в зависимости от радиуса и времени, на рис. 3 приведено распределение радиальной скорости по глубине. Рис. 1–3 получены при следующих параметрах:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0, \quad l(\lambda) = (\lambda + 1)/2. \quad (14)$$

При таком задании функции  $l(\lambda)$  зависимость между лагранжевой переменной  $\lambda$  и вертикальной эйлеровой переменной  $z$  имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{b_2} \left( \frac{1}{(b_1 + b_2/2)^3} - \frac{6gb_2}{r^2} z \right)^{-1/3} - \frac{b_1 + b_2/2}{b_2}.$$

Если  $k_1 < 0$  и величины  $k_2 + l_i > 0$  ( $i = 0, 1$ ), то реализуется режим схлопывания начальной параболической полости (на каждой окружности  $r = \text{const} > 0$  глубина слоя жидкости неограниченно возрастает со временем). За конечное время  $t_* = t(\tau_*)$  параболическая полость схлопывается (значение  $\tau_* = -(k_2 + l_0)/k_1$  соответствует обращению в бесконечность правой части уравнения (12)). Если  $k_2 + l_1 > 0$  и  $k_2 + l_0 < 0$ , то режим схлопывания реализуется при любом знаке постоянной  $k_1$ .

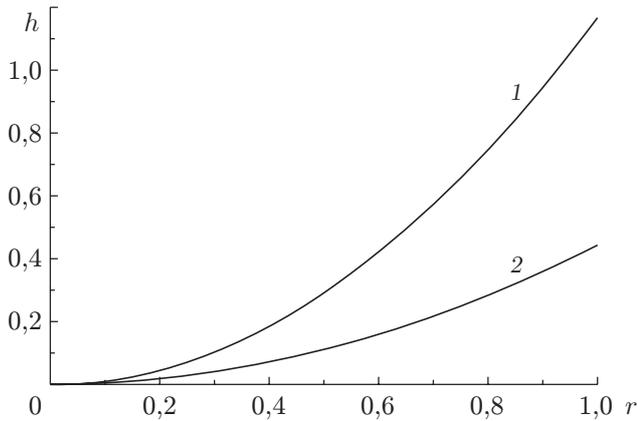


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость глубины слоя жидкости  $h$  от радиуса  $r$ :

1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 0,2$

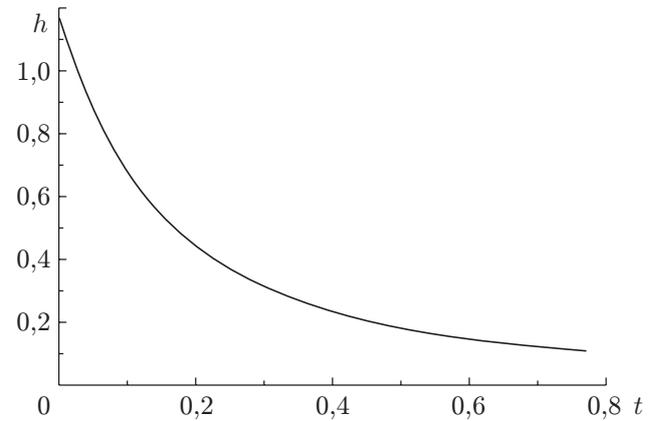


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость глубины слоя жидкости  $h$  от времени  $t$  при  $r = 1$

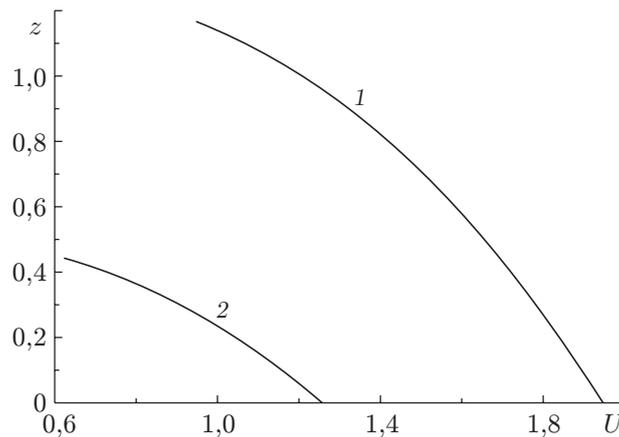


Рис. 3. Распределение радиальной скорости  $U$  по глубине при  $r = 1$ :

1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 0,2$

Проведем анализ устойчивости построенного класса нестационарных вращательно-симметричных решений. В работе [6] сформулированы необходимые и достаточные условия гиперболичности интегродифференциальной системы уравнений, описывающих плоскопараллельные сдвиговые движения идеальной жидкости. Полученные в [6] результаты легко переносятся на случай вращательно-симметричных движений, описываемых уравнениями

$$U_t + UU_r + g \int_0^1 H_r d\lambda = \frac{V^2}{r},$$

$$V_t + UV_r = -\frac{UV}{r}, \quad H_t + (UH)_r = -\frac{UH}{r}. \quad (15)$$

В случае движений с монотонным по глубине профилем скорости ( $U_\lambda \neq 0$ ) уравнения (15) являются обобщенно-гиперболическими при выполнении условий

$$\Delta \arg(\chi^+/\chi^-) = 0, \quad \chi^+ \neq 0, \quad (16)$$

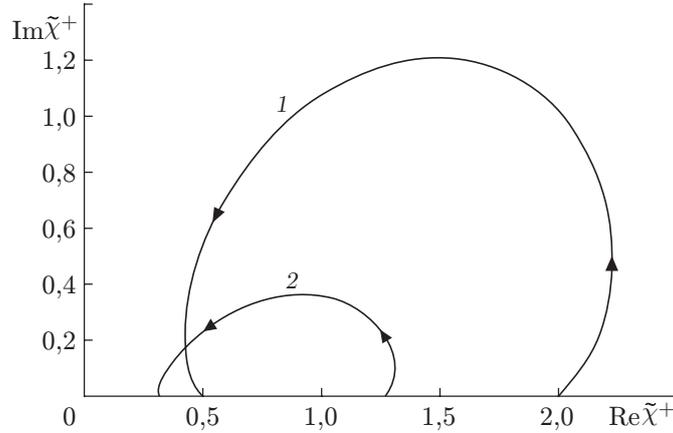


Рис. 4. Вещественная и мнимая части функции  $\tilde{\chi}^+$  при изменении  $\lambda$  от 0 до 1:  
 1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 0,2$

где

$$\chi^\pm(U(\lambda)) = 1 + \frac{g}{\Omega_1} \frac{1}{U_1 - U(\lambda)} - \frac{g}{\Omega_0} \frac{1}{U_0 - U(\lambda)} - g \int_0^1 \left( \frac{1}{\Omega(\nu)} \right)_\nu \frac{d\nu}{U(\nu) - U(\lambda)} \mp \frac{\pi i}{U_\lambda(\lambda)} \left( \frac{1}{\Omega(\lambda)} \right)_\lambda,$$

приращение аргумента вычисляется при изменении  $\lambda$  от 0 до 1 и фиксированных значениях  $t$  и  $r$ ;  $\Omega = U_\lambda/H$ ; индексами 0 и 1 отмечены значения соответствующих функций при  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$ . Условия (16) гарантируют отсутствие комплексных корней уравнения

$$\chi(c) = 1 - g \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(U - c)^2} = 0,$$

определяющего скорости распространения характеристик  $c(t, r)$  (имеется непрерывный спектр характеристических скоростей  $c = c^\lambda = U$  и дискретный спектр  $c = c^1 < \min_\lambda U$ ,  $c = c^2 > \max_\lambda U$ ).

Для проверки условий (16) используем функции  $\tilde{\chi}^+ = (\varphi_1 - \varphi)(\varphi - \varphi_0)\chi^+$ , которые в отличие от  $\chi^\pm$  не имеют полюсов в точках  $\lambda = 0, 1$ . Заметим, что функции  $\chi^\pm$ , а значит, и  $\tilde{\chi}^\pm$  не зависят от переменной  $r$ , поэтому выводы об устойчивости течения справедливы на любом конечном промежутке по  $r$ . На рис. 4 показаны вещественная и мнимая части функции  $\tilde{\chi}^+(t, \lambda)$  в различные моменты времени при изменении  $\lambda$  от 0 до 1. График функции  $\tilde{\chi}^-$  получается отражением относительно оси абсцисс. Из рис. 4 следует, что аргумент комплексной функции  $\tilde{\chi}^+$  не получает приращения при изменении  $\lambda$  (отсутствует обход вокруг нуля [14]). Данный анализ выполнен с использованием параметров (14). Из расчетов, проведенных для решения (13) с другими константами интегрирования  $k_i$  и функцией  $l(\lambda)$ , следует, что условия (16) выполняются как для режима растекания, так и для режима схлопывания параболической полости. Таким образом, на рассматриваемом решении отсутствуют комплексные характеристические корни, что является необходимым условием устойчивости течения.

**4. Стационарные вращательно-симметричные решения.** На основе подхода, развитого в [5] при исследовании плоскопараллельных течений с критическим слоем, получен класс точных решений, описывающих пространственные течения с возвратными зонами.

Интегрирование подмодели (9) приводит к решению

$$U(r, \lambda) = \pm \sqrt{2C_1(\lambda) - r^{-2}C_2^2(\lambda) - 2gh(r)}, \quad V(r, \lambda) = r^{-1}C_2(\lambda), \quad (17)$$

$$H(r, \lambda) = \frac{C_3(\lambda)}{\sqrt{2r^2C_1(\lambda) - C_2^2(\lambda) - 2gr^2h(r)}},$$

где функция  $h(r)$  находится из замыкающего соотношения

$$F(h, r) = h - \int_0^1 \frac{C_3(\lambda) d\lambda}{\sqrt{2r^2C_1(\lambda) - C_2^2(\lambda) - 2gr^2h(r)}} = 0.$$

Другое решение уравнений (9)

$$U = 0, \quad V = V(r), \quad h(r) = g^{-1} \int_0^r r'^{-1} V^2(r') dr'$$

описывает течения без сдвига скорости по глубине и далее не рассматривается. Изменение знака в (17) происходит при обращении подкоренного выражения в нуль. Рассмотрим область течения, где  $U(r, \lambda) > 0$ . В решение (17) входят три произвольные функции  $C_i(\lambda)$ . Выбором лагранжевой координаты  $\lambda$  можно добиться выполнения равенства  $C_3(\lambda) = 1$ . Для упрощения дальнейшего анализа функцию  $C_2(\lambda)$  выразим через  $C_1(\lambda)$  с использованием формулы  $C_2(\lambda) = \sqrt{C_1(\lambda) - C_1(0)}$ , а функцию  $C_1(\lambda)$  зададим таким образом, чтобы выполнялись условия

$$C_1'(\lambda) > 0, \quad 0 < C_1(0) < 3(g/2)^{2/3}. \quad (18)$$

В этом случае неравенство

$$2(C_1(\lambda) - gh)r^2 - C_1(\lambda) + C_1(0) > 0$$

(подкоренное выражение в (17) неотрицательно) выполняется для всех  $\lambda \in [0, 1]$ , если

$$r > 1/\sqrt{2}, \quad 0 < h < a \quad (a = C_1(0)/g).$$

Рассмотрим функцию  $F(h, r)$  на сечениях  $h = h_0$ ,  $h_0 \in (0, a)$ . При  $r \rightarrow \infty$  функция  $F(h_0, r)$  стремится к значению  $h_0 > 0$ , при  $r \rightarrow 1/\sqrt{2}$  — к значению  $h_0 - (C_1(0) - gh_0)^{-1/2}$ , отрицательному в силу условия (18). Кроме того, для всех  $r \in (1/\sqrt{2}, \infty)$  производная  $F_r(h_0, r) > 0$ . Поэтому на каждом сечении  $h = h_0$  уравнение  $F(h_0, r) = 0$  имеет единственный корень.

Исследуем функцию  $F(h, r)$  на сечениях  $r = r_0$ ,  $r_0 \in (1/\sqrt{2}, \infty)$ . При  $h \rightarrow 0$  функция  $F(h, r_0)$  стремится к отрицательной величине, при  $h \rightarrow a$  — к величине

$$a - \frac{1}{\sqrt{2r_0^2 - 1}} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{C_1(\lambda) - C_1(0)}},$$

положительной для достаточно больших значений  $r_0$  (интеграл  $\int_0^1 (C_1(\lambda) - C_1(0))^{-1/2} d\lambda$

сходится). Так как функция  $F(h, r_0)$  выпукла вверх ( $F_{hh} < 0$ ) и меняет знак на интервале  $h \in [0, a]$ , при больших значениях  $r_0$  уравнение  $F(h, r_0) = 0$  имеет один корень.

Найдем корень  $r = r_*$  уравнения  $F(a, r) = 0$ . Легко заметить, что

$$r_* = \sqrt{\frac{b^2 + 1}{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left( b = a \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{C_1(\lambda) - C_1(0)}} \right).$$

Поскольку  $F_{hh}(h, r_*) < 0$ ,  $F(0, r_*) < 0$ ,  $F(a, r_*) = 0$  и  $F_h(h, r_*) \rightarrow -\infty$  при  $h \rightarrow a$ , на интервале  $(0, a)$  имеется еще один корень уравнения  $F(h, r_*) = 0$ . Таким образом, существует интервал  $r_0 \in (d, r_*)$ , в котором на сечениях  $r = r_0$  уравнение  $F(h, r_0)$  имеет два корня ( $d \geq 1/\sqrt{2}$  — минимальное значение  $r$ , при котором уравнение  $F(h, d) = 0$  имеет корень).

Производная функции  $h = h(r)$ , заданной неявно уравнением  $F(h, r) = 0$ , вычисляется по формуле  $h'(r) = F_r/F_h$  и обращается в бесконечность в точке  $r = d$ , где  $F_h = 0$ . В соответствии с определением характеристик для систем уравнений с операторными коэффициентами [6] поверхность  $r = d$  является характеристикой, если на рассматриваемом решении имеет место равенство

$$F_h = 1 - gr^2 \int_0^1 [2r^2(C_1(\lambda) - gh) + C_1(0) - C_1(\lambda)]^{-3/2} d\lambda \Big|_{r=d} = 0.$$

Таким образом, решение (17) определено при  $r > d$  и ограничено характеристикой  $r = d$ .

Решение уравнения  $F(h, r) = 0$ , соответствующее функциям

$$C_1(\lambda) = g(\lambda + 1), \quad C_2(\lambda) = \sqrt{g\lambda}, \quad C_3(\lambda) = 1, \quad g = 1, \quad (19)$$

показано на рис. 5. При другом выборе функции  $C_1(\lambda)$ , удовлетворяющем условиям (18), качественно график не меняется.

Из сказанного выше следует, что при  $r > d$  уравнение  $F(h, r) = 0$  имеет две ветви решений. Нижняя ветвь  $h = h_1(r)$  определена для всех  $r > d$ ; верхняя ветвь  $h_2(r)$  определена для  $r \in [d, r_*]$ . Продолжим решение (17) с функцией  $h = h_2(r)$  в область  $r > r_*$ . В результате будет построено стационарное решение, описывающее течение с “критическим” слоем (на некоторой линии в области течения скорость  $U(r, \lambda)$  обращается в нуль). При  $r > r_*$  уравнение свободной границы  $z = h_2(r)$  зададим произвольно, потребовав при этом выполнения следующих условий:

$$h_2(r_*) = a, \quad h'_2(r_*) = 0, \quad h_2(r) \geq h_1(r). \quad (20)$$

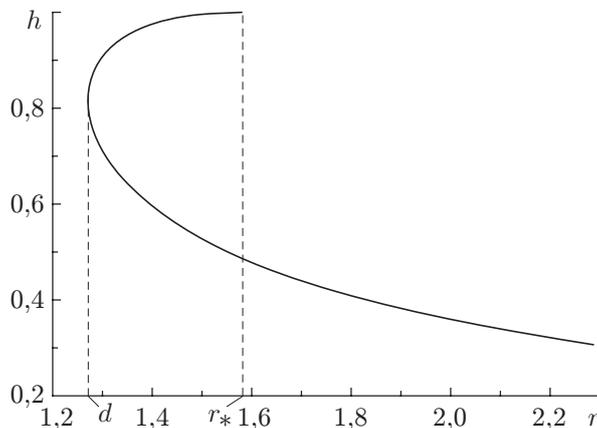


Рис. 5. Характерный график решения уравнения  $F(h, r) = 0$

Если при некотором  $r = r^* > r_*$  выполняется равенство  $h_2(r^*) = h_1(r^*)$ , то дополнительно потребуем, чтобы выполнялось равенство  $h_2'(r^*) = h_1'(r^*)$ . В этом случае при  $r > r^*$  реализуется решение (17) с выбранными выше функциями  $C_i(\lambda)$  и  $h = h_1(r)$ .

При  $r \geq r_*$  уравнением  $z = f(r)$ , где

$$f(r) = h_2(r) - \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{2r^2(C_1(\lambda) - gh_2(r)) + C_1(0) - C_1(\lambda)}}, \quad (21)$$

зададим верхнюю границу области возвратного течения, при этом нижняя граница области  $z = 0$ . В области  $0 \leq z \leq f(r)$  построим течение, обладающее следующим свойством: на некоторой кривой, лежащей в этой области, функция  $U$  меняет знак. При  $r > r_*$  решение во внешней области (от границы области возвратного течения до свободной границы) определим формулами (17) со знаком “плюс” перед квадратным корнем и функцией  $h = h_2(r)$ , а в области возвратного течения — формулами

$$U(r, \lambda) = \mp \sqrt{2(Q(\lambda) - gh_2(r))}, \quad V(r, \lambda) = 0, \quad H(r, \lambda) = -(rU)^{-1}. \quad (22)$$

Здесь  $Q(\lambda)$  — неизвестная функция; знак “минус” берется при  $0 \leq \lambda \leq \mu$ , а знак “плюс” — при  $\mu \geq \lambda \geq 0$ . Значение  $\mu(r)$  определяется уравнением  $Q(\mu) - gh_2(r) = 0$ .

Интегрированием функции  $H$  по  $\lambda$  от 0 до  $\mu$  находим высоту линии, на которой  $U = 0$  (эта линия задается уравнением  $z = f(r)/2$ ). При дальнейшем интегрировании от  $\mu$  до 0 в области выше линии  $U = 0$  получим толщину области возвратного течения. Приравнявая эту величину к известной функции  $f(r)$ , заданной формулой (21), получим интегральное уравнение для определения  $Q(\lambda)$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{r} \int_0^\mu \frac{d\lambda}{\sqrt{Q(\lambda) - gh_2(r)}} = f(r). \quad (23)$$

Выполним замену переменных  $\eta = gh_2(r)$ ,  $s = Q(\lambda)$  и введем обозначения

$$G(\eta) = \frac{r(\eta)f(r(\eta))}{\sqrt{2}}, \quad \tau(s) = -\frac{1}{Q'(\lambda(s))}.$$

Тогда уравнение (23) сводится к уравнению Абеля

$$-\int_{C_1(0)}^s \frac{\tau(s)}{\sqrt{s-\eta}} = G(\eta),$$

решение которого имеет вид

$$\tau(s) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1(0)}^s \frac{G'(\eta)}{\sqrt{\eta-s}}. \quad (24)$$

Функцию  $Q(\lambda)$  можно найти интегрированием уравнения

$$\tau(Q) dQ + d\lambda = 0, \quad Q(0) = C_1(0).$$

Таким образом, решение в области возвратного течения построено и определяется формулами (22).

Приведем пример реализации описанного выше алгоритма для построения решения с областью возвратного течения. Пусть произвольные функции, входящие в решение (17),

выбраны согласно (19). В этом случае  $d \approx 1,27$ ,  $r_* = \sqrt{5/2} \approx 1,58$ . В соответствии с (20) продолжим верхнюю ветвь решения уравнения  $F(h, r) = 0$  (см. рис. 5), задавая функцию  $h = h_2(r)$  в интервале  $r \in [r_*, r^*]$ :

$$gh_2(r) = 1 - \alpha(r - r_*)^2 \quad (\alpha > 0, \quad h_2(r^*) > h_1(r^*)).$$

Тогда при  $r > r_*$  формируется область возвратного течения с верхней границей

$$z = f(r) = \frac{1 - \alpha(r - r_*)^2}{g} - \frac{2}{2r^2 - 1} \left( \sqrt{2r^2(1 + \alpha(r - r_*)^2) - 1} - \sqrt{\alpha} r(r - r_*) \right).$$

В области внешнего течения  $f(r) \leq z \leq h_2(r)$  решение определяется формулами (17) с заданными выше функциями  $C_i(\lambda)$  и  $h = h_2(r)$ , в области возвратного течения  $0 \leq z \leq f(r)$  — формулами (22) с подлежащей определению функцией  $Q(\lambda)$ .

Для нахождения  $Q(\lambda)$  необходимо вычислить сингулярный интеграл в правой части (24). Несложный анализ показывает, что функция  $G'(\eta)$  представима в виде

$$G'(\eta) = W(\eta)(1 - \eta)^{-1/2} \quad (0 < s \leq \eta \leq C_1(0) = 1),$$

где  $W(\eta)$  — непрерывная ограниченная функция. Это представление следует из определения функции

$$G(\eta) = rf(r)/\sqrt{2}, \quad r(\eta) = r_* + \sqrt{(1 - \eta)/\alpha}.$$

Выделяя особенности и заменяя переменную  $\eta = (1 - s)\nu + s$ , преобразуем (24) к более удобному для численного интегрирования виду

$$\tau(s) = -\frac{1}{\pi} \int_s^1 \frac{W(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta - s)(1 - \eta)}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\bar{W}(\nu; s) d\nu}{\sqrt{\nu(1 - \nu)}}.$$

Результаты расчетов, представленные на рис. 6, 7, получены при  $\alpha = 1/2$ ,  $r^* = 2,29$ . На рис. 6 показаны свободная граница  $z = h_2(r)$ , граница области возвратного течения  $z = f(r)$ , линии тока с указанием направления течения (линии  $\lambda = \text{const}$ ), линия, на которой  $U = 0$ . Распределения радиальной и окружной скоростей по глубине при  $r = r_*$  (кривая 1) и  $r = r^*$  (кривая 2) показаны на рис. 7. Отметим, что при  $r > r^*$  имеется

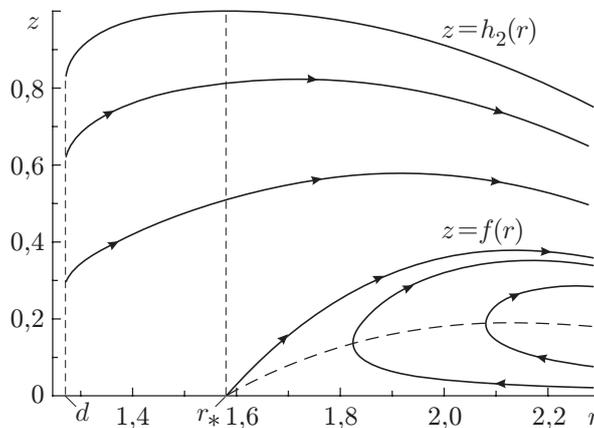


Рис. 6. Линии тока в стационарном вращательно-симметричном решении с областью возвратного течения (штриховая линия —  $U = 0$ )

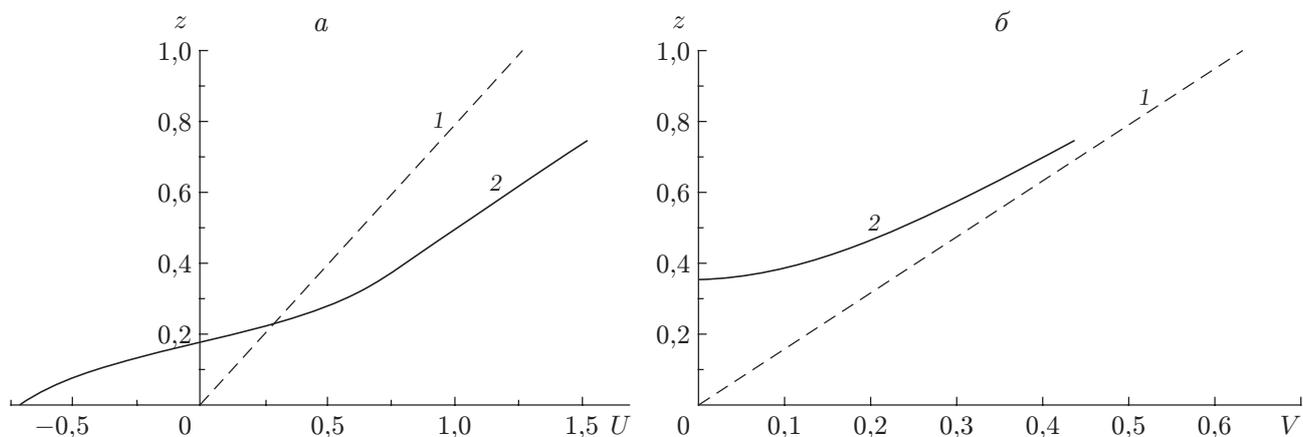


Рис. 7. Распределения радиальной (а) и окружной (б) скоростей по толщине:  
1 —  $r = 1,58$ ; 2 —  $r = 2,29$

возможность продолжить функцию  $h = h_2(r)$  с выходом на нижнюю ветвь  $h = h_1(r)$ . При этом область возвратного течения существует на конечном по  $r$  интервале.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1985.
2. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
3. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
4. **Sachdev P. L.** Exact self-similar time-dependent free surface flow under gravity // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. P. 797–802.
5. **Varley E., Blythe P. A.** Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.
6. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
7. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
8. **Тешуков В. М.** Пространственные простые волны на сдвиговом течении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.
9. **Тешуков В. М.** Пространственные стационарные длинные волны на сдвиговом потоке // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 28–39.
10. **Павленко А. С.** Симметрии и решения уравнений двумерных движений политропного газа // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 291–307. (<http://semr.math.nsc.ru>).
11. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
13. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
14. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 22/VI 2007 г.