

УДК 532.65

СТЕКАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С НЕПОСТОЯННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Ю. О. Кабова, В. В. Кузнецов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Получены уравнения движения тонких пленок при линейной зависимости вязкости жидкости и поверхностного натяжения от температуры. Проведен численный анализ влияния различных факторов на положение свободной границы пленки.

Введение. Известно, что при движении тонкой пленки по поверхности плоской подложки локальный подогрев приводит к образованию сложных структур, в частности, к появлению вала жидкости — существенного локального утолщения пленки вблизи нагревателя [1, 2]. Физические причины появления вала исследованы в работе [3], там же предложен критерий его возникновения.

При интенсивных тепловых нагрузках могут возникать значительные температурные градиенты. При этом вязкость существенно отличается от среднего значения. В данной работе исследуется влияние вязкости на поверхностные структуры пленки, вызванные термокапиллярными силами. Динамический коэффициент вязкости μ и коэффициент поверхностного натяжения σ считаются линейно зависящими от температуры: $\mu(T) = \mu_0 - \mu_T(T - T_0)$, $\mu_0, \mu_T = \text{const} > 0$, $\sigma(T) = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$, $\sigma_0, \sigma_T = \text{const} > 0$. Линейное приближение для зависимости $\mu(T)$ используется из следующих соображений. В приближении тонкого слоя обычно точно интегрируются упрощенные уравнения движения поперек потока и задача сводится к решению одного уравнения для толщины пленки. Если вязкость непостоянна, то точное интегрирование, вообще говоря, невозможно. Однако при линейной зависимости вязкости от температуры оно оказывается возможным, кроме того, удастся получить необходимые для замыкания задачи зависимости между толщиной пленки, расходом и вариацией температуры в случае слоистых течений. Следует отметить, что в диапазоне изменения температуры, характерном для рассматриваемого конкретного случая, всегда можно приближенно аппроксимировать зависимость вязкости от температуры линейной функцией. В качестве примера на рис. 1 представлены зависимости $\mu(T)$ для 10 и 25 %-го растворов этанола в воде. Если температура некоторого процесса находится, например, в интервале от 20 до 40 °С, то в качестве аппроксимации можно использовать изображенный на рис. 1 отрезок прямой. При других вариациях температуры используются другие линейные зависимости. Коэффициент теплопроводности будем считать постоянным из следующих соображений. Согласно [4] измерение коэффициента теплопроводности включает установление так называемого приемлемого интервала температуры, в котором этот коэффициент можно считать постоянным. Для рассматриваемых жидкостей (растворов спирта в воде) изменение температуры в пределах этого

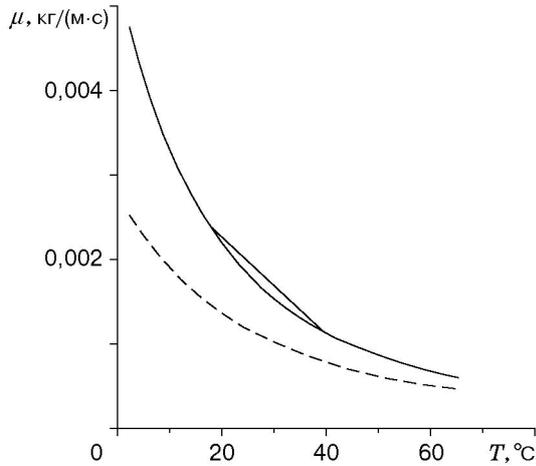


Рис. 1. Зависимость вязкости от температуры:

штриховая кривая — 10 %-й раствор этанола в воде, сплошная — 25 %-й раствор этанола в воде

интервала может достигать 10–20 °С. В то же время при таких вариациях температуры динамический коэффициент вязкости меняется существенно (на десятки процентов).

Постановка задачи. Рассмотрим установившееся стекание под действием силы тяжести пленки вязкой несжимаемой жидкости по наклонной плоской поверхности (подложке). Подложка наклонена к горизонту под углом α . Выберем систему декартовых координат (x, y) так, чтобы ось y была ортогональна подложке. Жидкость занимает область $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < H(x)\}$, где H — толщина пленки.

Если u, v — компоненты вектора скорости, p — гидродинамическое давление, T — температура жидкости, то движение жидкости описывается системой уравнений

$$\rho(uu_x + vv_y) = -p_x + \rho g \sin \alpha + 2(\mu u_x)_x + (\mu(u_y + v_x))_y; \quad (1)$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = -p_y - \rho g \cos \alpha + 2(\mu u_y)_y + (\mu(u_y + v_x))_x; \quad (2)$$

$$u_x + v_y = 0; \quad (3)$$

$$uT_x + vT_y = \chi(T_{xx} + T_{yy}) \quad (4)$$

с граничными условиями при $y = 0$

$$u = v = 0; \quad (5)$$

$$\varkappa T_y - b_1(T - T_1(x)) = -q \quad (6)$$

и условиями на границе раздела при $y = H$

$$uH_x = v; \quad (7)$$

$$\varkappa T_y + b_2(T - T_2(x)) = 0; \quad (8)$$

$$p_0 - p = -\sigma H_{xx}/(1 + H_x^2)^{3/2} + 2\mu[v_y - H_x(u_y + v_x) + H_x^2 u_x]/(1 + H_x^2); \quad (9)$$

$$\mu[2H_x(v_y - u_x) + (1 - H_x^2)(v_x + u_y)]/(1 + H_x^2) - \sigma_T T_s = 0. \quad (10)$$

Здесь T_0 — средняя температура жидкости; $\chi = \varkappa/(\rho c_p)$; \varkappa — коэффициент теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость; ρ — плотность жидкости; p_0 — давление в газе; q — задаваемый тепловой поток; g — ускорение свободного падения. Условие третьего рода (6) использовано в качестве теплового условия для рассматриваемой задачи ввиду его универсальности: при $b_1 \rightarrow \infty$ получаем $T|_{y=0} = T_1(x)$, т. е. задачу с заданным распределением температуры на подложке, при $b_1 \rightarrow 0$ имеет место теплоизоляция или заданный тепловой поток. Таким образом, существует возможность рассматривать конкретные часто встречающиеся варианты теплового режима. Однако входящие в соотношение (6) величины T_1 ,

b_1 , q имеют физический смысл и в случае задания (6) в общем виде. Действительно, задание условий третьего рода есть не что иное, как использование упрощенного решения тепловой задачи для подложки в случае, когда заданное распределение температуры T_1 реализуется не на поверхности подложки, а на некотором удалении от жидкости. При этом коэффициент теплообмена b_1 определяется толщиной слоя возмущения температуры стекающим потоком жидкости. Условие (8) на свободной поверхности имеет аналогичный смысл. Следует заметить, что соотношения (6), (8) не описывают всех возможных тепловых ситуаций на границах пленки.

Вывод уравнений тонкого слоя. Масштабы размерных величин — толщины пленки, скорости жидкости, продольной длины и порядка отклонения температуры от среднего значения — зададим в виде

$$H_0 = \left(\frac{3\Gamma\mu_0}{\rho g \sin \alpha} \right)^{1/3}, \quad U = \frac{\mu_0}{\rho H_0}, \quad l = \left(\frac{\sigma_0 H_0^2}{\rho U^2} \right)^{1/3}, \quad \Delta T = \sup_x |T_1(x) - T_2(x)| + \sup_x \frac{q(x)}{\varkappa H_0}.$$

Здесь $\mu_0 = \mu(T_0)$; Γ — заданный расход жидкости.

Будем рассматривать задачу в приближении тонкого слоя, т. е. $\varepsilon = H_0/l \ll 1$. В задаче (1)–(10) перейдем к безразмерным переменным $x_1, y_1, u_1, v_1, p_1, q_1, h, \theta$ с помощью формул $x = lx_1, y = H_0 y_1, u = U u_1, v = U H_0 v_1/l, H = H_0 h, \mu = \mu_0 - \mu_T \Delta T \theta, p = p_0 + \sigma_0 H_0 p_1/l^2 + \rho g l x_1 \sin \alpha - \rho g H_0 y_1 \cos \alpha, q = \varkappa \Delta T q_1/H_0, T = T_0 + \Delta T \theta, T_1 = T_0 + \Delta T \theta_1, T_2 = T_0 + \Delta T \theta_2$. Используя эти переменные и пренебрегая младшими по степеням ε членами, перепишем уравнения (1)–(10) в виде (индекс 1 далее опускаем)

$$-p_x + [(1 - \lambda\theta)u_y]_y = 0; \quad (11)$$

$$p_y = 0; \quad (12)$$

$$u_x + v_y = 0; \quad (13)$$

$$\theta_{yy} = 0 \quad (14)$$

с граничными условиями при $y = 0$

$$u = v = 0; \quad (15)$$

$$\theta_y - \text{Bi}_1(\theta - \theta_1) = -q \quad (16)$$

и условиями на границе раздела при $y = h$

$$u h_x = v; \quad (17)$$

$$\theta_y + \text{Bi}_2(\theta - \theta_2) = 0; \quad (18)$$

$$-p = Ax - Ch + h_{xx}; \quad (19)$$

$$u_y = -\text{Ma}\theta'|_{y=h}/(1 - \lambda\theta). \quad (20)$$

Здесь безразмерные критерии подобия $A, C, \text{Ma}, \text{Bi}_1, \text{Bi}_2, \lambda$ задаются формулами

$$A = gH_0^2 \cos \alpha / (U^2 l), \quad C = gH_0 \sin \alpha / U^2,$$

$$\text{Ma} = \sigma_T \Delta T H_0^2 / (\mu_0 U l), \quad \text{Bi}_1 = b_1 H_0 / \varkappa, \quad \text{Bi}_2 = b_2 H_0 / \varkappa, \quad \lambda = \mu_T \Delta T / \mu_0.$$

Числа A, C определяют вклад в градиент давления его гидростатических (продольной и поперечной) составляющих, числа Био Bi_1, Bi_2 — интенсивность теплообмена пленки с подложкой и внешней (газовой) средой, модифицированное число Марангони Ma характеризует действие термокапиллярных сил на поверхности неоднородно нагретой пленки. Число λ определяет влияние на рассматриваемые процессы изменения вязкости. Вообще

говоря, в условии (19) второй член в правой части внепорядковый: при малых ε он много меньше первого. Однако, если угол наклона α мал, то порядки этих членов сравнимы.

Сведем задачу (11)–(20) к одному уравнению для функции h . Интегрируя уравнения (14), получаем $\theta = Ny + M$. Из граничных условий (16), (18) следует

$$N = \frac{\text{Bi}_1 \text{Bi}_2 (\theta_1 - \theta_2) - \text{Bi}_2 q}{\text{Bi}_1 \text{Bi}_2 h + \text{Bi}_1 + \text{Bi}_2}, \quad M = \frac{\text{Bi}_2 \theta_2 + (\text{Bi}_2 h + 1)(q + \text{Bi}_1 \theta_1)}{\text{Bi}_1 \text{Bi}_2 h + \text{Bi}_1 + \text{Bi}_2}. \quad (21)$$

Из уравнения (12) и граничного условия (19) находим $p = p(x) = Ax - Ch + h_{xx}$. Дважды интегрируя (11) с учетом граничных условий, получим

$$u = -\frac{p_x y}{\lambda N} + \frac{1}{(1 - \lambda M) \lambda N} \left(\frac{p_x}{\lambda N} [\lambda N h - (1 - \lambda M)] + \text{Ma} \theta' |_{y=h} \right) \ln \left(1 - \frac{\lambda N y}{1 - \lambda M} \right).$$

Из уравнения неразрывности (13) следует

$$v = - \int_0^y u_x(x, t) dt. \quad (22)$$

Подставляя (22) при $y = h$ в кинематическое условие (17), получаем уравнение

$$\varphi h^3 (h''' - Ch' + A) + \gamma h^2 \text{Ma} \theta' |_{y=h} = \Omega \quad (23)$$

(Ω — безразмерный расход). Здесь

$$\gamma(x) = \frac{h^2}{(\lambda N)^2} \left[\frac{\lambda N}{h} + \left(1 - \lambda M - \frac{\lambda N}{h} \right) \ln \left(1 - \frac{\lambda N}{h(1 - \lambda M)} \right) \right]; \quad (24)$$

$$\varphi(x) = \frac{h}{2\lambda N} - \frac{(1 - \lambda N/h - \lambda M) h^3}{(\lambda N)^3} \left[\frac{\lambda N}{h} + \left(1 - \lambda M - \frac{\lambda N}{h} \right) \ln \left(1 - \frac{\lambda N}{h(1 - \lambda M)} \right) \right]; \quad (25)$$

$$\theta |_{y=0} = \frac{\text{Bi}_2 \theta_2 + (\text{Bi}_2 h + 1)(q + \text{Bi}_1 \theta_1)}{\text{Bi}_1 \text{Bi}_2 h + \text{Bi}_1 + \text{Bi}_2}; \quad (26)$$

$$\theta |_{y=h} = \frac{[\text{Bi}_1 \text{Bi}_2 (\theta_1 - \theta_2) - \text{Bi}_2 q] h + \text{Bi}_2 \theta_2 + (\text{Bi}_2 h + 1)(q + \text{Bi}_1 \theta_1)}{\text{Bi}_1 \text{Bi}_2 h + \text{Bi}_1 + \text{Bi}_2}. \quad (27)$$

Если $\lambda N \rightarrow 0$, то $\gamma \rightarrow 1/(2(1 - \lambda M))$, $\varphi \rightarrow 1/(3(1 - \lambda M))$. Поэтому при постоянной вязкости ($\lambda = 0$) уравнение (23) принимает известный вид [5]. Определив h , можно вычислить компоненты поля скоростей u , v , а также распределения давления и температуры.

Для уравнения (23) поставим граничные условия. В предшествующих работах в случае постоянной вязкости принималось, что при удалении от места локального нагрева вверх или вниз по потоку все возмущения затухают и толщина пленки стремится к среднему значению. Это значение определяется по заданному расходу из решения задачи для слоистых течений несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью по наклонной плоскости. Предположим, что существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T_1(x) = T_1^\pm = \text{const}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} T_2(x) = T_2^\pm = \text{const}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) = q^\pm = \text{const}.$$

Вообще говоря, может быть $T_1^+ \neq T_1^-$, $T_2^+ \neq T_2^-$, $T_1^\pm \neq T_2^\pm$, $q^\pm \neq 0$. В случае непостоянной вязкости имеем $H^+ \neq H^-$, где $H^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x)$, причем значения H^+ , H^- отличаются от H_0 . Предполагая, что при удалении от начала координат вверх по потоку течение стабилизируется и не отличается от слоистого, определим связь между установившейся толщиной пленки H^- , расходом Γ и предельными значениями T_1^- , T_2^- , q^- .

Построим решение исходной системы уравнений (1)–(4) вида $u = u(y)$, $v \equiv 0$, $p = p(y)$, $T = T(y)$. В (5)–(10) положим $H = H^-$, $q = q^-$, $T_1 = T_1^-$, $T_2 = T_2^-$. Тогда эти граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} u = 0, \quad \varkappa T_y - b_1(T - T_1^-) = -q^- \quad \text{при } y = 0, \\ p = p_0, \quad u_y = 0, \quad \varkappa T_y + b_2(T - T_2^-) = 0 \quad \text{при } y = H^-. \end{aligned} \quad (28)$$

Задачу (1)–(4), (28) можно решить точно аналогично известному случаю постоянной вязкости. Используя построенное решение, получим искомую связь между параметрами H^- и Γ

$$\Gamma = \frac{\rho g \sin \alpha (H^-)^3}{\mu_0 (1 - \lambda M) k} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1 - k}{k^2} [(1 - k) \ln(1 - k) + k] \right\}, \quad k = \frac{\lambda N}{1 - \lambda M}. \quad (29)$$

Здесь при вычислении значений N , M в формулах (21) следует полагать $T_1 = T_1^-$, $T_2 = T_2^-$, $q = q^-$, $h = H^-/H_0$. Если вязкость жидкости мало отличается от постоянной, то при $\lambda \rightarrow 0$ $k \rightarrow 0$ и (29) превращается в классическую формулу Нуссельта

$$\Gamma = \rho g \sin \alpha (H^-)^3 / (3\mu_0).$$

Понятно, что в случае удаления от начала координат вниз по потоку аналогично можно получить связь между параметрами H^+ и Γ . Соответствующая формула будет совпадать с (29), в которой используются величины с индексом “+”. Таким образом, краевые условия для уравнения (23) задаются в виде

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = h^- = H^-/H_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = h^+ = H^+/H_0. \quad (30)$$

Метод численного решения. Расчеты проводились по следующему итерационному алгоритму. Вначале с использованием заданного значения расхода Γ методом деления отрезка пополам из (29) определялись значения H^\pm . Затем задавалось приближенное значение функции $h(x)$ формулой

$$h^0(x) = \begin{cases} h^-, & x < -1, \\ h^- + (h^+ - h^-)[\sin(\pi x/2) + 1], & -1 < x < 1, \\ h^+, & x > 1. \end{cases}$$

С использованием этого значения по формулам (21), (26), (27) находились первоначальные значения температуры $\theta|_{y=0}$, $\theta|_{y=h}$, по формулам (24), (25) — первоначальные значения функций γ , φ , обозначенные через γ^0 , φ^0 . Далее для уравнения (23) строился его линейный аналог

$$\varphi^0 [(h^0)^3 (h''' - Ch') + (h^0)^2 hA] + \gamma^0 h^0 h \text{Ma} (\theta^0)' |_{y=h} = \Omega. \quad (31)$$

Уравнение (31) с условиями (30) решалось численно, затем начинался следующий шаг итерации: находились новые значения $\theta|_{y=0}$, $\theta|_{y=h}$ и т. д. При этом расчетная область выбиралась настолько большой, что на ее границах возмущения затухали.

Для численного решения уравнения (31) с условиями (30) использовалась пятиточечная разностная схема [6]

$$\begin{aligned} \varphi_i^0 \left[(h_i^0)^3 \left(\frac{-h_{i-2} + 2h_{i-1} - 2h_{i+1} + h_{i+2}}{2\delta^3} - C \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\delta} \right) + (h_i^0)^2 h_i A \right] + \\ + \gamma_i^0 h_i^0 h_i \text{Ma} ((\theta^0)' |_{y=h})_i = \Omega, \quad i = 3, \dots, N - 2. \end{aligned} \quad (32)$$

Для построения численной схемы интервал решения $(-L, L)$ разбивается на $N - 1$ равных промежутка, δ — шаг разбиения. Значение L здесь достаточно велико, так что при

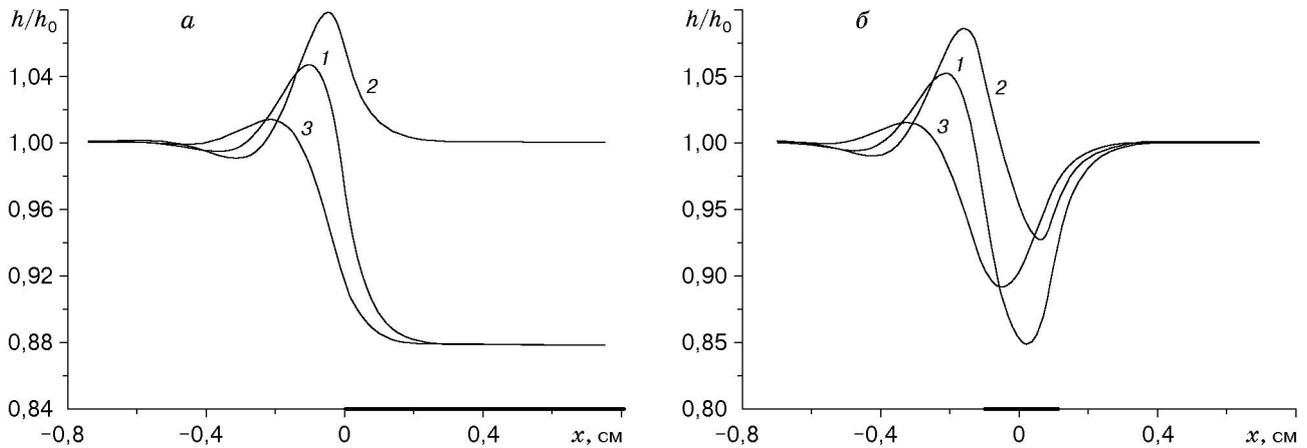


Рис. 2. Изменение толщины пленки при натекании жидкости на обогреваемую подложку (а) и локальном нагреве жидкой пленки (б):

1 — $\lambda = 0,0941$, $Ma = 0,118$; 2 — $\lambda = 0$, $Ma = 0,118$; 3 — $\lambda = 0,0941$, $Ma = 0$

$x = -L$, $x = L$ течение уже не отличается от слоистого. Поэтому к системе линейных уравнений (32) добавляются условия

$$h_1 = h_2 = h^-, \quad h_{N-1} = h_N = h^+. \quad (33)$$

Условия (33) означают, что выполнены условия (30), а также $h' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Результаты расчетов. В расчетах материальные постоянные жидкости соответствовали 25 %-му раствору этилового спирта при 20 °С. Условия теплообмена следующие: $T_1 = T_2 = 20$ °С, $Bi_1 = Bi_2 = 0,15$. Такие значения Bi_1 , Bi_2 отвечают слабому теплообмену между жидкостью и подложкой, жидкостью и газовой фазой. Это соответствует условиям опытов, результаты которых представлены в [1, 2]. Увеличение Bi_1 , Bi_2 приводит лишь к ослаблению термокапиллярных и других тепловых эффектов.

Рассматривались два варианта задания плотности q теплового потока в жидкость со стороны подложки:

а) при натекании жидкости на обогреваемую подложку

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ q_0, & x > 0; \end{cases}$$

б) при локальном нагреве жидкой пленки

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x < -b/2, \\ q_0, & -b/2 < x < b/2, \\ 0, & x > b/2. \end{cases}$$

Здесь b — длина нагреваемого участка; $q_0 = \text{const}$ — интенсивность нагревателя.

На рис. 2,а показано положение свободной границы пленки для варианта “а”. Положение нагревателя выделено жирной линией на оси абсцисс. Вычисления выполнялись при $q_0 = 0,1$ Вт/см², $A = 0,337 < C = 1,68$. Расчет проводился в трех вариантах (номер варианта соответствует номеру кривой на рис. 2): 1 — $\sigma = \sigma(T)$, $\mu = \mu(T)$; 2 — $\sigma = \sigma(T)$, $\mu = \text{const}$; 3 — $\sigma = \text{const}$, $\mu = \mu(T)$. На рис. 2,б приведены результаты расчета положения свободной поверхности для варианта “б” теплового режима. Вычисления проводились при $b = 0,2$ см, $q_0 = 0,1$ Вт/см², $A = 0,337 < C = 1,68$. Следует отметить, что наличие нагреваемого участка приводит к появлению утолщения пленки вблизи передней кромки

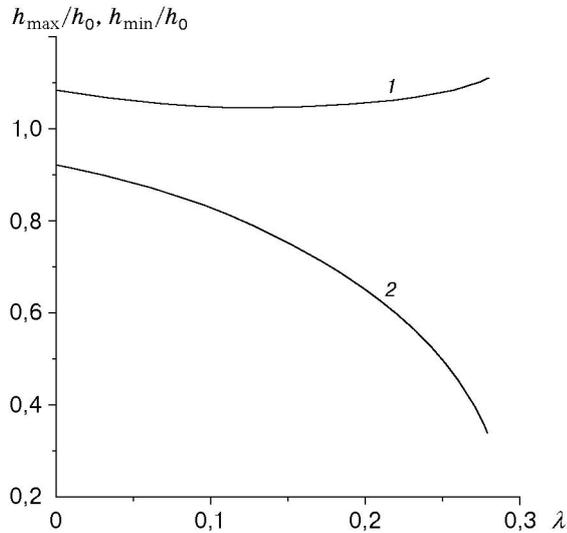


Рис. 3

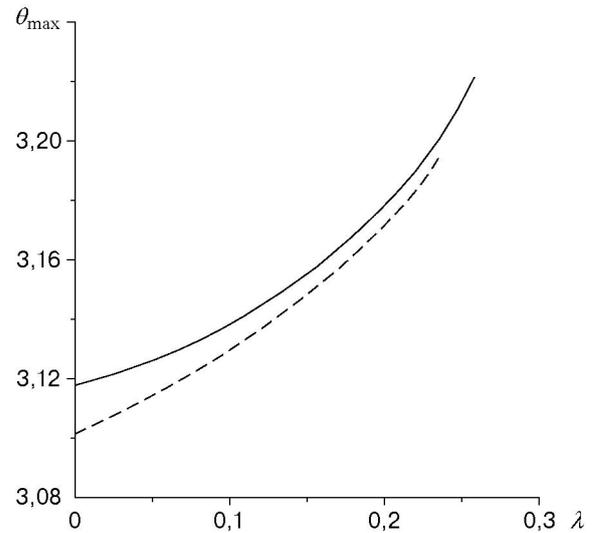


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость максимальной и минимальной толщин пленки от параметра λ для варианта “б”:

1 — h_{\max}/h_0 ; 2 — h_{\min}/h_0

Рис. 4. Зависимость наибольшей поверхностной температуры от параметра λ : штриховая кривая — вариант “а”, сплошная — вариант “б”

нагревателя (жидкого вала), затем толщина пленки уменьшается, достигает минимума и при дальнейшем увеличении принимает постоянное значение, заданное условиями (30). Анализ результатов расчетов позволяет сделать вывод, что число Марангони определяет высоту возникающего жидкого вала пленки, а параметр λ — степень утончения пленки. Этот вывод подтверждается результатами модельных расчетов, приведенными на рис. 3. Заметим, что высота жидкого вала практически не зависит от λ , в то же время с увеличением этого параметра минимальная толщина пленки быстро уменьшается. Другой характеристикой пленки, используемой при анализе возможности ее разрыва, является наибольшая поверхностная температура. Зависимость $\theta_{\max}(\lambda)$ представлена на рис. 4.

Таким образом, при изучении динамики неизотермических пленок необходимо учитывать зависимость вязкости от температуры, поскольку она определяет важнейшие характеристики пленки — наименьшую толщину пленки и степень нагрева свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kabov O. A., Marchuk I. V., Tereshenko A. G.** Heat transfer and flow pattern in falling liquid film on surface none uniform heat flux distribution // Proc. of the 4th World conf. on experimentions heat transfer, fluid mechanics and thermodynamics, Brussels, 2–6 June, 1997. Piza: Edizioni ETS, 1997. V. 2. P. 1205–1214.
2. **Kabov O. A., Chinnov E. A.** Hydrodynamics and heat transfer in evaporating thin liquid layer flowing on surface with local heat source // Heat transfer 1998: Proc. of the 11th Intern. heat transfer conf., Kyongju, Korea, 23–28 Aug., 1998. N. Y.: Academ Press, 1998. V. 2. P. 273–278.
3. **Кабов О. А.** Формирование регулярных структур в стекающей пленке жидкости при локальном нагреве // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 4. С. 597–602.

4. **Миснар А.** Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций. М.: Мир, 1968.
5. **Kuznetsov V. V.** Dynamics of locally heated liquid films // Russ. J. Engng Thermophys. 2000. V. 10, N 2. P. 107–120.
6. **Na T. Y.** Computational methods in engineering boundary layer problems. N. Y.: Academ Press, 1979.

*Поступила в редакцию 29/XII 2001 г.,
в окончательном варианте — 2/IV 2002 г.*