ПМТФ, № 1, 1963

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЖИМА ГОРЕНИЯ ПОРОХА В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ [1]

Я. Б. Зельдович

(*Москва*)

При анализе устойчивости горения пороха обычно исходят из заданной зависимости скорости горения от давления. В действительности при быстрых изменениях давления скорость горения может отличаться от своего стационарного значения, соответствующего данному давлению. Для установления стационарной скорости после изменения давления нужно, чтобы успел перестроиться прогретый слой пороха. При быстром изменении давления, когда такая перестройка не успевает произойти, увеличиваются по сравнению со стационарным значением производная du/dp и эффективный показатель степени ν в законе $u = u(1)p^\nu$ или точнее

$$\nu = d \ln u \, / \, d \ln p$$

Поэтому при малом объеме камеры и низком давлении, когда характерное гидродинамическое время изменения давления меньше времени сгорания прогретого слоя, может произойти потеря устойчивости.

Ниже дан математический анализ вопроса в простейшем предположении об отсутствии акустических волн внутри камеры; предположения о механизме горения пороха[2], лежащие в основе статьи, изложены в работе [1].

Устойчивость стационарного горения пороха в полузамкнутом объеме рассмотрена теоретически методом малых возмущений с учетом распределения температуры в порохе, влияния этого распределения на скорость горения и связи между скоростью горения и давлением.

Горение оказывается неустойчивым при малых давлениях. Дается критерий условий устойчивости, зависящий от свободного объема камеры и площади критического сечения сопла.

Выясняется картина процесса при неустойчивом горении; приводится сравнение теоретических результатов с экспериментом.

§ 1. Устойчивость в классической теории. Начнем с анализа выводов классической теории. Закон изменения давления в полузамкнутом объеме может быть записан так:

$$V \frac{d\rho}{dt} = \frac{V}{f} \frac{dp}{dt} = -g_- + g_+ \qquad (1.1)$$

Здесь V — объем камеры, ρ — плотность газа, t — время, f — сила пороха, p — давление, g_- — расход газа через сопло, g_+ — выделение газа при горении, g_- определяется законом истечения [3]

$$g_- = A\sigma p \qquad (1.2)$$

A — коэффициент, σ — критическое сечение сопла, p — давление в камере, g_+ определяется законом горения пороха, который в классической теории запишем так:

$$g_+ = Su(p)\delta \qquad (1.3)$$

---

[1] По материалам отчета Института химической физики Академии наук за 1942 г.

[2] Заметим, что за истекшие годы по механизму горения опубликовано много работ; укажем работы П. Ф. Похила [2–4].

[3] В данной работе не учитывается изменение температуры газов в камере при быстром изменении давления.

где S — поверхность пороховых зерен, δ — плотность пороха; $u(p)$ — скорость горения

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{A\sigma f}{V}\,p + \frac{S\delta}{V}\,u(p) \tag{1.4}$$

Введем эффективное время истечения

$$\tau_1 = \frac{V}{A\sigma f}$$

Величины, характеризующие стационарный режим p_1 и u_1, определяются уравнениями

$$\frac{dp_1}{dt_1} = 0, \qquad u_1 = u(p_1) = \frac{A\sigma}{S\delta}\,p_1 \tag{1.5}$$

Основное уравнение (1.4) запишем так:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_1}\frac{p_1}{u_1}\,u \tag{1.6}$$

Исследуем режим, близкий к стационарному, методом малых возмущений, подставляя

$$u = u_1 + u_2 e^{\omega t}, \qquad p = p_1 + p_2 e^{\omega t} \tag{1.7}$$

$$u = u(p) = u(p_1) + \left(\frac{du}{dp}\right)_1 p_2 e^{\omega t} = u_1 + \left(\frac{du}{dp}\right)_1 p_2 e^{\omega t} \tag{1.8}$$

Уравнение (1.6) примет вид

$$p_2 e^{\omega t} = -\frac{1}{\tau_1}\,p_2 e^{\omega t} + \frac{1}{\tau_1}\frac{p_1}{u_1}\left(\frac{du}{dp}\right)_1 p_2 e^{\omega t} \tag{1.9}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau_1}(-1 + \nu), \qquad \nu = \frac{p_1}{u_1}\left(\frac{du}{dp}\right)_1 = \frac{d\ln u}{d\ln p} \tag{1.10}$$

Величина ν есть показатель в степенном законе горения

$$u = u(1)p^{\nu} \tag{1.11}$$

В зависимости от знака $(-1 + \nu)$ возможны только два типа решений: либо $\nu < 1$, режим устойчив, $\omega < 0$ и $p_2 e^{\omega t}$ экспоненциально падает, либо $\nu > 1$, $p_2 e^{\omega t}$ экспоненциально растет, режим, соответствующий p_1, будет неустойчив. Устойчивость режима при данном давлении зависит исключительно от показателя закона горения пороха. Таковы выводы элементарной классической теории. Найденное экспериментально значение $\nu < 1$, так что из элементарной теории следует устойчивость горения при любом p_1, при любом соотношении σ / S.

§ 2. Распределение температур в порохе. Как было показано ранее [1], скорость горения в каждый данный момент определяется мгновенным значением давления над поверхностью пороха и величиной φ градиента температуры у поверхности, характеризующего состояние ближайшей к поверхности и сгорающей в данный момент части прогретого слоя пороха

$$u = u(p, \varphi) \tag{2.1}$$

Величина φ, так же как и все распределение температуры в порохе, зависит от тех воздействий, которые порох испытал до рассматриваемого момента. Когда скорость горения поддерживается постоянной в течение длительного времени, величина φ стремится к определенному пределу, зависящему от скорости горения и начальной температуры пороха. Но так как u зависит от p и φ, то окончательно стационарное значение φ определяется давлением p и температурой пороха T_0.

Величина φ должна быть найдена решением следующей тепловой задачи: поверхность заданной,постоянной температуры движется со скоростью u в среде, тепловые свойства которой известны; задана начальная температура среды T_0. Надлежит найти значение градиента температуры у поверхности, на которой поддерживается $T = T_k$.

Температура горящей поверхности зависит от скорости горения слабологарифмически, поэтому при решении тепловых задач приближенно можно считать температуру поверхности горящего вещества постоянной.

Распределение температуры в горящем порохе описывается решением Михельсона — Герца

$$\frac{T - T_0}{T_k - T_0} = \exp\left(-\frac{u(x - ut)}{\varkappa}\right) \qquad \left(\varkappa = \frac{\lambda}{c_p'\delta}\right) \tag{2.2}$$

Здесь $\varkappa$ — температуропроводность, λ — теплопроводность пороха, $c_p'\delta$ — объемная теплоемкость.

Легко убедиться в том, что (2.2) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

Удовлетворено и граничное условие задачи $T = T_k$ при $x = ut$. На поверхности, движущейся с постоянной скоростью u, найдем

$$\varphi_c = -\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{T=T_k} = -\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=ut} = (T_k - T_0)\frac{u}{\varkappa} = \varphi_c(u, T_0) \tag{2.4}$$

Подставляя это выражение φ_c в (2.1), получим выражение для определения того единственного значения скорости при данном давлении и начальной температуре, которое должно осуществляться при длительном поддержании данного давления; это состояние горения называем стационарным режимом и отмечаем относящиеся к нему величины индексом c

$$u_c = u[p, \varphi_c(u, T_0)] \tag{2.5}$$

$$u_c = u(p, T_0) \tag{2.6}$$

Стационарный режим подчиняется простым соотношениям, которые позволяют $u_c(p, T_0)$ непосредственно выразить через p и T_0, тепловые и кинетические свойства пороха и продуктов его газификации и диспергирования [2] без помощи уравнений (2.1), (2.4) и (2.5).

Зависимость (2.6) стационарной скорости горения от давления и начальной температуры пороха определяется экспериментально в обычных условиях опыта. Вследствие экспериментальных трудностей достигаемая в настоящее время точность измерений не вполне удовлетворительна и по отдельным вопросам, касающимся этой зависимости, существуют расхождения между различными авторами. Однако принципиальных затруднений в измерении нет, в дальнейшем будем считать зависимость (2.6) установленной. Воспользуемся этой зависимостью u от p и T_0, установленной на опыте, для того, чтобы определить зависимость скорости u от давления и градиента температуры φ. Температуру газификации T_k считаем известной и постоянной. В действительности измерение или вычисление T_k представляет собой трудную задачу. Постоянство T_k также, строго говоря, не имеет места. Величина T_k должна быть такой, чтобы обеспечить скорость газификации и диспергирования, равную скорости горения. Толщина подслоя, в котором происходит газификация, обратно пропорциональна $u\delta$. Таким образом, удельная (на единицу объема или на единицу веса пороха) скорость газификации и диспергирования должна быть пропорциональна произведению $u\delta$; чем больше это произведение, тем выше должна быть температура поверхности T_k. Однако вследствие весьма сильной зависимости удельной скорости газификации от температуры, значительное изменение $u\delta$ вызывает лишь малое изменение T_k; поэтому можно приближенно считать T_k постоянной величиной.

Итак, имея таблицу измеренных значений u_c (p, T_0), при различных p и T_0 по формуле (2.5) подсчитываем для каждой пары значений p и T_0 величину градиента φ_c, сопоставляя относящиеся к этому опыту величины u, p, φ (φ вычислено по формуле (2.4)), получим таблицу, представляющую зависимость (2.1).

После этих замечаний составим выражение полного дифференциала (2.5) и (2.4)

$$du = \frac{\partial u}{\partial p}\Big|_{T_0} dp + \frac{\partial u}{\partial T_0}\Big|_p dT_0 = \nu \frac{u}{p} dp + \beta u dT_0 \tag{2.7}$$

$$d\varphi = \frac{T_k - T_0}{\varkappa} du - \frac{u}{\varkappa} dT_0 = \frac{\varphi}{u} du - \frac{\varphi}{T_k - T_0} dT_0 =$$

$$= \nu \frac{\varphi}{p} dp - \left(\frac{1}{T_k - T_0} - \beta\right) \varphi \, dT_0 \tag{2.8}$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial T_0}\Big|_p = \frac{\partial \ln u}{\partial T_0}\Big|_p \tag{2.9}$$

В этих выражениях ν и β не обязательно должны быть постоянными и таким образом мы не ограничиваемся частным случаем какой-либо определенной зависимости u_c от p и T_0. При помощи (2.8) выразим dT_0 через dp и $d\varphi$ и подставим в равенство (2.7); в результате получим

$$du = \frac{\nu}{1 - \beta(T_k - T_0)} \frac{u}{p} dp - \frac{\beta(T_k - T_0)}{1 - \beta(T_k - T_0)} \frac{u}{\varphi} d\varphi \tag{2.10}$$

Сопоставляя (2.10) с выражением полного дифференциала (2.1)

$$du = \left(\frac{du}{dp}\right)_\varphi dp + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_p d\varphi \tag{2.11}$$

найдем

$$\left(\frac{du}{dp}\right)_\varphi = \frac{u}{p} \frac{\nu}{1 - \beta(T_k - T_0)}$$

$$\left(\frac{\partial \ln u}{\partial \mathrm{nl}\, p}\right)_\varphi = \frac{\nu}{1 - \beta(T_k - T_0)}, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_p = - \frac{\beta(T_k - T_0)}{1 - \beta(T_k - T_0)} \frac{u}{\varphi} \tag{2.12}$$

Теперь находим

$$a = \left(\frac{\partial \ln u}{\partial \ln p}\right)_\varphi = \frac{\nu}{1-k}, \qquad b = -\frac{\varphi}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_p = \frac{k}{1-k} \qquad (k = \beta(T_k - T_0)).$$

Отсюда

$$a = \nu(b + 1) \tag{2.13}$$

Исследуем устойчивость режима горения методом малых возмущений. Наложим малое возмущение на распределение температуры (2.2). Возмущенное распределение

$$T = T_1 + B\exp(mx + nt) = T_0 + (T_k - T_0)\exp\left(-\frac{u_1 x}{\varkappa} + \frac{u_1^2 t}{\varkappa}\right) +$$

$$+ B\exp(mx + nt) \tag{2.14}$$

Здесь u_1 и T_1 — невозмущенное значение скорости и температуры[1]. Уравнение (2.3) дает связь

$$n = \varkappa m^2 \tag{2.15}$$

Найдем положение поверхности; возмущение будем считать малым ($B \ll T_k - T_0$), поверхность расположена вблизи невозмущенного положения $x_1 = u_1 t$.

Разложим (2.14) в ряд по $x - x_1 = x - u_1 t$. Пренебрегая квадратами и произведениями малых величин, получим

$$T = T_k - (T_k - T_0)\,\frac{u_1}{\varkappa}(x - u_1 t) + B \exp[(mu_1 + \varkappa m^2)\,t] \tag{2.16}$$

$$T = T_k, \quad x = u_1 t + \frac{B}{T_k - T_0}\,\frac{\varkappa}{u_1} \exp[(mu_1 + \varkappa m^2)\,t] \tag{2.17}$$

Элементарными вычислениями найдем возмущенное значение скорости и градиента

$$u = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{T=T_k} = u_1 + (mu_1 + \varkappa m^2)\,\frac{B}{T_k - T_0}\,\frac{\varkappa}{u_1} \exp[(mu_1 + \varkappa m^2)\,t] \tag{2.18}$$

$$\varphi = \varphi_1 - B\left(\frac{u_1}{\varkappa} + m\right) \exp[(mu_1 + \varkappa m^2)\,t] \tag{2.19}$$

Представим скорость в обычном для теории возмущений виде

$$u = u_1 + u_2 e^{\omega t} \tag{2.20}$$

Сопоставляя с (2.18), найдем

$$\omega = mu_1 + \varkappa m^2, \qquad u_2 = (mu_1 + \varkappa m^2)\,\frac{B}{T_k - T_0}\,\frac{\varkappa}{u_1} \tag{2.21}$$

Выразим величины m и B через ω и u_2 и затем найдем величину градиента φ.

Первое уравнение (2.21) для определения m имеет два корня; следует выбрать отрицательный корень для того, чтобы возмущение распределения температуры было малым на большом расстоянии от границы, при больших x, глубоко внутри пороха.

В результате для m и B получим

$$m = -\frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 4\omega\varkappa}}{2\varkappa}, \qquad B = \frac{u_1}{\varkappa\omega}(T_k - T_0)\,u_2 \tag{2.22}$$

Исключая при помощи этих выражений m и B из (2.19), имеем

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{u_1}{\varkappa\omega}\,\frac{\sqrt{u_1^2 + 4\omega\varkappa} - u_1}{2\varkappa}\,(T_k - T_0)\,u_2 e^{\omega t} \tag{2.23}$$

Введем $\tau_2 = \varkappa / u^2$ — эффективное время тепловой релаксации прогретой зоны пороха; тогда

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\sqrt{4\omega\tau_2 + 1} - 1}{2\omega\tau_2}\,\frac{T_k - T_0}{\varkappa}\,u_2 e^{\omega t} = \varphi_1 + \frac{\sqrt{4\omega\tau_2 + 1} - 1}{2\omega\tau_2}\,\frac{\varphi_1}{u_1}\,u_2 e^{\omega t} \tag{2.24}$$

При медленно меняющейся скорости ($|\omega\tau_2| \ll 1$) зависящая от ω дробь обращается в 1; так же как в стационарном режиме, градиент прямо пропорционален скорости; при быстром изменении скорости ($|\omega\tau_2| \gg 1$), дробь стремится к нулю: распределение не успевает следовать за изменением скорости, градиент не успевает изменяться.

[1] Во внутренней баллистике обозначение u_1 часто применяется для скорости горения при атмосферном давлении. Здесь эту величину обозначаем u (1), сохраняя обозначение u_1 для невозмущенного стационарного значения скорости при соответствующем стационарном давлении p_1.

§ 3. Уравнения малых возмущений. Для определения устойчивости стационарного горения необходимо определить частоту ω, с которой изменяется малое возмущение, из рассмотрения следующих трех уравнений: уравнения (2.24), дающего зависимость градиента от скорости; уравнения (1.4) — изменения давления в камере и, наконец, уравнения (2.1), описывающего зависимость скорости горения от давления и градиента.

В уравнения подставим

$$p = p_1 + p_2 e^{\omega t}, \qquad u = u_1 + u_2 e^{\omega t}, \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 e^{\omega t} \tag{3.1}$$

Невозмущенные величины удовлетворяют уравнениям и сокращаются

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 e^{\omega t} = \varphi_1 + \frac{\sqrt{4\omega\tau_2 + 1} - 1}{2\omega\tau_2} \frac{\varphi_1}{u_1} u_2 e^{\omega t} \tag{3.2}$$

$$\frac{\sqrt{4\omega\tau_2 + 1} - 1}{2\omega\tau_2} \frac{\varphi_1}{u_1} u_2 - \varphi_2 = 0 \tag{3.3}$$

Уравнение давления преобразуем совершенно так же, как выше в элементарном исследовании

$$\omega p_2 e^{\omega t} = -\frac{1}{\tau_1} p_2 e^{\omega t} + \frac{1}{\tau_1} \frac{p_1}{u_1} u_2 e^{\omega t} \tag{3.4}$$

$$(\omega\tau_1 + 1) p_2 - \frac{p_1}{u_1} u_2 = 0 \tag{3.5}$$

Используя разложение в ряд, из уравнения (2.1) имеем

$$u = u_1 + u_2 e^{\omega t} = u(p_1, \varphi_1) + \frac{\partial u}{\partial p} p_2 e^{\omega t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi_2 e^{\omega t} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} p_2 - u_2 + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi_2 = 0 \tag{3.7}$$

Частоту определяем из условия совместности трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными (3.3), (3.5), (3.7), что сводится к тому, что должен равняться нулю детерминант, составленный из коэффициентов уравнений

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\varphi_1}{u_1} \dfrac{\sqrt{4\omega\tau_2 + 1} - 1}{2\omega\tau_2} & -1 \\ \omega\tau_1 + 1 & -\dfrac{p_1}{u_1} & 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\right)_\varphi & -1 & \left(\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_p \end{vmatrix} = 0 \tag{3.8}$$

Анализ определителя, приведенный в приложении, показывает, что устойчивость режима горения определяется значением отношения характерного времени истечения газа из камеры τ_1 ко времени релаксации теплового слоя пороха τ_2

$$\theta = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{Vu^2}{A\sigma f \varkappa} \tag{3.9}$$

Когда θ становится меньше критического значения θ_*, режим горения становится неустойчивым к малым возмущениям. Значение θ_* зависит от параметров, характеризующих горение пороха, а именно от ν и $k = \beta(T_k - T_0)$.

Приводим результаты вычислений значений θ_* для одного значения $\nu = {}^2/_3$ и переменного $k \leqslant 1$, что представляет интерес для выяснения влияния температуры пороха на условия аномального горения

$k = 0.333$	0.4	0.5	0.6	0.7	1.0
$\theta_* = \sim(3k-1)^3 > 0$	0.004	0.03	0.08	0.14	0.333
$x_* = \sim(3k-1)^{-2} \to \infty$	16	6	3	2.3	1.73
$z = \sim(3k-1)^{-1} \to \infty$	80	34	27	20	11

Здесь приведены также значения безразмерной частоты колебаний $x_* = \omega\tau_2$ на границе устойчивости, а также значения $z = T / \tau_1$, где T — период колебаний давления в камере, τ_1 — время релаксации камеры на границе устойчивости или вблизи этой границы (очевидно $x_* z\theta_* = 2\pi$).

§ 4. Критическое условие границы стационарного горения. Критическое условие имеет следующий вид:

$$\theta - \frac{Vu_1^2}{A\sigma f\varkappa} = \theta_* \tag{4.1}$$

Величина θ_* зависит от свойств пороха; в первом приближении для данного пороха только от его температуры, но не от давления. Стационарная скорость горения u_1 зависит от давления

$$u = u(1)\, p^{\nu} \tag{4.2}$$

Выражение (4.1) принимает вид

$$\theta = \frac{Vu^2(1)\, p_1^{2\nu}}{A\sigma f\varkappa} = Mp_1^{2\nu} = \theta_* \tag{4.3}$$

Само стационарное давление p_1 в камере зависит от сечения сопла, поверхности и свойств пороха. Подставляя принятый закон (4.2) в выражение элементарной теории, имеем

$$P_1 = \left(\frac{Su(1)\,\delta}{A\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\nu}} \tag{4.4}$$

Окончательно критическое условие получим в виде

$$\theta = \frac{VS^{\frac{2\nu}{1-\nu}}\, u(1)^{\frac{2}{1-\nu}}\, \delta^{\frac{2\nu}{1-\nu}}}{\sigma^{\frac{1+\nu}{1-\nu}}\, A^{\frac{1+\nu}{1-\nu}}\, f\varkappa} = \theta_* \tag{4.5}$$

Величина θ_* зависит от ν и может быть вычислена способом, указанным в приложении. Если левая часть в равенствах (5.1), (5.3), (4.5) больше стоящего справа критического значения θ_*, то стационарное горение устойчиво, если меньше, то стационарное горение неустойчиво. Увеличение объема способствует устойчивому горению; увеличение сечения сопла, напротив, способствует неустойчивости горения: прямо через уменьшение τ_1 и косвенно, при постоянной поверхности заряда — через уменьшение давления и рост τ_2. Также через изменение давления влияет (при данном σ) изменение поверхности заряда.

Заметим, что по формуле (4.5) θ растет по мере сгорания заряда, так как рост свободного объема влияет сильнее, чем уменьшение оголенной поверхности (если это уменьшение имеет место). В действительности, скорость горения $u(1)$ зависит от обдувания поверхности горящего зерна пороховыми газами. Поэтому по мере выгорания заряда увеличение свободного сечения приводит к понижению $u(1)$, падению p_1 и таким образом может привести к падению θ и возникновению неустойчивости.

§ 5. Ожидаемое протекание процесса в случае неустойчивости. Исследование методом малых возмущений позволяет сделать выводы о характере протекания процесса. В первом приближении будем считать все конструктивные параметры и константы пороха постоянными, так что имеются необходимые для осуществления строго стационарного процесса условия.

Представим себе малое возмущение, вызванное, например, кратковременным закрытием сопла, с последующим его открытием. При θ, близком к θ_*, но большем, чем θ_* (когда горение еще устойчиво), начальное возмущение вызывает колебания величин, характеризующих процесс — давления, скорости горения, градиента температуры. Период колебаний пропорционален τ_1, причем коэффициент пропорциональности может существенно превышать единицу, как это видно из приведенных на стр. 73 данных.

Амплитуда колебаний уменьшается тем медленнее, чем ближе θ и θ_k.

Если же θ несколько меньше θ_*, то частота колебаний остается в первом приближении той же, но амплитуда экспоненциально возрастает, также тем медленнее, чем ближе θ и θ_*.

В теории малых возмущений (в которой все величины разлагаются в ряд и сохраняются члены первого порядка) колебания симметричны. При большой амплитуде, очевидно, это будет не так. Сверху амплитуда ограничена. Температура горения ни в коем случае не превосходит температуры горения пороха, целиком прогретого до T_k; соответственно этому устанавливается верхний предел скорости горения и давления. Напротив, падение скорости и падение давления может привести к условиям потухания; давление при этом упадет не до нуля, а до атмосферного давления.

Как известно, порох способен гореть и при атмосферном давлении, правда, с малой скоростью и, следовательно, широкой зоной прогрева твердой фазы. В зависимости от ряда обстоятельств, в частности от наличия в камере горячих точек, локально воспламеняющих порох, потухший заряд либо остается недогоревшим, либо снова воспламеняется; воспламенение начинается при атмосферном давлении, но по мере того как оно охватывает всю поверхность, давление растет и может даже превзойти стационарное давление, отвечающее данной величине поверхности пороха. Причиной ожидаемого завышенного давления явится горение пороха, прогретого глубже, чем это отвечает повышенному давлению. Однако в ходе горения при высоком давлении с большой скоростью прогретый слой оказывается вскоре сожженным, падает скорость горения, падает давление и порох снова гаснет. Ширина зоны прогрева твердой фазы при горении при атмосферном давлении достигает 0.25 *мм*. Поэтому можно ожидать для пороха толщиной свода 4.5 *мм* до двух десятков отдельных вспышек.

§ 6. Краткий обзор экспериментальных данных. Неустойчивое горение пороха в полузамкнутой камере РС при низком давлении было отмечено уже давно. При попытках увеличения длины заряда было установлено, что при данном максимальном давлении увеличение длины приводит к аномалиям. Появление аномалий зависит от отношения поверхности пороха к свободному сечению камеры (критерий $\varkappa$ Ю. А. Победоносцева); критическое значение $\varkappa$ тем ниже, чем меньше максимальное давление.

Опытами автора с О. И. Лейпунским показано, что аномалии при низком давлении не зависят от свободного свечения камеры: в узкой длинной камере с малым свободным сечением и в широкой короткой камере (в которой пороховая трубка лежит поперечно по отношению к оси камеры и сопла) аномальное горение наступает при одинаковом давлении. Показано далее, что при низком давлении граница аномалий зависит от свободного объема камеры. Присоединение резервного объема к закрытому концу камеры понижает давление, при котором начинается аномальное горение в соответствии с изложенной теорией. Между тем, присоединенный таким образом объем не влияет ни на свободное сечение камеры, ни на условия обдува порохового зерна продуктами горения.

Аномалии горения длинных зарядов при высоком максимальном давлении действительно зависят от свободного сечения и критерия $\varkappa$ Ю. А. Победоносцева.

Однако, по нашему мнению, аномалии связаны с длиной заряда только косвенно, влияние обдувания пороховыми газами на скорость горения приводит к значительной дегрессивности заряда, падению давления по мере горения заряда в результате увеличения свободного сечения и уменьшения скорости обдува. Аномалии и потухание являются результатом падения давления.

При понижении давления уменьшается полнота сгорания пороха. Так, нитроглицериновый порох при высоких давлениях сгорает до N_2, а при более низких — до NO. Это явление влияет на устойчивость горения, однако в настоящей работе изменение полноты сгорания не учитывается.

Приложение. Анализ определителя (3.8). Раскрывая определитель, имеем

$$\omega\tau_1 + 1 - \frac{p_1}{u_1}\frac{\partial u}{\partial p} - (\omega\tau_1 + 1)\frac{\varphi_1}{u_1}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sqrt{4\omega\tau_2 + 1} - 1}{2\omega\tau_2} = 0 \qquad (\text{П.1})$$

Для исследования уравнения введем безразмерные величины

$$y = \omega\tau_2, \qquad \theta = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{vu_1^2}{A\sigma/\varkappa}, \qquad a = \frac{p}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_\varphi = \frac{d\ln u}{d\ln p}$$

$$b = -\frac{\varphi}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_p = -\frac{\partial \ln u}{\partial \ln \varphi} \qquad (\text{П.2})$$

В этих обозначениях (П.1) примет вид

$$\theta y + 1 - a + (\theta y + 1)\, b\,\frac{\sqrt{4y+1} - 1}{2y} = 0 \qquad (\text{П.3})$$

Группируя члены, имеем

$$\frac{(\theta y + 1)\, b\sqrt{4y+1}}{2y} = (a - 1 - \theta y) + \frac{b}{2y}(\theta y + 1) = \frac{(\theta y + 1)(b - 2y)}{2y} + a \qquad (\text{П.4})$$

Возводя в квадрат, получаем окончательно

$$y^3\theta^2 + y^2(2\theta - 2a\theta - b\theta^2 - b^2\theta^2) + y(1 - 2a + a^2 + ab\theta - 2b\theta - 2b^2\theta) + ab - b - b^2 = 0 \qquad (\text{П.5})$$

Это уравнение служит для того, чтобы по константам a и b, зависящим только от свойств пороха, и по аппаратурной константе θ, зависящей не только от свойств пороха, но и от размеров камеры и сопла, найти неизвестную y, характеризующую частоты ω, с которыми произвольное малое возмущение меняется со временем.

Уравнение имеет три корня, каждому из которых отвечает определенное соотношение p_2, u_2, φ_2. Число корней отвечает числу независимых переменных, определяющих произвольное малое возмущение. Режим устойчив в том случае, если все три корня имеют отрицательную вещественную часть, т. е. любое возмущение затухает, уменьшается с течением времени.

Если же хотя бы один из корней имеет положительную вещественную часть, возмущение (соответствующая его компонента) неограниченно экспоненциально растет с течением времени и приводит вскоре к конечным, большим нарушениям процесса. Стационарный режим в этом случае является неустойчивым.

Соответственно и при исследовании уравнения для поставленных целей не столь важны выражения корней, сколько определение того критического значения аппаратурной константы θ, при котором происходит переход от устойчивого к неустойчивому режиму, устойчивость теряется.

При непрерывном изменении параметров (в данном случае θ) корни уравнения в комплексной плоскости меняются непрерывно.

Очевидно, что на границе устойчивости вещественная часть одного из корней равна нулю. Как видно из уравнения, мнимая часть этого корня в нуль не обращается, так как $y = 0$ уравнению не удовлетворяет. Таким образом, на границе устойчивости уравнению удовлетворяет чисто мнимый корень. Подставим $y = ix$, где x — вещественное число, в уравнение; очевидно, что мнимая и вещественная часть уравнения порознь равны нулю. Таким образом, для границы устойчивости получим два уравнения

$$-x^2\theta^2 + 1 - 2a + a^2 + ab\theta - 2b\theta - 2b^2\theta = 0 \qquad (\text{П}.6)$$

$$-x^2(2\theta - 2a\theta - b\theta^2 - b^2\theta^2) + ab - b - b^2 = 0 \qquad (\text{П}.7)$$

Исключая x^2, получим уравнение для θ, определяющее критическое на границе устойчивости значение этого параметра

$$\theta\,[\theta^2 b^2 (b+1)(2b+2-a) + \theta b(-a^2 b + 6ab - 4b - 3a^2 + 7a - 4) - 2(a-1)^3] = 0 \quad (\text{П}.8)$$

Корень $\theta = 0$ является побочным; интерес представляет только положительный корень квадратного относительно θ уравнения (П.8). Соответствующие три корня уравнения (П.5) также находятся элементарно, так как коэффициенты вещественны, комплексные и мнимые корни уравнения должны быть попарно сопряженными; два корня (как раз те, у которых вещественная часть меняет знак) находим из уравнения (П.6) и (П.7)

$$y_{1,2} = \pm ix_* = \pm \frac{i}{\theta}\sqrt{1 - 2a + a^2 + ab\theta - 2b\theta - 2b^2\theta} \qquad (\text{П}.9)$$

Третий корень находим делением уравнения (П.5) на $(y - y_1)(y - y_2) = y^2 + x_k^2$. Получим

$$y_3 = -\frac{2\theta - 2a\theta - b\theta^2 - b^2\theta^2}{\theta^2} \equiv \frac{ab - b - b^2}{1 - 2a + a^2 + ab\theta - 2b\theta - 2b^2\theta} \qquad (\text{П}.10)$$

Расчеты показывают, что $y_3 < 0$, так что устойчивость режима действительно зависит от знака вещественной части $y_{1,2}$. Формулы (П.9) и (П.10) имеют место для $\theta = \theta_*$, удовлетворяющего (П.8).

Из уравнения (П.8) видно, что для существования положительного корня необходимо $a > 1$; при $a = 1$, $\theta_* = 0$, $y = i\infty$.

Эти общие соотношения имеют простой физический смысл: a есть логарифмическая производная скорости по давлению при постоянном φ, т. е. для весьма быстрых изменений давления

$$a = \frac{\nu}{1 - \beta(T_k - T_0)}$$

иначе можно сказать, что a есть эффективный показатель в законе изменения скорости горения при весьма быстром изменении давления. Значение для устойчивости равенства $\nu = 1$ было выяснено (см. выше). Получающееся при этом $\theta_* = 0$ означает $\tau_1/\tau_2 = 0$; условием проявления неустойчивости является малость времени истечения по сравнению с временем тепловой релаксации, что необходимо для возможности быстрого изменения давления; $y = i\infty$ означает $|\omega\tau_2| = \infty$, система неустойчива только относительно колебаний высокой частоты.

Чем больше эффективный показатель ν для весьма быстрого изменения давления, тем при меньшей скорости изменения давления будет достигнуто критическое значение $\nu_* = 1$: устойчивость будет потеряна при большем θ и меньшем $\omega\tau_2$.

Автор пользуется случаем выразить благодарность О. И. Лейпунскому за дискуссии и ценный вклад в работу и А. Д. Марголину за большую помощь в подготовке работы к печати и ценное обсуждение ее.

Поступила 22 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, № 12.
2. Похил П. Ф. О механизме горения бездымных порохов. Ч. I, Сб. «Физика взрыва», 1953, № 2.
3. Похил П. Ф., Ромоданова Л. Д., Белов М. М. О механизме горения бездымных порохов. Ч. II, Сб. «Физика взрыва», 1955, № 3.
4. Похил П. Ф., Белов М. М. Поджигаемость порохов лучистой энергией. Сб. «Физика взрыва», 1956, № 5.