

УДК 532.536

ЭВОЛЮЦИЯ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ В СЛОИСТОМ АНИЗОТРОПНОМ ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

М. М. Алимов

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета, 420008 Казань
E-mail: Mars.Alimov@ksu.ru

Показано, что краевая задача, описывающая эволюцию межфазной границы в процессе насыщения вязкой жидкостью слоисто-неоднородного анизотропного пористого материала, неортогональным преобразованием координат может быть сведена к аналогичной задаче для слоисто-неоднородного изотропного материала. В результате известные оценки параметров задачи, определяющих конфигурацию межфазной границы насыщения для изотропного случая, удастся распространить на анизотропный случай.

Ключевые слова: задача со свободными границами, многофазные среды, объемная анизотропия.

Введение. В процессе производства композитных материалов с использованием технологии вакуумного вливания смолы в закрытые формы необходимо решать задачу о фильтрационном насыщении вязкой жидкостью пористого материала, первоначально заполненного воздухом, в предположении, что каждая фаза связна и между фазами имеется четко выраженная граница [1]. При этом существенными факторами, определяющими процесс фильтрации, являются слоистая неоднородность пористого материала и объемная анизотропия слоев. Для случая слоистого изотропного материала в работе [2] получены асимптотические оценки параметров задачи, определяющих конфигурацию межфазной границы в установившемся режиме. В работе [3] с помощью известного неортогонального преобразования координат установлено, что задачу насыщения вязкой жидкостью однородного анизотропного пористого материала можно свести к аналогичной задаче для изотропного материала. В данной работе показана эффективность такого преобразования координат для случая слоистого анизотропного пористого материала.

Схематически процесс насыщения пористого материала представлен на рис. 1. Предполагается, что от координаты, орт которой направлен перпендикулярно плоскости (x, y) , процесс фильтрации не зависит и, следовательно, задачу можно считать плоской. Материал состоит из двух слоев (верхнего и нижнего). Параметры верхнего слоя будем отмечать индексом “+”, параметры нижнего — индексом “-”. Слои имеют толщину h^\pm и пористость m^\pm . Каждый слой однороден и анизотропен, причем главные оси тензора проницаемости совпадают с осями декартовых координат x, y (выбор начала координат произволен). Тогда сам тензор проницаемости в каждом слое полностью характеризуется диагональными компонентами k_{xx}^\pm, k_{yy}^\pm . Степень анизотропии слоев характеризуется

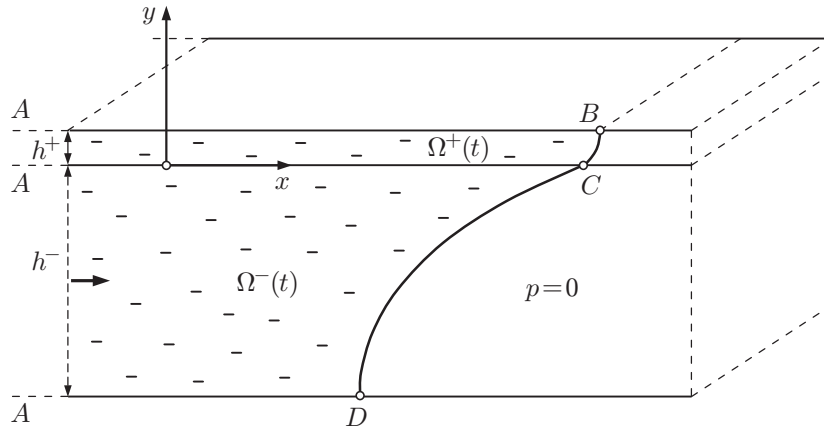


Рис. 1. Схема процесса насыщения вязкой жидкостью двуслойного пористого материала

безразмерными параметрами χ^\pm [4]:

$$\chi^\pm = \sqrt{k_{yy}^\pm / k_{xx}^\pm}.$$

В соответствии с рассматриваемой технологией нижняя граница нижнего слоя и верхняя граница верхнего слоя непроницаемы [1]. Левая граница материала соединяется с резервуаром, в котором находится вязкая жидкость, поддерживаемая при постоянном давлении. Правая граница материала соединяется с воздушной камерой. При понижении давления в камере возникает перепад давления в жидкости, что обуславливает процесс фильтрационного насыщения материала.

Существует две стадии процесса насыщения: ранняя стадия, когда размер зоны насыщения в горизонтальном направлении сравним с суммарной толщиной материала ($h^+ + h^-$), и поздняя стадия, когда размер этой зоны существенно больше значения $h^+ + h^-$ и соответственно протяженность материала влево в горизонтальном направлении можно считать бесконечной. В данной работе подробно рассматривается только поздняя, более информативная стадия насыщения. В частности, на этой стадии происходит установление формы межфазной границы. Ранняя стадия процесса насыщения кратко обсуждается в конце п. 2.

1. Формулировка задачи в терминах функции давления. В занятой воздухом области пористого материала давление равно константе. Занятую жидкостью область материала обозначим $\Omega^\pm(t)$ (см. рис. 1). Предполагается, что жидкость несжимаема, а ее движение в области $\Omega^\pm(t)$ описывается законом Дарси [1, 4]

$$\Omega^\pm(t): \quad \frac{\partial v_x^\pm}{\partial x} + \frac{\partial v_y^\pm}{\partial y} = 0, \quad (v_x^\pm, v_y^\pm) = -\mu^{-1} \left(k_{xx}^\pm \frac{\partial p^\pm}{\partial x}, k_{yy}^\pm \frac{\partial p^\pm}{\partial y} \right). \quad (1.1)$$

Здесь μ — вязкость жидкости; $\mathbf{v}^\pm = (v_x^\pm, v_y^\pm)$ — скорость фильтрации. Тогда распределения давления $p^\pm(x, y, t)$ в каждом слое будут удовлетворять уравнениям

$$\Omega^\pm(t): \quad k_{xx}^\pm \frac{\partial^2 p^\pm}{\partial x^2} + k_{yy}^\pm \frac{\partial^2 p^\pm}{\partial y^2} = 0. \quad (1.2)$$

Как отмечено выше, границы AB и AD непроницаемы:

$$AB \cup AD: \quad \frac{\partial p^\pm}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

На границе между слоями AC выполняются условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости фильтрации [1]

$$AC: \quad p^+ = p^-, \quad k_{yy}^+ \frac{\partial p^+}{\partial y} = k_{yy}^- \frac{\partial p^-}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Межфазная граница $BC \cup CD$ является свободной, поэтому на ней необходимо задавать два граничных условия. Первое условие, динамическое, предполагает, что давление жидкости на границе равно капиллярному давлению P_c , которое в случае однородной пористой среды является константой [4, 5]. В то же время это единственное условие задачи, в котором присутствует абсолютное значение давления. Под величиной $p^\pm(x, y, t)$ будем понимать относительное давление, т. е. давление, отсчитываемое от значения P_c . Тогда динамическое условие можно записать в виде [1, 2]

$$BC \cup CD: \quad p^\pm = 0. \quad (1.5)$$

Второе условие, кинематическое, является следствием материальности свободной границы и с учетом динамического условия (1.5) может быть записано в форме

$$BC \cup CD: \quad \frac{dp^\pm}{dt} = 0,$$

где d/dt — субстанциональная производная по времени. Следует отметить, что последнее условие не тождественно условию (1.5) (это условие обсуждается в работах [3, 6] для задачи Хеле — Шоу, а также в [7] для родственной ей задачи Стефана).

Представим субстанциональную производную по времени в соответствии с известной формулой [8], учитывая, что скорость материальных частиц жидкости, принадлежащих участку $BC \cup CD$, равна v^\pm/m^\pm [4]. В результате, используя для компонент скорости фильтрации формулы (1.1), получим кинематическое условие следующего вида:

$$BC \cup CD: \quad \frac{\mu m^\pm}{k_{xx}^\pm} \frac{\partial p^\pm}{\partial t} = \left(\frac{\partial p^\pm}{\partial x} \right)^2 + (\chi^\pm)^2 \left(\frac{\partial p^\pm}{\partial y} \right)^2. \quad (1.6)$$

Для замыкания задачи необходимо выписать начальное условие, а также задать условие на бесконечности слева. Рассматриваемый процесс соответствует случаю течения жидкости с эволюционирующей свободной границей, причем течение является ползущим и производные по времени в управляющем уравнении (1.2) отсутствуют. Поэтому по аналогии с задачей Хеле — Шоу в качестве начального условия достаточно задать конфигурацию области в начальный момент времени:

$$t = 0: \quad \Omega^\pm(t) = \Omega_0^\pm. \quad (1.7)$$

В силу условий (1.3), (1.4) при удалении от свободной поверхности давление поперек обоих слоев выравнивается [4, 5]. Соответственно условие на бесконечности можно задать в виде стационарного градиента давления

$$x \rightarrow -\infty: \quad \frac{\partial p^\pm}{\partial x} = -\lambda^2. \quad (1.8)$$

Таким образом, эволюция межфазной границы в процессе насыщения двуслойного анизотропного пористого материала описывается краевой задачей (1.2)–(1.8). Частный случай $\chi^\pm = 1$, т. е. $k_{xx}^\pm = k_{yy}^\pm = k^\pm$, соответствует двуслойному изотропному материалу. С точки зрения математики задача (1.2)–(1.8) является обобщением односторонней идеализированной задачи Хеле — Шоу [9, 10], учитывающим слоистую неоднородность и объемную анизотропию пористой среды.

2. Неортогональное преобразование координат. Рассмотрим преобразование координат x, y в новые координаты X, Y [3]:

$$X = x, \quad Y = y/\chi^\pm, \quad (2.1)$$

а также преобразование функций $p^\pm(x, y, t)$ в новые функции $P^\pm(X, Y, t)$:

$$P^\pm(X, Y, t) = p^\pm(x, y, t) \Big|_{\substack{x = x(X) \\ y = y(Y)}}. \quad (2.2)$$

Из формулы (2.1) следует, что в вертикальном направлении верхний и нижний слои растягиваются по-разному. Для областей $\Omega^\pm(t)$ в пространстве X, Y сохраним прежние обозначения.

По сути, (2.1) представляет собой известное неортогональное преобразование координат [4, 11, 12], которое переводит уравнения (1.2) в уравнения Лапласа

$$\Omega^\pm(t): \quad \Delta P^\pm = 0. \quad (2.3)$$

Здесь оператор Лапласа записан в координатах X, Y . Уравнения (2.3) позволяют представить процесс насыщения вязкой жидкостью двуслойного анизотропного пористого материала как насыщение той же жидкостью двуслойного изотропного пористого материала в пространстве X, Y , причем $P^\pm(X, Y, t)$ имеет смысл функции распределения давления в этом пространстве. Толщины слоев определяются непосредственно формулой (2.1):

$$H^\pm = h^\pm/\chi^\pm. \quad (2.4)$$

Доопределим параметры слоев двуслойного изотропного пористого материала в пространстве X, Y , а именно проницаемость K^\pm и пористость M^\pm слоев, следующим образом:

$$K^\pm = k_{xx}^\pm \chi^\pm, \quad M^\pm = m^\pm \chi^\pm. \quad (2.5)$$

Применяя преобразование (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) к граничным и начальным условиям краевой задачи (1.2)–(1.8), получим граничные и начальные условия для функций $P^\pm(X, Y, t)$:

$$\begin{aligned} AB \cup AD: \quad & \frac{\partial P^\pm}{\partial Y} = 0, \\ AC: \quad & P^+ = P^-, \quad K^+ \frac{\partial P^+}{\partial Y} = K^- \frac{\partial P^-}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} BC \cup CD: \quad & P^\pm = 0; \\ BC \cup CD: \quad & \frac{\mu M^\pm}{K^\pm} \frac{\partial P^\pm}{\partial t} = \left(\frac{\partial P^\pm}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial P^\pm}{\partial Y} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} t = 0: \quad & \Omega^\pm(t) = \Omega_0^\pm; \\ X \rightarrow -\infty: \quad & \frac{\partial P^\pm}{\partial X} = -\lambda^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Сравнение полученной краевой задачи (2.3), (2.6)–(2.8) с задачей (1.2)–(1.8) показывает, что преобразования (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) позволяют свести краевую задачу (1.2)–(1.8) об эволюции межфазной границы в процессе насыщения двуслойного анизотропного пористого материала к аналогичной задаче для двуслойного изотропного пористого материала. Этот результат справедлив и для ранней стадии насыщения. В данном случае пористый материал слева имеет прямолинейную границу $x = 0$ (свяжем с ней начало координат).

В соответствии с описанной технологией процесса давление жидкости на границе постоянно:

$$x = 0: \quad p^\pm = p_0 > 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, в краевой задаче (1.2)–(1.8) условие (1.8) на бесконечности надо заменить условием (2.9) на границе $x = 0$. Инвариантность последнего относительно преобразования (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) очевидна. Следовательно, вывод о сводимости задачи насыщения слоистого анизотропного материала к изотропному случаю справедлив и для ранней стадии насыщения.

3. Случай установившейся границы. Пусть форма свободной границы является установившейся, т. е. процесс вышел на режим бегущей волны и контур $DC \cup CB$ продвигается вдоль оси x с постоянной скоростью u , не меняя формы. Тогда функции давления $p^\pm(x, y, t)$ имеют структуру $p^\pm(x - ut, y)$, и, следовательно,

$$\frac{\partial p^\pm}{\partial t} = -u \frac{\partial p^\pm}{\partial x}.$$

Соответственно из (1.6) можно получить условия материальности свободной границы в установившемся режиме

$$BC \cup CD: \quad \frac{\mu m^\pm u}{k_{xx}^\pm} \frac{\partial p^\pm}{\partial x} + \left(\frac{\partial p^\pm}{\partial x} \right)^2 + (\chi^\pm)^2 \left(\frac{\partial p^\pm}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3.1)$$

В такой постановке скорость движения межфазной границы u является несвободным параметром задачи: балансовые соотношения связывают ее с другими параметрами процесса. Докажем это утверждение, вычислив поток жидкости через поперечное сечение на бесконечности q с использованием закона Дарси (1.1) и известного градиента давления (1.8):

$$q = \lambda^2 (k_{xx}^+ h^+ + k_{xx}^- h^-) / \mu.$$

В то же время, учитывая неизменность конфигурации межфазной границы (бегущая волна), можно записать $q = u(m^+ h^+ + m^- h^-)$. Приравнявая два этих выражения для q , получим скорость продвижения контура u , выраженную через определяющие параметры процесса:

$$u = \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{k_{xx}^+ h^+ + k_{xx}^- h^-}{m^+ h^+ + m^- h^-}. \quad (3.2)$$

Таким образом, движение межфазной границы в установившемся процессе насыщения двуслойного анизотропного пористого материала описывается краевой задачей (1.2)–(1.5), (1.8), (3.1), в которой параметр u определяется формулой (3.2). Вариант $\chi^\pm = 1$, т. е. $k_{xx}^\pm = k_{yy}^\pm = k^\pm$, соответствующий случаю двуслойного изотропного пористого материала, рассмотрен в работе [2].

Аналогично [2] введем два безразмерных параметра δ и ε , которые характеризуют соотношение толщин слоев и их проницаемостей:

$$\delta = \frac{m^+ h^+}{m^- h^-}, \quad \varepsilon = \frac{k_{xx}^- h^-}{k_{xx}^+ h^+}. \quad (3.3)$$

При этом считается, что в соотношении проницаемостей существенны только продольные проницаемости k_{xx}^\pm слоев, поскольку поперечные проницаемости k_{yy}^\pm не оказывают влияния на скорость движения контура с установившейся формой (см. формулу (3.2)).

Если в качестве характерной скорости выбрать скорость материальных частиц жидкости на бесконечности в нижнем слое

$$u_{\infty} = \frac{\lambda^2 k_{xx}^-}{\mu m^-}, \quad (3.4)$$

то можно ввести безразмерную скорость движения межфазной границы $u_* = u/u_{\infty}$. Согласно формуле (3.2) скорость u_* полностью определяется величинами δ и ε , так же как и в работе [2]:

$$u_* = \frac{1 + \varepsilon^{-1}}{1 + \delta}. \quad (3.5)$$

Применим преобразование (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) к краевой задаче (1.2)–(1.5), (1.8), (3.1). В соответствии с п. 2 формулы (1.2)–(1.5), (1.8) преобразуются к виду (2.3), (2.6), (2.8). Условие материальности свободной границы (3.1) преобразуется к виду

$$BC \cup CD: \quad \frac{\mu M^{\pm} u}{K^{\pm}} \frac{\partial P^{\pm}}{\partial X} + \left(\frac{\partial P^{\pm}}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial P^{\pm}}{\partial Y} \right)^2 = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, указанное преобразование позволяет свести краевую задачу (1.2)–(1.5), (1.8), (3.1) к аналогичной задаче (2.3), (2.6), (2.8), (3.6), соответствующей случаю двуслойного изотропного пористого материала.

Убедимся, что преобразование не меняет физический смысл параметров (3.2)–(3.4). Формула (3.2) преобразуется к виду

$$u = \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{K^+ H^+ + K^- H^-}{M^+ H^+ + M^- H^-}. \quad (3.7)$$

Сравнение формул (3.1), (3.2) с формулами (3.6), (3.7) показывает, что физический смысл параметра u — скорости движения межфазной границы области в пространстве X, Y — сохраняется.

Аналогично сохраняется физический смысл характерной скорости u_{∞} — скорости материальных частиц жидкости на бесконечности в нижнем слое материала в пространстве X, Y :

$$u_{\infty} = \frac{\lambda^2 K^-}{\mu M^-}.$$

Что касается безразмерных параметров δ и ε , то они инвариантны относительно указанного преобразования:

$$\delta = \frac{m^+ h^+}{m^- h^-} = \frac{M^+ H^+}{M^- H^-}, \quad \varepsilon = \frac{k_{xx}^- h^-}{k_{xx}^+ h^+} = \frac{K^- H^-}{K^+ H^+}.$$

Как следствие безразмерная скорость движения границы u_* (см. формулу (3.5)) также инвариантна относительно преобразования (2.1), (2.2), (2.4), (2.5).

Проведенный в [2] асимптотический анализ движения межфазной границы при установившемся процессе насыщения двуслойного изотропного пористого материала соответствует случаю значительного различия толщин слоев (что характеризуется малостью параметра $\delta \ll 1$) и их проницаемостей (что характеризуется малостью параметра $\varepsilon \ll 1$), представляющему наибольший интерес с точки зрения технологических приложений [1]. Очевидно, с помощью преобразования, обратного (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), результаты асимптотического анализа [2] можно распространить на процесс насыщения двуслойного анизотропного пористого материала в случае $\delta \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$.

4. Распространение результатов [2] на процесс насыщения двухслойного анизотропного пористого материала. Кратко изложим результаты работы [2]. В случае $\delta \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$ движение межфазной границы в установившемся процессе насыщения двухслойного изотропного пористого материала описывается отдельной краевой задачей для нижнего слоя (рис. 2):

$$\begin{aligned} \Omega^-: \quad & \frac{\partial^2 P_*}{\partial X_*^2} + \frac{\partial^2 P_*}{\partial Y_*^2} = 0, \\ AD: \quad & \frac{\partial P_*}{\partial Y_*} = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$CD: \quad P_* = 0, \quad u_* \frac{\partial P_*}{\partial X_*} + \left(\frac{\partial P_*}{\partial X_*} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_*}{\partial Y_*} \right)^2 = 0;$$

$$AC: \quad \frac{\partial^2 P_*}{\partial X_*^2} + \varepsilon \frac{\partial P_*}{\partial Y_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial P_*}{\partial X_*}, \frac{\partial P_*}{\partial Y_*} \right) \Big|_A = (-1, 0). \quad (4.2)$$

Здесь X_* , Y_* , P_* — безразмерные переменные:

$$X_* = \frac{X}{H^-}, \quad Y_* = \frac{Y}{H^-}, \quad P_* = \frac{P^-}{\lambda^2 H^-}.$$

В качестве характерной длины выбрана толщина слоя H^- , а в качестве характерного давления — величина $\lambda^2 H^-$ (см. (2.8)).

Отметим, что условие (4.2) на границе AC характеризует приток жидкости из верхнего высокопроницаемого слоя. Асимптотический анализ [2] основан на замене этого граничного условия более простым условием

$$AC: \quad \frac{\partial P_*}{\partial X_*} = -1, \quad (4.3)$$

которое следует из (4.2) при $\varepsilon = 0$. Из решения вспомогательной краевой задачи (4.1), (4.3) можно получить главный член асимптотического разложения решения полной краевой задачи (4.1), (4.2) по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Это решение удалось построить аналитически, что позволило провести анализ влияния определяющих параметров задачи на конфигурацию свободной границы. В частности, установлено, что достаточно точным приближением конфигурации межфазной границы является отрезок прямой, образующей с горизонтом угол β^i (см. рис. 2), который определяется только величиной u_* [2]:

$$\beta^i = \arctg(1/\sqrt{u_* - 1}). \quad (4.4)$$

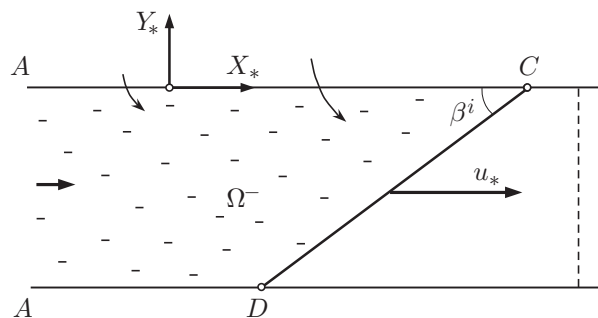


Рис. 2. Приближенная конфигурация межфазной границы в установившемся процессе насыщения двухслойного изотропного пористого материала в случае значительного различия толщин слоев и их проницаемостей

Учитывая малость параметров δ , ε и формулу (3.5), можно оценить величину этого угла, а также протяженность межфазной границы по горизонтали:

$$\beta^i = \sqrt{\varepsilon} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})], \quad X_C - X_D = \frac{H^-}{\sqrt{\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})].$$

Поскольку переход от изотропного случая к анизотропному заключается в растяжении слоев по вертикали (см. (2.1), (2.4)), для анизотропного материала достаточно точным приближением конфигурации межфазной границы также является отрезок прямой, образующей с горизонтом угол β^a в плоскости (x, y) . Для того чтобы найти величину угла, будем учитывать, что в соответствии с формулой (2.4) размерная толщина нижнего слоя вычисляется по формуле

$$h^- = H^- \chi^-.$$

Тогда из формулы (4.4) непосредственно следует формула для угла β^a

$$\beta^a = \arctg(\chi^- / \sqrt{u_* - 1}).$$

Таким образом, можно оценить величину этого угла, а также протяженность межфазной границы по горизонтали:

$$\beta^a = \chi^- \sqrt{\varepsilon} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})], \quad x_C - x_D = \frac{h^-}{\chi^- \sqrt{\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})].$$

Отметим, что аналогично на анизотропный случай можно обобщить результаты для установившегося процесса насыщения двуслойного изотропного пористого материала при немалых ε . Однако в настоящее время такие результаты отсутствуют: при $\varepsilon \approx 1$ возможно только численное решение задачи. Кроме того, нестандартное граничное условие (4.2) и наличие у границы области острого угла в точке C значительно осложняют численный анализ задачи со свободной границей (4.1), (4.2).

Заключение. В настоящей работе показано, что результаты математического анализа процесса насыщения вязкой жидкостью слоистого изотропного пористого материала легко распространяются на случай слоистого анизотропного материала. Поэтому, используя результаты асимптотического анализа [2], представляющие в большей степени теоретический интерес, удалось получить оценки параметров задачи, определяющих установившуюся конфигурацию межфазной границы насыщения слоистого анизотропного материала, представляющие практический интерес.

Автор выражает благодарность К. Г. Корневу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathur R., Heider D., Hoffman C., et al. Flow front measurements and model validation in the vacuum assisted resin transfer molding process // Polymer Composites. 2001. V. 22, N 4. P. 477–490.
2. Alimov M. M., Kornev K. G. Impregnation of liquids into a laminated porous material with a high permeability contrast // Phys. Fluids. 2007. V. 19. P. 102108-1–102108-11.
3. Алимов М. М. О сводимости анизотропной задачи Хеле — Шоу к изотропному случаю // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 3. С. 451–457.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
5. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1984.

6. **Saffman P. G.** Exact solutions for the growth of fingers from a flat interface between two fluids in a porous medium or Hele — Shaw cell // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1959. V. 12, pt 2. P. 146–150.
7. **Мейрманов А. М.** Задача Стефана. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
8. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1.
9. **Saffman P. G., Taylor G. I.** The penetration of a fluid into a porous medium or Hele — Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1958. V. 245, N 1242. P. 312–329.
10. **Howison S. D.** Complex variable methods in Hele — Shaw moving boundary problems // *Europ. J. Appl. Math.* 1992. V. 3, N 3. P. 209–224.
11. **Маскет М.** Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Л.: Гостоптехиздат, 1949.
12. **Лейбензон Л. С.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.

*Поступила в редакцию 24/XI 2008 г.,
в окончательном варианте — 23/IV 2009 г.*
