

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

УДК 62-40

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА

© Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плешивцева

*Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: edgar.rapoport@mail.ru
yulia_pl@mail.ru*

Разработанная ранее технология многокритериальной оптимизации детерминированных систем с распределёнными параметрами параболического типа распространяется на типичные ситуации с интервальными неопределённостями параметрических характеристик управляемых объектов. В соответствии со стратегией управления по принципу наилучшего гарантированного результата на расширенном множестве аргументов, включающем все допустимые реализации неопределённых факторов, в условиях оценки заданной точности приближения к требуемому конечному состоянию системы в равномерной метрике формируются соответствующие минимаксные задачи математического программирования, решение которых находится по схеме альтернансного метода, использующего чебышевские свойства искомым экстремалей и фундаментальные закономерности предметной области. Приводится представляющий самостоятельный интерес пример многокритериальной оптимизации температурных режимов индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед операциями пластического деформирования в технологических комплексах обработки металла давлением.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, системы с распределёнными параметрами, оптимальное управление, минимаксные оценки, интервальная неопределённость, альтернансный метод.

DOI: 10.15372/AUT20190401

Введение. Реальные условия оценки эффективности функционирования технических объектов по ряду конфликтующих друг с другом показателей качества приводят к актуальной задаче многокритериального управления (ЗМУ), для решения которой используется целый ряд известных методов, базирующихся на предварительной параметризации искомым управляющих воздействий, различных способах однокритериальной свёртки компонентов векторной целевой функции и последующей редукции к соответствующим задачам математического программирования (ЗМП) с учётом всех изначально заданных ограничений [1–5].

В [6] на основе подобного подхода предложена конструктивная технология решения отличающейся значительной спецификой ЗМУ объектами с распределёнными параметрами (ОРП), для которых формируемая в итоге ЗМП принципиально усложняется и принимает вид задачи полубесконечной оптимизации (ЗПО) с бесконечным числом ограничений в типичных для приложений ситуациях их оценки в равномерной метрике [7, 8].

Указанная технология разработана применительно к формальным моделям управляемых процессов с полным объёмом информации об их свойствах, которые описываются уравнениями в частных производных параболического типа.

В связи с этим возникает представляющая самостоятельный интерес ЗМУ ОРП в практически всегда реализуемых условиях неопределённости характеристик объекта, обусловленной, прежде всего, неточным знанием его параметров и действием неконтролируемых возмущений [9–14]. В типичных ситуациях речь идёт об ограниченной (интервальной) неопределённости неизвестных величин, вся информация о которых исчерпывается заданным диапазоном изменения их возможных значений.

В данной работе полученные в [6] результаты распространяются на ЗМУ ОРП в условиях интервальной неопределённости значений параметров объекта. В этих целях формулируется задача управления по принципу наилучшего гарантированного результата соответствующим ансамблем траекторий движения ОРП и предлагается конструктивный метод её решения, опирающийся на разработанный альтернативный метод решения формулируемых ЗПО [7, 8].

Постановка задачи. Пусть управляемая функция состояния $Q(X, t)$ объекта с определёнными параметрами описывается в зависимости от времени $t \in (0, t^*)$ и пространственных координат $X \in V$, $X = (x_i)$, $i = \overline{1, m}$, $1 \leq m \leq 3$, в пределах односвязной области V m -мерного евклидова пространства E^m с кусочно-гладкой границей S линейным неоднородным уравнением в частных производных параболического типа с постоянными во времени коэффициентами

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{i=1}^m a_i(X) \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^m b_i(X) \frac{\partial Q}{\partial x_i} + C(X)Q + q_V(X)u_V(t), \quad (1)$$

начальными и граничными условиями

$$Q(X, 0) = f(X), \quad X \in \bar{V} = V \cup S, \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial N} + \beta Q = q_S(X)u_S(t), \quad X \in S, \quad (3)$$

сосредоточенными внутренними $u_V(t)$ или (и) граничными $u_S(t)$ управляющими воздействиями при изначально фиксируемых функциях $q_V(X)$ и $q_S(X)$ их пространственного распределения.

Здесь N — вектор внешней нормали к S ; $\beta = \text{const} \geq 0$; t^* — конечный момент времени процесса управления; дифференциальный оператор в правой части (1) самосопряжённый; функция $f(X)$ интегрируема с квадратом на V и коэффициенты $a_i(X)$, $b_i(X)$, $C(X)$ являются известными достаточно гладкими функциями своих аргументов, причём не все $a_i(X)$ в (1) одновременно равны нулю.

Управляющие воздействия $u(t) \in \{u_V(t), u_S(t)\}$ должны быть подчинены ограничениям

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t \in [0, t^*]. \quad (4)$$

В бесконечномерном пространстве временных мод $\bar{Q}_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, управляемой величины $Q(x, t)$ модель объекта (1)–(3) описывается системой дифференциальных уравнений [6]:

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + K_{Vn}u_V(t) + K_{Sn}u_S(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{f}_n, \quad (5)$$

$$Q(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t)\varphi_n(X), \quad (6)$$

где $\varphi_n(X)$ и μ_n^2 — собственные функции и собственные числа начально-краевой задачи (1)–(3); \bar{f}_n — моды разложения $f(X)$ в ряд вида (6); K_{Vn}, K_{Sn} — известные коэффициенты, определяемые по заданным функциям $q_V(X)$ и $q_S(X)$ в (1), (3).

В характерных условиях интервальной неопределённости начального состояния объекта $\bar{Q}(0) = (\bar{Q}_n(0))$ и вектора w его неизменных во времени параметрических характеристик, с точностью до которых определены коэффициенты a_i, b_i, C и β в (1), (3), вся информация об этих величинах исчерпывается сведениями об их принадлежности заданным компактными множествам B и W :

$$\bar{Q}(0) \in B, \quad w \in W. \quad (7)$$

Каждой реализуемой согласно (7) паре значений неопределённых факторов $y = (\bar{Q}(0), w) \in Y = B \times W$ соответствует определяемая решением системы уравнений (5) при любом допустимом управлении $u(t)$ траектория процесса $\bar{Q}(t, u, y) = (\bar{Q}_n(t, u, y))$, $t \in [0, t^*]$, и управляемая функция состояния вида (6)

$$Q(X, u, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t, u, y) \varphi_n(X, y). \quad (8)$$

Типичные для приложений требования достижения заданной точности ε_0 равномерного приближения конечного состояния объекта $Q(X, u, y, t^*)$ к заранее фиксируемому пространственному распределению $Q_c(X) = Q_c = \text{const}$ должны быть выполнены в рассматриваемых условиях для всех $y \in Y$, что приводит к следующему определению целевого множества управляемого процесса [6–9]:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}(u) &= \max_{y \in Y} \left[\max_{X \in \bar{V}} |Q(X, u, y, t^*) - Q_c| \right] = \\ &= \max_{y \in Y} \left[\max_{X \in \bar{V}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t^*, u, y) \varphi_n(X, y) - Q_c \right| \right] \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть далее качество процесса управления оценивается подобно [6] по q различным интегральным критериям оптимальности $\tilde{I}_p(u, y)$, $p = \overline{1, q}$, $q > 1$, величина которых зависит от неопределённых факторов $y \in Y$. Тогда стратегия управления по принципу достижения наилучшего гарантированного результата приводит к частным задачам минимаксной оптимизации по каждому из критериев I_p :

$$I_p(u) = \max_{y \in Y} \tilde{I}_p(u, y) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} f_{0p}(\bar{Q}_p(t, u, y), u) dt \rightarrow \min_{u \in \Omega_p}, \quad p = \overline{1, q}. \quad (10)$$

Здесь f_{0p} — известные достаточно гладкие функции своих аргументов; \bar{Q}_p — вектор временных мод \bar{Q}_{pn} , $n = 1, 2, \dots$, управляемой величины $Q_p(X, t)$ в каждой задаче (10); множество Ω_p управляющих воздействий в (10) определяется наряду с ограничением (4) подобными (9) требованиями равномерного приближения $Q_p(X, u, y, t^*)$ к Q_c с заданной точностью ε_{0p} :

$$\Omega_p = \left\{ u: u \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad \Phi_p(u) = \max_{y \in Y} \max_{X \in \bar{V}} |Q_p(X, u, y, t^*) - Q_c| = \right.$$

$$= \max_{y \in Y} \left[\max_{X \in \bar{V}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{pn}(t^*, u, y) \varphi_n(X, y) - Q_c \right| \right] \leq \varepsilon_{0p} \}. \quad (11)$$

При необходимости оценки эффективности процесса управления одновременно по всем показателям качества I_p в (10) возникает подобно [6] многокритериальная задача определения управляющих воздействий для объекта управления (5), (6), обеспечивающих минимизацию (задачи на максимум I_p , $p \in \{\overline{1, q}\}$, приводят к минимизации $-I_p$) всех I_p на множествах (11):

$$I_{\Sigma} \rightarrow \min_{u \in \Omega_{\Sigma}}; \quad I_{\Sigma} = (I_p(u)), \quad p = \overline{1, q}; \quad \Omega_{\Sigma} = \{u: u \in [u_{\min}, u_{\max}]; \Phi_{\Sigma}(u) \leq \varepsilon_0\} \quad (12)$$

с учётом ограничения (9), где величина ε_0 априори фиксируется исходя из неравенств $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{0p}$, $p = \overline{1, q}$, для заданных значений ε_{0p} в (11) и гарантирует тем самым выполнение всех условий (11) в частных задачах оптимизации.

Редукция к однокритериальной задаче оптимального управления и параметризация управляющих воздействий. Аналогично [6] переход от I_p в (10), (11) к относительным равнозначным оценкам [3, 4]

$$\lambda_p(u) = \frac{I_p(u) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*}, \quad 0 \leq \lambda_p(u) \leq 1, \quad p = \overline{1, q}; \quad I_p^* = \min_{u \in \Omega_p} I_p(u); \quad I_p^0 = \max_{u \in \Omega_p} I_p(u) \quad (13)$$

приводит к однокритериальной вариационной задаче управления объектом (5) с интегральным функционалом качества

$$I = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} \lambda^0 dt = \lambda^0 \rightarrow \min_{u \in \Omega_{\Sigma}}, \quad \lambda^0 = \text{const}, \quad (14)$$

ограничениями

$$\lambda_p(u) \leq \lambda^0, \quad p = \overline{1, q}, \quad (15)$$

и минимизируемым параметром λ^0 , решение которой априори принадлежит множеству Парето исходной ЗМУ и может рассматриваться в качестве искомого оптимального управляющего воздействия $u^*(t)$ в многокритериальной задаче (12).

Эквивалентный характер структуры оптимального управления ансамблем траекторий $Q(X, u, y, t)$, $y \in Y$, движения объекта и отдельной траекторией $Q(X, u, y^0, t)$, $y^0 = \text{const} \in Y$, [15] во многих случаях позволяет определить аналогично [6] с использованием стандартных процедур принципа максимума Понтрягина параметрическое описание $u^*(t)$ с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = (\Delta_i^{(N)})$, $i = \overline{1, N}$, упорядоченной последовательности конечного числа N параметров $\Delta_1^{(N)}, \Delta_2^{(N)}, \dots, \Delta_N^{(N)}$, непосредственно характеризующих поведение $u^*(t)$ во времени [7, 8, 16]. Интегрирование уравнений объекта (5) с параметризованным управлением $u(\Delta^{(N)}, t)$ приводит к представлению критериев оптимальности I_p , \tilde{I}_p в (10), λ_p в (13) и конечных состояний объекта в (9) в виде явных зависимостей $\tilde{I}_p(\Delta^{(N)}, y)$, $I_p(\Delta^{(N)})$, $\lambda_p(\Delta^{(N)})$, $Q(X, y, \Delta^{(N)})$ от $\Delta^{(N)}$, если считать известными значения I_p^* и I_p^0 в (13). Размерность N вектора $\Delta^{(N)}$ устанавливается по известным правилам в зависимости от значения ε_0 в (12) или заведомо фиксируется возможностями технической реализации $\Delta^{(N)}$ параметризуемых управляющих воздействий [7, 8, 16, 17].

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации. В результате параметрическое представление $u(\Delta^{(N)}, t)$ искомых управлений обеспечивает согласно (9) точную редукцию задачи (14), (15) к задаче минимизации целевой функции

$$I = \lambda^0(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \quad (16)$$

конечного числа N переменных $\Delta_i^{(N)}$, $i = \overline{1, N}$, на допустимом множестве $G_N \ni \Delta^{(N)}$ их изменения с бесконечным числом ограничений

$$\Phi_\Sigma(\Delta^{(N)}) = \max_{z \in Z} |Q(z, \Delta^{(N)}) - Q_c| \leq \varepsilon_0; \quad z = (X, y), \quad Z = \bar{V} \times Y, \quad (17)$$

для всех $z \in Z$, дополняемых в соответствии с (15) неравенствами

$$\lambda_p(\Delta^{(N)}) = \max_{y \in Y} \frac{\tilde{I}_p(\Delta^{(N)}, y) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*} \leq \lambda^0, \quad p = \overline{1, q}. \quad (18)$$

Эта задача существенно отличается от рассмотренной в [6] для детерминированных моделей распределённого объекта, во-первых, ограничением на функцию максимума в (17), определяемую на расширенном множестве аргументов, которое включает кроме пространственных аргументов $X \in \bar{V}$ все допустимые реализации неопределённых факторов $y \in Y$, и, во-вторых, вычислением $\lambda_p(\Delta^{(N)})$ в (18) по максимальной величине $\tilde{I}_p(\Delta^{(N)}, y)$ на множестве $y \in Y$. Как непосредственно следует из (14), (15), сформулированная ЗПО (16)–(18) эквивалентна минимаксной задаче без дополнительных условий (18) с критерием оптимальности

$$I_1 = \max_{p=\overline{1, q}} \lambda_p(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \quad (19)$$

и ограничением (17).

Рассматривая вместо (19) в соответствии с (18) критерий оптимальности

$$I_{p_1} = \lambda_{p_1}(\Delta^{(N)}) = \max_{y \in Y} \tilde{\lambda}_{p_1}(\Delta^{(N)}, y) = \max_{y \in Y} \frac{\tilde{I}_{p_1}(\Delta^{(N)}, y) - I_{p_1}^*}{I_{p_1}^0 - I_{p_1}^*} \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \quad (20)$$

последовательно для всех $p_1 = \overline{1, q}$, получим ряд задач полубесконечной оптимизации (17), (20) рассмотренного в [7] типового вида, на решениях которых $\bar{\Delta}^{(N)} = \Delta^{[p_1]}$, определяемых по схеме альтернансного метода [7, 8], вычисляются $\lambda_p(\Delta^{[p_1]}) \forall p = \overline{1, q}$. За решение $\bar{\Delta}_*^{(N)}$ минимаксной задачи (17), (19) принимается $\Delta^{[p_1^*]}$ при таких $p_1 = p_1^*$, для которых выполняются неравенства $\lambda_p(\Delta^{[p_1^*]}) \leq \lambda_{p_1^*}(\Delta^{[p_1^*]})$ для всех $p = \overline{1, q}$.

Оптимальная величина искомого вектора параметров $\bar{\Delta}^{(N)}$ в каждой задаче (17), (20) обладает усложняемыми по сравнению с детерминированными моделями альтернансными свойствами [7, 8], согласно которым в условиях малостеснительных допущений в некоторых точках $z_j^0 = (X_j^0, y_j^0) \in Z$, $j = \overline{1, R_X}$, и $\tilde{y}_i^0 \in Y$, $i = \overline{1, R_y}$, выполняются равенства

$$|Q(z_j^0, \bar{\Delta}^{(N)}) - Q_c| = \varepsilon_0, \quad j = \overline{1, R_X}, \quad (21)$$

$$\lambda_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}) = \tilde{\lambda}_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}, \tilde{y}_i^0), \quad i = \overline{1, R_y}. \quad (22)$$

Значения $\Phi_{\Sigma}(\bar{\Delta}^{(N)})$ в (17), равные ε_0 , могут достигаться в разных точках X_j^0 для различных значений неопределённых факторов y_j^0 , а координаты \tilde{y}_i^0 отличаются от y_j^0 в (21).

Суммарное число $R_X + R_y$ точек z_j^0 и \tilde{y}_i^0 определяется в зависимости от величины ε_0 в (17) следующими соотношениями [7]:

$$R_X + R_y = N + 1, \quad \text{если} \quad \min \varepsilon(\Delta^{(N)}) < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}, \quad (23)$$

$$R_X = N + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon_0 = \min \varepsilon(\Delta^{(N)}), \quad (24)$$

$$R_y = N + 1, \quad \text{если} \quad \varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} = \Phi_{\Sigma}(\tilde{\Delta}^{(N)}), \quad \tilde{\Delta}^{(N)} = \arg \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \lambda_{p_1}(\Delta^{(N)}), \quad (25)$$

где

$$\min \varepsilon(\Delta^{(N)}) = \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \left[\max_{z \in Z} |Q(z, \Delta^{(N)}) - Q_c| \right], \quad (26)$$

и в большинстве прикладных задач по требуемой величине ε_0 выполняются первые два правила (23), (24).

В достаточно общем случае (23) при наличии дополнительной информации из предметной области о конфигурации зависимостей $Q(z, \bar{\Delta}^{(N)})$ от $z \in Z$, позволяющей идентифицировать значения z_j^0 и знаки разностей $Q(z_j^0, \bar{\Delta}^{(N)}) - Q_c$ в (21), равенства (21), (22) вместе с условиями

$$\frac{\partial}{\partial X} Q(z_{jv}^0, \bar{\Delta}^{(N)}) = 0, \quad v = \overline{1, R_{X1}}, \quad R_{X1} \leq R_X, \quad z_{jv}^0 \in \{z_j^0\}, \quad X_{jv}^0 \in \text{int } \bar{V}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{\lambda}_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}, \tilde{y}_{ik}^0) = 0, \quad k = \overline{1, R_{y1}}, \quad R_{y1} \leq R_y, \quad \tilde{y}_{ik}^0 \in \{\tilde{y}_i^0\}, \quad \tilde{y}_{ik}^0 \in \text{int } Y \quad (28)$$

существования экстремума функций $Q(z, \bar{\Delta}^{(N)})$ и $\tilde{\lambda}_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}, y)$ в точках $X_{jv}^0 \in \text{int } \bar{V}$ и $\tilde{y}_{ik}^0 \in \text{int } Y$ трансформируются с учётом соотношений (23) к разрешаемой известными численными методами замкнутой системе $R_X + R_y + R_{X1} + R_{y1}$ уравнений относительно искомых параметров $\bar{\Delta}_i^{(N)}$, $i = \overline{1, N}$, величины $\lambda_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)})$, промежуточных неизвестных X_{jv}^0 , $v = \overline{1, R_{X1}}$, \tilde{y}_{ik}^0 , $k = \overline{1, R_{y1}}$, при заранее фиксируемой величине ε_0 [7].

Специфическая проблема выявления характера распределения $Q(z, \bar{\Delta}^{(N)})$ на множестве $Z \ni z$ и значений $\tilde{\lambda}_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}, y)$, $y \in Y$, в целях редукции равенств (21), (22), (27), (28) к расчётным системам уравнений часто может быть решена на основе свойств результирующих состояний ОРП для детерминированных моделей объекта и базовых закономерностей конкретных исследуемых процессов [7–9, 17]. Далее в соответствии с принятой схемой перехода от задачи (16)–(18) к ряду задач (17), (20) находится искомое решение исходной многокритериальной задачи $\bar{\Delta}_*^{(N)} = \Delta^{[p_1^*]}$ и определяется оптимальная величина критерия оптимальности (16)

$$\lambda^0(\bar{\Delta}_*^{(N)}) = \lambda_{p_1^*}(\bar{\Delta}^{(N)}) = \lambda_{p_1^*}(\Delta^{[p_1^*]}), \quad \lambda_p(\Delta^{[p_1^*]}) \leq \lambda_{p_1^*}(\Delta^{[p_1^*]}), \quad p = \overline{1, q},$$

согласно (18).

В типичном для приложений частном случае $\varepsilon_0 = \min \varepsilon(\Delta^{(N)})$ [6–8, 16, 17] задача (16)–(18) существенно упрощается и трансформируется в минимаксную задачу

$$\Phi_{\Sigma}(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \quad (29)$$

без ограничений, которая, в свою очередь, сводится согласно (24) к редукции равенств (21), (27) в расчётную систему уравнений альтернансного метода, разрешаемую относительно всех искомым неизвестных, включая в данном случае априори не заданную величину $\min \varepsilon(\Delta^{(N)})$. По найденному вектору $\bar{\Delta}^{(N)} = \bar{\Delta}_*^{(N)}$ и известным зависимостям $\lambda_p(\Delta^{(N)})$ в (18) вычисляется достигаемое в условиях (24) минимальное значение λ_{\min}^0 целевой функции (16):

$$\lambda_{\min}^0 = \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \lambda^0(\Delta^{(N)}) = \lambda^0(\bar{\Delta}_*^{(N)}) = \max_{p=\overline{1, q}} \lambda_p(\bar{\Delta}_*^{(N)}). \quad (30)$$

В итоге решение по описанной схеме применения альтернансного метода специальных задач математического программирования (17), (20) или (29) исчерпывает решение исходной многокритериальной задачи (12).

Решение задач оптимального управления по частным критериям качества.

Переход к относительным равнозначным оценкам (13) частных критериев оптимальности (10) и вся последующая методика решения ЗМУ становятся возможными только в условиях предварительного вычисления значений I_p^* и I_p^0 в (13) для всех $p = \overline{1, q}$.

Частные однокритериальные задачи оптимизации (10), (11) после параметризации управляющих воздействий с использованием аппарата принципа максимума приводятся к задачам полубесконечной оптимизации, аналогичным (16), (17):

$$I_p([\Delta^{(N)}]_p) \rightarrow \min_{[\Delta^{(N)}]_p}; \quad \Phi_p([\Delta^{(N)}]_p) = \max_{z \in Z} |Q_p(z, [\Delta^{(N)}]_p) - Q_c| \leq \varepsilon_{0p}, \quad (31)$$

которые подобно [6] следует рассматривать на элементах $[\Delta^{(N)}]_p$ подмножества $\{[\Delta^{(N)}]_p\} \subset \{\Delta^{(N)} \in G_N\}$ искомым значений $\Delta^{(N)}$ в исследуемой многокритериальной задаче для каждого $p \in \overline{1, q}$ в (31).

Задачи (31) решаются в условиях (23), (24) по описанной схеме альтернансного метода на основе равенств вида (21), (22), (27), (28) с заменой Q , ε_0 , p_1 величинами Q_p , ε_{0p} , p . На решениях $\Delta^{[p]} \in \{[\Delta^{(N)}]_p\}$ этих задач вычисляются искомые величины в соответствии с определением I_p в (10):

$$I_p^* = I_p(\Delta^{[p]}), \quad p = \overline{1, q}. \quad (32)$$

В типичном случае:

$$\varepsilon_{0p} = \min \varepsilon([\Delta^{(N)}]_p) = \min_{[\Delta^{(N)}]_p} \left[\max_{z \in Z} |Q_p(z, [\Delta^{(N)}]_p) - Q_c| \right], \quad p = \overline{1, q}, \quad (33)$$

задача (31) опять сводится к виду (29)

$$\Phi_p([\Delta^{(N)}]_p) \rightarrow \min_{[\Delta^{(N)}]_p}, \quad p = \overline{1, q}, \quad (34)$$

и её решение аналогично (29) находится в соответствии с (24) исходя из двух равенств (21) и (27) с последующим вычислением I_p^* по формуле (32). Отсюда, в частности, следует

согласно (26), (33), что при $\varepsilon_0 = \min \varepsilon(\Delta^{(N)})$ в (9) заведомо выполняется требуемое условие $\varepsilon_{0p} \geq \varepsilon_0$, $p = \overline{1, q}$, при постановке многокритериальной задачи (12), если в итоге выбрать в (31)

$$\varepsilon_{0p} = \max(\varepsilon_0, \min \varepsilon([\Delta^{(N)}]_p)) \quad (35)$$

и заново решить задачу (31) по схеме альтернативного метода в случае, когда согласно (35) $\varepsilon_{0p} = \varepsilon_0$ для некоторых $p \in \{\overline{1, q}\}$.

Значения I_p^0 могут быть найдены аналогичным образом по их определениям в (13), однако они могут быть установлены проще из приближённых оценок $\max_{\Delta^{(N)}} I_p(\Delta^{(N)})$ в (18), например, по алгоритму [6]

$$I_k^0 = \max_{p=\overline{1, q}, p \neq k} I_k(\Delta^{[p]}), \quad k = \overline{1, q}. \quad (36)$$

Многокритериальная задача управления не полностью определённым объектом технологической теплофизики. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим многокритериальную задачу управления процессом индукционного нагрева металлических полуфабрикатов [6] в технологических комплексах обработки металла давлением [17–19] при неполном объёме информации об управляемом объекте.

Пусть температурное поле $Q(x, t)$ нагреваемого изделия цилиндрической формы в процессе индукционного нагрева описывается в зависимости от радиальной координаты x и времени t неоднородным одномерным уравнением теплопроводности в относительных единицах вида (1)–(3) [17, 18]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + g_V(x)u_V(t), \quad 0 < t < t^*, \quad 0 < x < 1, \quad (37)$$

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \beta Q(1, t) = \beta Q_0. \quad (38)$$

Здесь заданный коэффициент $\beta = \text{const} > 0$ определяет уровень тепловых потерь в окружающую среду с температурой Q_0 на внешней поверхности цилиндра $x = 1$; $g_V(x)$ — известная функция радиального распределения электромагнитных источников тепла [17, 18]; $u_V(t)$ — суммарная удельная мощность внутреннего тепловыделения, рассматриваемая в качестве сосредоточенного управляющего воздействия, стеснённого ограничением (4):

$$0 \leq u_V(t) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t^*. \quad (39)$$

В характерных условиях интервальной неопределённости параметрических характеристик объекта (37), (38) вся информация о неизменных во времени значениях Q_0 и β в (38) исчерпывается сведениями о границах диапазона их возможных изменений [17, 18], что приводит к определению вектора y неопределённых факторов:

$$y = (Q_0, \beta) \in Y = \{y: Q_{0\min} \leq Q_0 \leq Q_{0\max}; \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}\}. \quad (40)$$

Пусть далее качество процесса нагрева заданной продолжительности t^* , превышающей длительность оптимального по быстродействию управления объектом (37)–(40), описывается тремя рассматриваемыми в роли частных критериев оптимальности типичными технико-экономическими показателями, характеризующими расход энергии на нагрев

($I_1(u_V)$), потери металла на окисление (в окалину) ($I_2(u_V)$) и оцениваемую в равномерной метрике точность приближения к заданной конечной температуре ($I_3(u_V)$) [6, 17, 18], которые записываются в форме (10) с учётом неопределённых факторов в (40):

$$I_1(u_V) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} u_V(y, t) dt \rightarrow \min_{u \in \Omega_1}, \quad (41)$$

$$I_2(u_V) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} f_{02}(Q(1, u, y, t)) dt \rightarrow \min_{u \in \Omega_2}, \quad (42)$$

$$f_{02}(Q(1, u, y, t)) = \begin{cases} 0, & Q(1, u, y, t) < Q_h, \\ (Q(1, u, y, t) - Q_h)^{r+1}, & Q(1, u, y, t) \geq Q_h, \end{cases}$$

$$I_3(u_V) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} \frac{\tilde{\varepsilon}(y)}{t^*} dt = \max_{y \in Y} \tilde{\varepsilon}(y) \rightarrow \min_{u_V \in \Omega_3}, \quad \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = 0, \quad (43)$$

где допустимые множества изменений Ω_p , $p = \overline{1, 3}$, определяются согласно (11); Q_h — известная температурная граница процесса окисления; $Q(1, u, y, t)$ — температура поверхности нагреваемой заготовки; r — заданное число [17, 18]; требуемая конечная температура $Q_c > Q_h$; $I_3(u_V)$ в (43) представляет собой эквивалентную форму интегрального функционала в минимаксной задаче (34) [6].

Соответствующая многокритериальная задача управления приводится к виду (12) с частными критериями $I_p(u_V)$ в (41)–(43), где конечное температурное состояние $Q(x, u, y, t^*)$ в выражениях (9), (12) для вычисления Φ_Σ представляется разложением (8) в ряд по собственным функциям Бесселя нулевого порядка $\varphi_n(x) = J_0(\mu_n x)$ [6, 18]:

$$Q(x, u, y, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2 J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \beta^2) J_0^2(\mu_n)} \bar{Q}_n(t^*, u, y). \quad (44)$$

Здесь собственные числа μ_n^2 находятся при заданном значении коэффициента β по корням μ_n уравнения [17, 18]

$$\beta J_0(\mu_n) - \mu_n J_1(\mu_n), \quad n = 1, \dots, \quad (45)$$

где $J_1(\mu_n)$ — функция Бесселя первого порядка, а модальные составляющие \bar{Q}_n определяются решениями системы уравнений (5) при $u_S(t) = 0$, создавая достаточно сложную зависимость результирующего температурного поля от вектора $y = (Q_0, \beta)$.

Подобно [6, 17, 18] можно показать, что переход от (12) к однокритериальной версии (14), (15) управления временными модами $Q(x, t)$ и последующее применение аппарата принципа максимума Понтрягина для любой допустимой пары значений (Q_0, β) по схеме предлагаемого метода решения многокритериальной задачи приводит к просто реализуемой программе оптимального управления (рис. 1, а):

$$u_V^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ u_0(t, t_1), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t_2 < t \leq t^*, \end{cases} \quad (46)$$

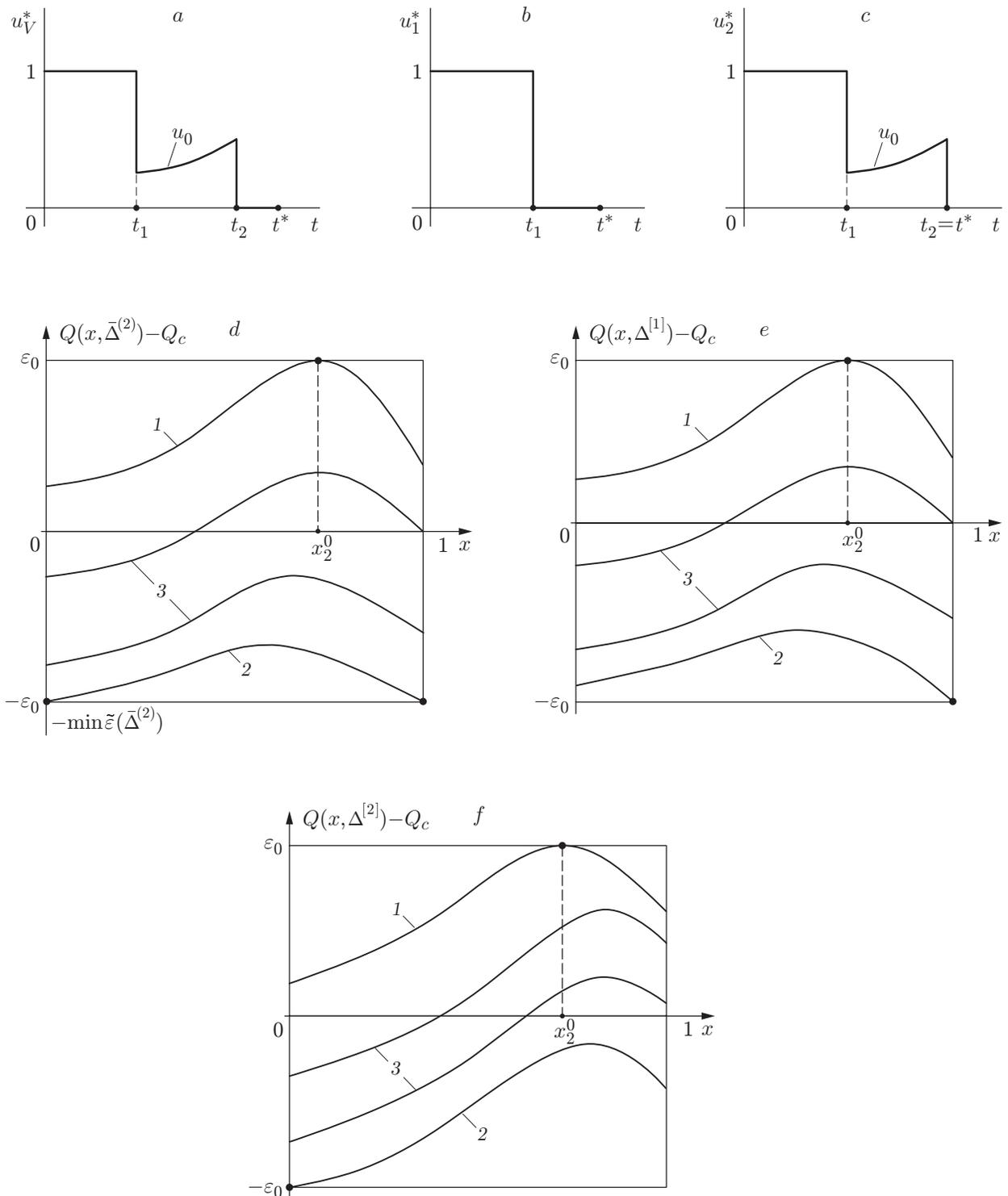


Рис. 1. Структурные характеристики оптимального процесса: *a* — для $u_V^*(t)$; *b*, *c* — для оптимальных управлений $u_p^*(t)$ по критериям I_p ; *d*, *e*, *f* — формы кривых пространственного распределения конечных температурных состояний в процессе многокритериальной оптимизации (1 — $Q_0 = Q_{0\max}$, $\beta = \beta_{\min}$; 2 — $Q_0 = Q_{0\min}$, $\beta = \beta_{\max}$; 3 — $Q_{0\min} < Q_0 < Q_{0\max}$, $\beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}$)

содержащей единственный участок особого [20] управления $u_0(t, t_1)$ длительностью $t_2 - t_1$ при заданной величине $t^* > t_2$, где $u_0(t, t_1)$ в первом приближении описывается известной функцией экспоненциального вида.

В итоге при фиксированной величине t^* оптимальное управление $u_V^*(t)$ однозначно характеризуется его параметрическим представлением с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = \Delta^{(2)} = (\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ параметров $\Delta_1^{(2)} = t_1$, $\Delta_2^{(2)} = t_2$ — начального и конечного моментов особого участка. Последующее интегрирование модели объекта вида (5), (44) с параметризованным управлением $u_V(\Delta^{(2)}, t)$ обеспечивает редукцию к задаче полубесконечной оптимизации вида (16)–(18) с явными выражениями для $Q(z, \Delta^{(2)})$, $\tilde{I}_p(\Delta^{(2)}, y)$, $\lambda_p(\Delta^{(2)})$, $p = \overline{1, 3}$, где $z = (x, Q_0, \beta)$; $Z = [0, 1] \times Y$.

Ограничимся далее типичной ситуацией $\varepsilon_0 = \min \varepsilon(\Delta^{(2)})$ в (17), (35), при которой ЗПО (16)–(18) сводится к минимаксной задаче вида (29):

$$\Phi_{\Sigma}(\Delta^{(2)}) = \max_{z \in Z} |Q(z, \Delta^{(2)}) - Q_c| \rightarrow \min_{\Delta^{(2)} \in G_2}, \quad (47)$$

$$\Delta^{(2)} = (t_1, t_2), \quad G_2 = \{t_1, t_2: 0 < t_1 < t_2 < t^*\}.$$

Здесь $Q(z, \Delta^{(2)})$ представляется в виде следующей из (44) явной функции своих аргументов:

$$Q(z, \Delta^{(2)}) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K_{Vn} J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \beta^2) J_0^2(\mu_n)} F_n(t_1, t_2, \mu_n, t^*), \quad (48)$$

где μ_n зависит от β согласно (45) при известной зависимости F_n от t_1, t_2, μ_n и t^* , заданной в форме взвешенной суммы экспонент [6].

Альтернативные свойства искомого решения $\bar{\Delta}^{(2)}$ задачи (47), совпадающего в рассматриваемом случае с решением $\bar{\Delta}_*^{(2)}$ многокритериальной задачи, сводятся к равенствам (21), (27) в условиях (24). Дальнейшая проблема, которая может быть решена только с привлечением закономерностей конкретной предметной области, состоит в редукции этих соотношений к замкнутой системе уравнений относительно всех неизвестных параметров оптимального процесса.

Известные свойства нестационарных температурных полей в процессе индукционного нагрева позволяют установить подобно [17, 18] форму кривых $Q(x, Q_0, \beta, \bar{\Delta}^{(2)})$ пространственного распределения конечного температурного состояния на решении $\bar{\Delta}^{(2)}$ задачи (47) в зависимости от реализуемых значений неопределённых факторов Q_0, β с температурными максимумами и минимумами, достигаемыми в каждой точке $x \in [0, 1]$ на границах $(Q_{0\max}, \beta_{\min})$ и $(Q_{0\min}, \beta_{\max})$ допустимого интервала изменения неопределённых факторов в (40) (рис. 1, *d*).

Как следует из рис. 1, *d*, правила (24) и ограничений (40), система трёх равенств (21) выполняется в трёх точках: $z_1^0 = (x_1^0 = 0, Q_{01}^0 = Q_{0\min}, \beta_1^0 = \beta_{\max})$, $z_2^0 = (x_2^0 \in (0, 1), Q_{02}^0 = Q_{0\max}, \beta_2^0 = \beta_{\min})$, $z_3^0 = (x_3^0 = 1, Q_{03}^0 = Q_{0\min}, \beta_3^0 = \beta_{\max})$ — на различающихся по значениям Q_0 и β кривых распределения результирующей температуры по пространственной координате с чередующимися знаками её отклонения от требуемой величины Q_c .

В результате равенства (21), (27) сводятся к однозначно фиксируемой системе четырёх уравнений:

$$Q(0, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c = -\min \varepsilon(\Delta^{(2)}); \quad Q(x_2^0, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c = \min \varepsilon(\Delta^{(2)});$$

$$Q(1, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c = -\min \varepsilon(\Delta^{(2)}); \quad \frac{\partial Q(x_2^0, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{\Delta}^{(2)})}{\partial x} = 0, \quad (49)$$

разрешаемой известными численными методами относительно четырёх неизвестных $\bar{\Delta}_1^{(2)} = \bar{t}_1$; $\bar{\Delta}_2^{(2)} = \bar{t}_2$; $\min \varepsilon(\Delta^{(2)})$ и координаты точки экстремума x_2^0 .

Последующее вычисление по найденному вектору $\bar{\Delta}^{(2)}$ значений $\lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)})$ и $\lambda_{\min}^0 = \max_{p=1,2,3} \lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)})$ в (18) при известных решениях задач управления по частным критериям качества (41)–(43) и величинах I_p^* , I_p^0 обеспечивает выполнение неравенств (18), завершая решение исходной задачи (16)–(18) в рассматриваемом частном варианте.

Параметризуемые частные задачи оптимизации вида (31) формулируются в данном случае на элементах $[\Delta^{(2)}]_p$ подмножества $\{[\Delta^{(2)}]_p\} \subset \{\Delta^{(2)}\}$ значений $\Delta^{(2)} = (t_1, t_2)$ и в типичном варианте (33) для всех $p = 1, 2, 3$ опять сводятся к минимизации $\Phi_p([\Delta^{(2)}]_p)$:

$$\Phi_p([\Delta^{(2)}]_p) = \max_{Q_0, \beta} \left[\max_{x \in [0,1]} |Q_p(x, Q_0, \beta, [\Delta^{(2)}]_p) - Q_c| \right] \rightarrow \min_{[\Delta^{(2)}]_p}, \quad p = \overline{1, 3}. \quad (50)$$

Применительно к критерию (41) минимальный расход энергии достигается при ре-лейной форме не содержащего особого участка алгоритма (46) (рис. 1, *b*) [18] с однопараметрическим его представлением в условиях фиксированной длительности t^* процесса управления на подмножестве $\{[\Delta^{(2)}]_{p=1}\}$ векторов $\Delta^{(2)}$, где

$$\{[\Delta^{(2)}]_{p=1}\} = \{\Delta^{(2)} = (t_1, t_2): t_2 = t_1 < t^*\}, \quad (51)$$

откуда следует, что $[\Delta^{(2)}]_{p=1} = t_1$. При этом Q_p в (50) при $p = 1$ описывается подобно (48) следующим выражением [18]:

$$Q_1(x, Q_0, \beta, t_1) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K_{Vn} J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \beta^2) J_0^2(\mu_n)} [e^{-\mu_n^2(t^* - t_1)} - e^{-\mu_n^2 t^*}]. \quad (52)$$

Можно показать, что конфигурация пространственного распределения $Q_1(x, Q_0, \beta, \Delta^{[1]})$ на решении $\Delta^{[1]} = \bar{t}_1$ задачи (50)–(52) при $p = 1$ принимает в зависимости от значений Q_0 и β показанный на рис. 1, *e* вид с двумя точками альтернанса:

$$z_1^0 = (x_1^0 = 1, Q_{01}^0 = Q_{0\min}, \beta_1^0 = \beta_{\max}); \quad z_2^0 = (x_2^0 \in (0, 1); Q_{02}^0 = Q_{0\max}; \beta_2^0 = \beta_{\min}). \quad (53)$$

При этом равенства (21), (27) сводятся подобно (49) к разрешаемой относительно \bar{t}_1 , $\min \varepsilon(t_1)$ и x_2^0 системе трёх уравнений:

$$Q_1(1, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{t}_1) - Q_c = -\min \varepsilon(t_1); \quad Q_1(x_2^0, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{t}_1) - Q_c = \min \varepsilon(t_1);$$

$$\frac{\partial Q_1(x_2^0, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{t}_1)}{\partial x} = 0. \quad (54)$$

По найденной величине \bar{t}_1 определяется в соответствии с (41) и рис. 1, *b* величина $I_1^* = \bar{t}_1$.

Минимизация I_2 в (42) обеспечивается в условиях максимальной длительности особого участка в (46) [17, 18] при $t_2 = t^*$ (рис. 1, *c*) с аналогичным (51) однопараметрическим представлением $[\Delta^{(2)}]_{p=2} = t_1$, теперь уже рассматриваемым в условиях $t_2 = t^*$. Анализ, аналогичный предыдущей задаче, показывает, что конфигурация конечного температурного состояния $Q_2(x, Q_0, \beta, t_1)$, иллюстрируемая рис. 1, *f*, отличается наличием двух других точек альтернанса:

$$z_1^0 = (x_1^0 = 0, Q_{01}^0 = Q_{0\min}; \beta_1^0 = \beta_{\max}); \quad z_2^0 = (x_2^0 \in (0, 1); Q_{02}^0 = Q_{0\max}; \beta_2^0 = \beta_{\min}), \quad (55)$$

а расчётная система уравнений альтернансного метода приводится к виду

$$Q_2(0, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{t}_1) - Q_c = -\min \varepsilon(t_1); \quad Q_2(x_2^0, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{t}_1) - Q_c = \min \varepsilon(t_1); \quad (56)$$

$$\frac{\partial Q_2(x_2^0, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{t}_1)}{\partial x} = 0,$$

где выражение для $Q_2(x, Q_0, \beta, \bar{t}_1)$ определяется в форме (48) для частного случая $t_2 = t^*$.

По найденному указанным путём значению \bar{t}_1 вычисляется согласно (42) величина

$$I_2^* = \max_{Q_0, \beta} I_2(\bar{t}_1, t^*, Q_0, \beta) = I_2(\bar{t}_1, t^*, Q_{0\max}, \beta_{\min}), \quad (57)$$

где $\max I_2$ достигается на максимальных значениях температуры поверхности нагреваемого изделия в (42) [17, 18] и $Q_2(1, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{t}_1, t)$ в (42) вычисляется на интервалах $t \in [0, \bar{t}_1]$ и $t \in [\bar{t}_1, t^*]$ по выражениям, аналогичным (52) и (48) соответственно.

Применительно к критерию I_3 в (43) подмножество $\{[\Delta^{(2)}]_{p=3}\}$ совпадает со всем допустимым множеством значений $\Delta^{(2)} = (t_1, t_2)$ и задача (43) не отличается от (47), т. е. $\Delta^{[3]} = \bar{\Delta}^{(2)}$ и $I_3^* = \min \varepsilon(\bar{\Delta}^{(2)})$.

Значения I_p^0 , $p = 1, 2, 3$, в (18) могут быть найдены по алгоритму, подобному (36), или подобраны другим способом, исходя из максимально достижимых величин I_p , определяемых из очевидных физических соображений.

При известных величинах I_p^* , I_p^0 на заключительном этапе находится оптимальная величина целевой функции в исходной многокритериальной задаче (16)–(18) согласно (30) при $N = 2$, где $\lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)}) = \lambda_p(\bar{\Delta}_*^{(2)})$, $p = 1, 2, 3$, определяются в соответствии с (18) на решениях $\bar{\Delta}^{(2)}$ системы уравнений (49) по значениям $I_p(\bar{\Delta}^{(2)}) = \max_{Q_0, \beta} \tilde{I}_p(\bar{\Delta}^{(2)}, Q_0, \beta)$.

Здесь при фиксируемых значениях $\bar{\Delta}^{(2)} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ расход энергии $I_1(\bar{\Delta}^{(2)})$ задаётся на основании (41), (46) величиной интеграла

$$I_1(\bar{\Delta}^{(2)}) = \bar{t}_1 + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} u_0(t, \bar{t}_1) dt,$$

$I_2(\bar{\Delta}^{(2)})$ находится подобно (57):

$$I_2(\bar{\Delta}^{(2)}) = \max_{Q_0, \beta} \tilde{I}_2(\bar{\Delta}^{(2)}, t^*, Q_0, \beta) = \tilde{I}_2(\bar{\Delta}^{(2)}, t^*, Q_{0\max}, \beta_{\min}),$$

где $Q_2(1, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{\Delta}^{(2)}, t)$ при расчёте $I_2(\bar{\Delta}^{(2)})$ в (42) определяется аналогично $Q_2(1, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{t}_1, t)$ в частной задаче оптимизации по критерию I_2 и $I_3(\bar{\Delta}^{(2)}) = I_3^* = \min \varepsilon(\bar{\Delta}^{(2)})$, откуда следует, что $\lambda_3(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0$ согласно (13), (18).

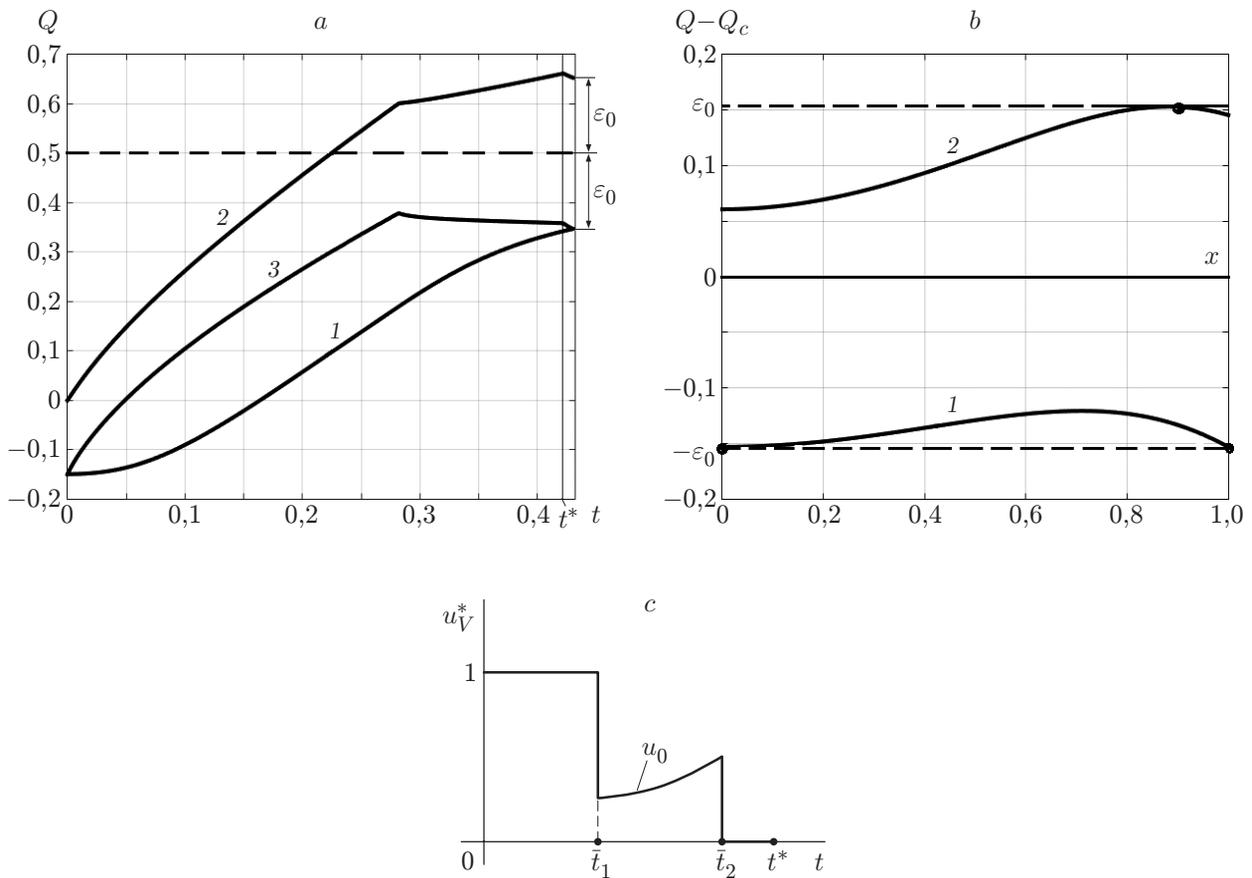


Рис. 2. Температурные поля: *a* — кривая 1 — $Q(0, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{\Delta}^{(2)})$, 2 — $Q(x_0^0, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{\Delta}^{(2)})$, 3 — $Q(1, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{\Delta}^{(2)})$; *b* — кривая 1 — $Q(x, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c$, 2 — $Q(x, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c$; *c* — управляющее воздействие в оптимальном режиме нагрева ($\bar{t}_1 = 0,2818$; $\bar{t}_2 = 0,4218$; $t^* = 0,43$)

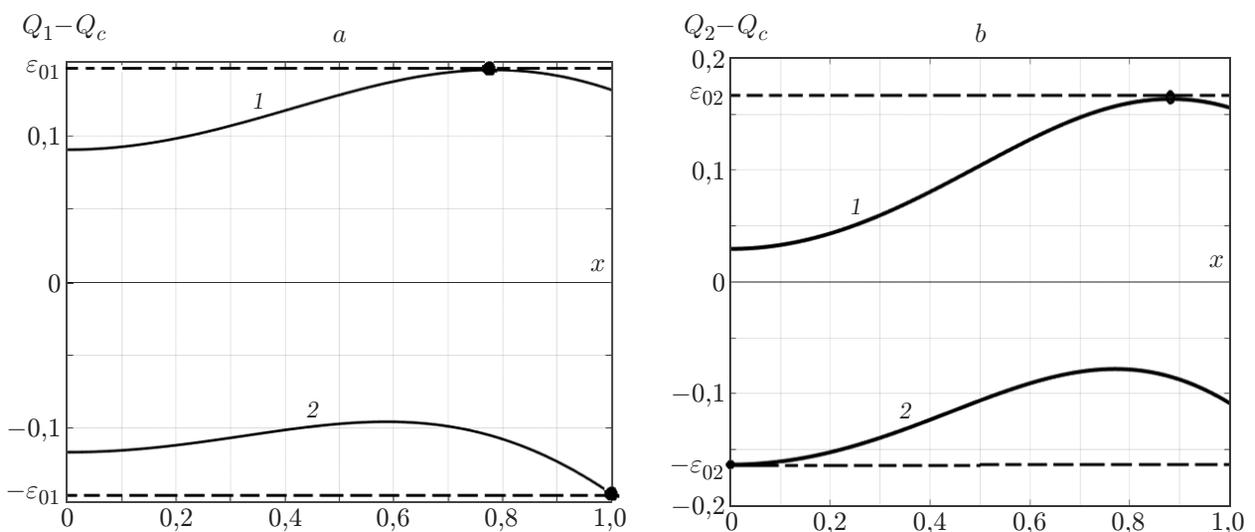


Рис. 3. Результирующие радиальные распределения температур в частных задачах оптимизации: *a* — по расходу энергии; *b* — по потерям металла в окалину (кривые 1 — $Q(x, Q_{0\max}, \beta_{\min}, \bar{t}_1) - Q_c$; кривые 2 — $Q(x, Q_{0\min}, \beta_{\max}, \bar{t}_1) - Q_c$)

На рис. 2, 3 приведены некоторые результаты решения рассматриваемой задачи при $Q_{0\min} = -0,15$; $Q_{0\max} = 0$; $\beta_{\min} = 0,2$; $\beta_{\max} = 0,5$; $Q_c = 0,5$; $t^* = 0,43$; $Q_h = 0,375$; $r = 3,5$.

Применительно к этому случаю описанным методом находятся значения $\lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)})$, $p = 1, 2, 3$, и λ_{\min}^0 , определяемые для вычисляемых значений I_p^* , I_p^0 : $\lambda_1(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0,042$; $\lambda_2(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0,096$; $\lambda_3(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0$; $\lambda_{\min}^0 = \max_p \lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)}) = \lambda_2(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0,096$.

Заключение. Разработан конструктивный способ решения широкого круга параметризуемых задач многокритериальной оптимизации управляемых распределённых систем с интервальными неопределённостями параметрических характеристик объекта управления в типичных для приложений условиях оценки точности приближения конечного состояния системы к требуемому в равномерной метрике на всём множестве допустимых реализаций неопределённых факторов. Предлагаемая технология распространяет полученные ранее результаты для детерминированных моделей объекта на исследуемую ситуацию в соответствии со стратегией управления по принципу достижения наилучшего гарантированного результата путём соответствующего обобщения детерминированной схемы применения альтернансного метода поиска искомым экстремалей. Полученные результаты апробированы на примере многокритериальной задачи управления ответственным объектом технологической теплофизики.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-08-00048, 19-08-00232).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 с.
2. Гермейер Ю. Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976. 316 с.
3. Машунин Ю. К. Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.
4. Машунин К. Ю., Машунин Ю. К. Векторная оптимизация с равнозначными и приоритетными критериями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 6. С. 80–99.
5. Корнеев В. П. Методы оптимизации. М.: Высш. шк., 2007. 664 с.
6. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Технология решения многокритериальных задач управления системами с распределёнными параметрами // Автометрия. 2017. 53, № 4. С. 11–25.
7. Рапопорт Э. Я. Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
8. Рапопорт Э. Я. Оптимальное управление системами с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.
9. Рапопорт Э. Я. Робастная параметрическая оптимизация динамических систем в условиях ограниченной неопределённости // Автоматика и телемеханика. 1995. № 3. С. 86–96.
10. Дилигенский Н. В., Дымова Л. Г., Севастьянов П. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределённости: технология, экономика, экология. М.: Машиностроение–1, 2004. 336 с.
11. Волин Ю. М., Островский Г. М. Многокритериальная оптимизация технологических процессов в условиях неопределённости // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 165–180.
12. Островский Г. М., Волин Ю. М. Технические системы в условиях неопределённости: анализ гибкости и оптимизация. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 319 с.
13. Машунин К. Ю., Машунин Ю. К. Моделирование технических систем в условиях неопределённости и принятие оптимального решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 4. С. 19–35.

14. Новикова Н. М., Поспелова И. И., Зенюков А. И. Метод свёрток в многокритериальных задачах с неопределённостью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 5. С. 27–45.
15. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
16. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автометрия. 2009. 45, № 5. С. 103–112.
17. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012. 309 с.
18. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993. 279 с.
19. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Совместная оптимизация по системным критериям качества взаимосвязанных процессов технологической теплофизики в производственных комплексах обработки металла давлением // Автометрия. 2013. 49, № 6. С. 3–13.
20. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2018. 256 с.

Поступила в редакцию 09.04.2019

После доработки 20.05.2019

Принята к публикации 20.05.2019
