УДК 517.948

О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом невязки

В.П. Танана, Е.Ю. Вишняков, А.И. Сидикова

Южно-уральский государственный университет, просп. им. В.И. Ленина, 76, Челябинск, 630090
E-mails: tvpa@susu.ac.ru (Танана В.П.), evgvish@yandex.ru (Вишняков Е.Ю.), 7413604@mail.ru (Сидикова А.И)

Танана В.П., Вишняков Е.Ю., Сидикова А.И. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом невязки // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 97–105.

В данной работе к интегральному уравнению Фредгольма первого рода применяется конечномерная аппроксимация, которая позволяет при использовании вариационного метода регуляризации А.Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации из принципа невязки свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Получена оценка точности приближенного решения, учитывающая погрешность конечномерной аппроксимации задачи. Использование данного подхода проиллюстрировано на примере решения обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности.

DOI: 10.15372/SJNM20160108

Ключевые слова: *регуляризация, метод невязки, модуль непрерывности, оценка погрешности, некорректная задача.*

Tanana V.P., Vishnyakov E.Y., Sidikova A.I. About an approximate solution to the Fredholm integral equation of the first kind by the residual method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 97–105.

The Tikhonov finite-dimensional approximation was applied to an integral equation of the first kind. This allowed us to use the variation regularization method of choosing the regularization parameter residuals from the principle of reducing the problem to a system of linear algebraic equations. The estimate of accuracy of the approximate solution with allowance for the error of the finite-dimensional problem approximation has been obtained. The use of this approach is illustrated on an example of solving an inverse boundary value problem for the heat conductivity equation.

Keywords: *regularization, method of residuals, module of continuity, evaluation of inaccuracy, ill-posed problem.*

Введение

Обратная граничная задача теплообмена сводится к интегральному уравнению первого рода, которое относится к числу некорректно поставленных задач [1]. Теория таких задач в настоящее время интенсивно развивается. Одним из эффективных методов решения некорректных задач является метод невязки [2]. Эффективность этого метода заключается в его эквивалентности методу регуляризации [3] с параметром, определенным по принципу невязки [2, 4, 5].

Так как при решении интегральных уравнений важную роль играет их дискретизация, то ей посвящено большое число работ [6–9] и др. Заметим, что во всех известных работах, посвященных данной проблематике, доказывается лишь сходимость дискретизованных решений [6–9]. Впервые оценка погрешности приближенного решения, учитывающая дискретизацию интегрального уравнения, получена в работе [10]. Настоящая статья посвящена развитию результатов работы [10] и приложении их к решению обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)\,ds = f(t), \quad c \le t \le d, \tag{1}$$

где $u(s) \in L_2[a,b]$, $f(t) \in L_2[c,d]$, ядро $P(s,t)$ оператора A замкнуто, $P(s,t)$ ограничено на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$, $\forall\, t \in [c,d]$ $P(s,t)$ кусочно-непрерывно на $[a,b]$, и при $l \ge 2$, $K'_t(s,t) \in C([a,b] \times [c,d])$:

$$K(s,t) = \int_s^b \frac{(\theta - s)^{l-1}}{(l-1)!} P(\theta,t)\,d\theta. \tag{2}$$

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M_r:

$$M_r = \left\{ u(s) \ : \ u^{[l]}(s) \in L_2[a,b],\ u(a) = u'(a) = \ldots = u^{[l-1]}(a) = 0, \ \int_a^b \left| u^{[l]}(s) \right|^2 ds \le r^2 \right\}.$$

Из замкнутости ядра $P(s,t)$ будет следовать единственность решения $u_0(s)$ уравнения (1).

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2[c,d]$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|^2_{L_2} \le \delta^2.$$

Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M_r определить приближенное решение $u_\delta(s)$ и оценить его уклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s \frac{(s-\theta)^{l-1}}{(l-1)!} v(\theta)\,d\theta; \quad Bv(s) \in L_2[a,b], \tag{3}$$

и оператор C:

$$Cv(s) = ABv(s); \quad v(s) \in L_2[a,b], \quad Cv(s) \in L_2[c,d]. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$Cv(s) = \int_a^s K(s,t)v(s)\,ds, \tag{5}$$

где $K(s,t)$ определено формулой (2).

Для замены оператора C конечномерным введем функцию

$$N(t) = \max_{a \le s \le b} |K'_s(s,t)|; \quad c \le t \le d, \tag{6}$$

и число N_1 формулой:

$$N_1 = \max\left\{ |K'_t(s,t)| \ : \ a \le s \le b,\ c \le t \le d \right\}.$$

Так как $P(s,t) \in C([a,b]\times[c,d])$, то из (5) и (6) следует, что $N(t) \in C[c,d]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками $s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $i = 0,1,\dots,n-1$, а также отрезок $[c,d]$ на m равных частей точками $t_j = c + \frac{j(d-c)}{m}$, $j = 0,1,\dots,m-1$. Теперь введем функции:

$$\overline{K}_i(t) = K(s_i,t), \tag{7}$$

$$\widehat{K}_n(s,t) = \overline{K}_i(t); \quad s_i \le s \le s_{i+1}, \quad t \in [c,d], \quad i = 0,1,\dots,n-1, \tag{8}$$

$$\widehat{K}_{nm}(s,t) = \overline{K}_i(t_j);\ s_i \le s < s_{i+1},\ t_j \le t < t_{j+1},\ i=0,1,\dots,n-1,\ j=0,1,\dots,m-1. \tag{9}$$

Используя формулы (7)–(9), определим операторы $\widehat{C}_n$ и $\widehat{C}_{nm}$:

$$\widehat{C}_n v(s) = \int_a^b \widehat{K}_n(s,t)v(s)\,ds; \quad t \in [c,d],$$
$$\widehat{C}_{nm} v(s) = \int_a^b \widehat{K}_{nm}(s,t)v(s)\,ds; \quad t \in [c,d],$$

и предположим, что эти операторы отображают пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$.

Перейдем к оценке величины $\|\widehat{C}_{nm} - C\|$.

Для этого используем неравенство

$$\|\widehat{C}_{nm} - C\| \le \|C - \widehat{C}_n\| + \|\widehat{C}_n - \widehat{C}_{nm}\|.$$

Так как

$$|\widehat{K}_{nm}(s,t) - \widehat{K}_n(s,t)| \le |\overline{K}_i(t) - \overline{K}_i(t_j)| \tag{10}$$

при $s_i \le s < s_{i+1}$ и $t_j \le t < t_{j+1}$, $i = 0,1,\dots,n-1$, $j = 0,1,\dots,m-1$,
а

$$|\overline{K}_i(t) - \overline{K}_i(t_j)| \le N_1 \frac{d-c}{m}, \tag{11}$$

то из (10) получим

$$\|\widehat{C}_{nm} - \widehat{C}_n\|^2 \le \sup_{\|v\|\le 1} \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b |\widehat{K}_{nm}(s,t) - \widehat{K}_n(s,t)| \cdot |v(s)|\,ds \right]^2 dt \right\}, \tag{12}$$

а из (10)–(12), что

$$\|\widehat{C}_{nm} - \widehat{C}_n\|^2 \le N_1^2 \left(\frac{d-c}{m}\right)^2 \int_c^d \left[\int_a^b |v(s)|\,ds \right]^2 dt.$$

Учитывая соотношения (12) и

$$\int_a^b |v(s)|ds \le \sqrt{b-a}\ \|v(s)\|_{L_2},$$

получим

$$\|\widehat{C}_{nm} - \widehat{C}_n\| \le \sqrt{(b-a)(d-c)}N_1 \frac{d-c}{m}. \tag{13}$$

Теперь перейдем к оценке слагаемого $\|C - \widehat{C}_n\|$.

Так как

$$Cv(s) - \widehat{C}v(s) = \int_a^b \big(K(s,t) - \widehat{K}_n(s,t)\big)v(s)\,ds,$$

а

$$\|\widehat{C}_n - C\|^2 = \sup\left\{\int_c^d \left[\int_a^b \left|\widehat{K}(s,t) - \widehat{K}_n(s,t)\right| \cdot |v(s)| ds\right]^2 dt \ : \ \|v\| \le 1\right\},$$

то, учитывая (6)–(8) и то, что

$$\int_a^b \left|\widehat{K}(s,t) - \widehat{K}_n(s,t)\right| \cdot |v(s)|\,ds \le \int_a^b \left|\widehat{K}(s,t) - \widehat{K}(s_i,t)\right| \cdot |v(s)|\,ds \le \frac{b-a}{n}\ N(t) \int_a^b |v(s)|\,ds,$$

получим

$$\|Cv(s) - \widehat{C}_n v(s)\|^2 \le \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \int_c^d \ N^2(t)\ \left[\int_a^b v(s)\,ds\right]^2 dt. \tag{14}$$

Из того, что $\|v(s)\| \le 1$, а $\int_a^b |v(s)|\,ds \le \sqrt{b-a}\ \|v(s)\|$, учитывая (14), получим

$$\|\widehat{C}_n - C\| \le \sqrt{b-a}\ \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n}. \tag{15}$$

Таким образом, из (13), (15) следует, что

$$\|C - \widehat{C}_{nm}\| \le \sqrt{(b-a)(d-c)} N_1 \frac{d-c}{m} + \sqrt{b-a}\ \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n}.$$

В дальнейшем через η_{nm} обозначим величину, удовлетворяющую соотношению

$$\eta_{nm} = \sqrt{(b-a)(d-c)} N_1 \frac{d-c}{m} + \sqrt{b-a}\ \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n}.$$

2. Метод невязки

Введем конечномерное подпространство X_n пространства $L_2[a,b]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[s_i, s_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, а также подпространство Y_m пространства $L_2[c,d]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Через $pr(\cdot\,; Y_m)$ обозначим оператор метрического проектирования пространства $L_2[c,d]$ на Y_m.

Для решения уравнения (1) воспользуемся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова [8]:

$$\inf\left\{\left\|\widehat{C}_{nm} v(s) - f_\delta^m(t)\right\|^2 + \alpha \int_a^b v^2(s)\,ds \ : \ v(s) \in X_n\right\}, \quad \alpha > 0, \tag{16}$$

где $f_\delta^m(t) = pr(f_\delta, Y_m)$.

Известно, что задача (16) имеет единственное решение $v_{\delta nm}^\alpha(s)$. Значение параметра регуляризации α в решении $v_{\delta nm}^\alpha(s)$ задачи (16) выберем из принципа невязки [2]:

$$\|\widehat{C}_{nm} v^{\alpha}_{\delta nm}(s) - f^m_\delta(t)\| = \delta + r\eta_{nm}, \tag{17}$$

где $r^2 \geq \int_a^b |u_0^{[l]}(s)|^2\, ds$.

Известно, что при условии

$$\|f^m_\delta(t)\| > r\eta_{nm} + \delta$$

существует единственное решение $\widehat{\alpha}(\delta, n, m)$ уравнения (17).

Если решение $v^{\widehat{\alpha}(\delta,n,m)}_{\delta nm}(s)$ задачи (16), (17) обозначим через $v_{\delta nm}(s)$, то приближенное решение $u_{\delta nm}(s)$ уравнения (1) будет иметь вид:

$$u_{\delta nm}(s) = Bv_{\delta nm}(s).$$

В пространствах X_n и Y_m введем ортонормированные базисы $\{\varphi_i(s)\}$ и $\{\psi_j(t)\}$ формулами:

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n}{b-a}}; & s_i \leq s < s_{i+1}, \\ 0; & s \notin [s_i, s_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

и

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{d-c}}; & t_j \leq t < t_{j+1}, \\ 0; & t \notin [t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \end{cases}$$

Используя эти базисы, определим изометричные операторы J_x и J_y, отображающие R^n на X_n и R^m на Y_m, соответственно формулами:

$$\begin{aligned} J_x[\overline{x}](s) &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_i(s), \quad \overline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ J_y[\overline{y}](t) &= \sum_{j=0}^{m-1} y_j \psi_j(t), \quad \overline{y} = (y_0, \ldots, y_{m-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

Используя операторы J_x и J_y, для замены переменных в задаче (16), сведем ее к следующей:

$$\inf\Big\{ \big\| J_y^{-1}\big[\widehat{C}_{nm} v(s)\big] - J_y^{-1}\big[f^m_\delta(t)\big]\big\|^2_{R^m} + \alpha \big\|J_x^{-1}[v(s)]\big\|^2_{R^n} \ : \ J^{-1}[v(s)] \in R^n \Big\}, \tag{19}$$

где J_y^{-1} и J_x^{-1} — операторы, обратные операторам J_y и J_x.

Задача (19) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} v_i + \alpha v_k = q_k; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{20}$$

где

$$b_{ik} = \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \overline{K}_i(t_j) \overline{K}_k(t_j), \quad q_k = \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \overline{K}_k(t_j) f_j, \quad f_j = \sqrt{\frac{m}{d-c}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t)\, dt.$$

Решение системы (20) обозначим через $\overline{v}^\alpha = (v_0^\alpha, v_1^\alpha, \ldots, v_{n-1}^\alpha)$.

Используя операторы J_x^{-1} и J_y^{-1}, уравнение (17) для выбора параметра регуляризации α в решении задачи (16) сведем к следующему:

$$\frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_i(t_j) \overline{v}_i^\alpha - f_j \right]^2 = (r\eta_{nm} + \delta)^2. \tag{21}$$

Решение уравнения (21) обозначим через $\alpha(\delta, n, m)$. Тогда решение задачи (20), (21) обозначим через $\overline{v}^{\alpha(\delta,n,m)}$.

Теорема 1. *Пусть оператор J_x определен формулой* (18), $v_{\delta nm}(s)$ *— решение задачи* (16), (17), *а* $\overline{v}^{\alpha(\delta,n,m)}$ *— решение системы* (20), (21). *Тогда эти решения связаны соотношением*

$$v_{\delta nm}(s) = J_x\big[\overline{v}^{\alpha(\delta,n,m)}\big](s).$$

Методика доказательства этой теоремы приведена в [10].

3. Оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta,\eta_{n,m}}(s)$ уравнения (1)

Для оценки погрешности введем функцию

$$\omega(\tau, r) = \sup_u\{\|u(s)\| \ : \ u(s) = Bv(s), \quad \|v(s)\| \le r, \quad \|Au(s)\| \le \tau\}, \quad \tau, r > 0.$$

Из теоремы, сформулированной в [11], следует

Теорема 2. *Пусть* $u_{\delta nm}(s)$ *— приближенное решение уравнения* (1), *а* $u_0(s)$ *— его точное решение. Тогда*

$$\|u_{\delta nm}(s) - u_0(s)\| \le 2\omega(r\eta_{nm} + \delta, r).$$

4. Решение обратной граничной задачи теплообмена

4.1. Постановка прямой задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{22}$$

$$u(x,0) = 0; \qquad 0 \le x \le 1, \tag{23}$$

$$u(0,t) = 0; \qquad 0 \le t \le T, \tag{24}$$

$$u(1,t) = h(t); \qquad 0 \le t \le T, \tag{25}$$

где

$$h(t) \in W_2^2[0,T], \qquad h(0) = h'(0) = 0 \tag{26}$$

и $\int_0^{t_0} |h''(t)|^2 dt \le r^2$, r — известное число.

При сделанном предположении (26) о функции $h(t)$ существует единственное решение $u(x,t)$ прямой задачи (22)–(25).

4.2. Постановка обратной задачи для уравнения (22)

Обратная задача для уравнения (22) заключается в том, что функция $h(t)$ не известна, а вместо нее дана функция $f(t)$, определяемая формулой:

$$f(t) = u(x_0, t); \quad 0 \le t \le T, \tag{27}$$

где $u(x,t)$ — решение задачи (22)–(25), а $x_0 \in (0,1)$.

Известно (см. [12]), что обратная граничная задача (22)–(24), (27) некорректно поставлена, поэтому предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует функция $h_0(t)$, удовлетворяющая условию (26). Для этой функции существует решение $u_0(x,t)$ задачи (22)–(25), которое удовлетворяет условию

$$f_0(t) = u_0(x_0, t), \quad 0 \le t \le T.$$

Предположим, что функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны $f_\delta(t) \in L_2[0,T]$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{L_2} \le \delta.$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_r, найти приближенное решение $h_\delta(t) \in L_2[0,T]$ обратной граничной задачи (22)–(24), (27) и оценить уклонение $\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2}$ приближенного решения $h_\delta(t)$ от точного $h_0(t)$.

Используя метод разделения переменных, выпишем решение прямой задачи (22)–(25):

$$u(x,t) = xh(t) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\pi i} \sin(\pi i x) \int_0^t e^{-(\pi i)^2 (t-\tau)} h'(\tau)\, d\tau. \tag{28}$$

Так как

$$\int_0^t e^{-(\pi i)^2(t-\tau)} h'(\tau)\, d\tau = \frac{h'(t)}{(\pi i)^2} - \int_0^t e^{-(\pi i)^2(t-\tau)} \frac{h''(\tau)}{(\pi i)^2}\, d\tau, \tag{29}$$

то, обозначив $h''(t)$ через $g(t)$, на основании (28) и (29) запишем интегральное уравнение, к которому сводится обратная граничная задача теплопроводности (22)–(24), (27):

$$\int_0^t \left[x_0(t-\tau) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \sin(\pi i x_0)}{(\pi i)^3} \Big(1 - e^{-(\pi i)^2(t-\tau)}\Big) \right] g(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{30}$$

Из (30) следует, что ядро $P(\tau,t)$ соответствующего интегрального уравнения и его производная $P'_t(\tau,t)$ принадлежат пространству $C([0,1] \times [0,T])$.

Уравнение (30) относится к типу уравнений (1), для которых разработана теория их решения и оценивания погрешности приближенного решения.

В частности, вариационную задачу (16) для интегрального уравнения (30) сведем к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{jk} g_j + \alpha g_k = \overline{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{31}$$

где $b_{jk} = \frac{T}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_j(t_i) \overline{K}_k(t_i)$, $\overline{f}_k = \frac{T}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{K}_k(t_j) f_j$, а $f_j = \sqrt{\frac{n}{T}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t)\, dt$,

$$\overline{K}_j(t_i) = \begin{cases} K(\tau_j, t_i) & \text{при } \ j \le i, \\ 0 & \text{при } \ j > i. \end{cases}$$

Система (31) имеет единственное решение $\{\overline{g}_j^{\alpha}\}$. Параметр $\widehat{\alpha}$ в этой системе выберем из уравнения

$$\frac{T}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\overline{K}_j(t_i)\overline{g}_j^{\alpha}-\overline{f}_i\right]^2=(r\eta_{nn}+\delta)^2. \tag{32}$$

Решение задачи (31), (32) обозначим через $\{\overline{g}_j^{\widehat{\alpha}}\}$. Тогда решение задачи (16), (17), на основании теоремы 1, можно представить в виде

$$\widehat{g}_{\delta,\eta_{nn}}(\tau)=J_x[(\overline{g}_j^{\widehat{\alpha}})].$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\left\|\widehat{h}_{\delta,\eta_{nn}}(\tau)-h_0(\tau)\right\|\le 2\omega(r\eta_{nn}+\delta,r), \tag{33}$$

где $\omega(\mu,r)=\{\|h\| \ : \ h=Bg,\ \|g\|\le r,\ \|Ag\|\le\mu\}$.

Из (33) и теоремы, доказанной в [12], следует, что если найдется t_0 такое, что $\forall\, t\ge t_0\ h_0(t)=0$, то при достаточно больших значениях $T>t_0$ имеет место оценка

$$\left\|\widehat{h}_{\delta,\eta_{n,n}}(\tau)-h_0(\tau)\right\|\le c_1\ln^{-6}(r\eta_{nn}+\delta),$$

где c_1 — некоторое положительное число.

5. Заключение

В данной работе обратная граничная задача теплопроводности сведена к интегральному уравнению первого рода. С помощью дискретизации последнее сведено к системе линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы уравнений использовано для получения приближенного решения интегрального уравнения. Получена оценка погрешности приближенного решения.

Литература

1. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
2. **Морозов В.А.** О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 1. — С. 170–175.
3. **Тихонов А.Н.** О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1.— С. 49–52.
4. **Морозов В.А.** О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1968. — Т. 8, № 2. — С. 295–309.
5. **Иванов В.К.** О приближенном решении операторного уравнения первого рода // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1089–1094.
6. **Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1974. — Т. 14, № 4. — С. 1022–1027.
7. **Васин В.В., Танана В.П.** Необходимые и достаточные условия сходимости проекционных методов для линейных неустойчивых задач // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 215, № 5. — С. 1032–1034.

8. **Танана В.П.** Проекционные методы и конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 6. — С. 1301–1307.
9. **Васин В.В.** Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1979. — Т. 19, № 1. — С. 11–21.
10. **Танана В.П., Сидикова А.И.** Об оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений // Журн. вычисл. методы и програм. — 2015. — Т. 16, № 1. — С. 1–9.
11. **Танана В.П.** Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 220, № 5. — С. 1035–1037.
12. **Танана В.П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. матем. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.

Поступила в редакцию 27 марта 2015 г.,
в окончательном варианте 19 мая 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Kabanikhin S.I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi. Uchebnik dlya studentov vysshikh uchebnykh zavedeniy. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izd-vo, 2009.
2. **Morozov V.A.** O regulyarizatsii nekorrektno postavlennykh zadach i vybore parametra regulyarizatsii // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1966. — T. 6, № 1. — C. 170–175.
3. **Tikhonov A.N.** O regulyarizatsii nekorrektno postavlennykh zadach // Dokl. AN SSSR. — 1963. — T. 153, № 1.— S. 49–52.
4. **Morozov V.A.** O printsipe nevyazki pri reshenii operatornykh uravneniy metodom regulyarizatsii // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1968. — T. 8, № 2. — S. 295–309.
5. **Ivanov V.K.** O priblizhennom reshenii operatornogo uravneniya pervogo roda // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1966. — T. 6, № 6. — S. 1089–1094.
6. **Goncharskiy A.V., Leonov A.S., YAgola A.G.** Konechnoraznostnaya approksimatsiya lineynykh nekorrektnykh zadach // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1974. — T. 14, № 4. — S. 1022–1027.
7. **Vasin V.V., Tanana V.P.** Neobkhodimye i dostatochnye usloviya skhodimosti proektsionnykh metodov dlya lineynykh neustoychivykh zadach // Dokl. AN SSSR. — 1974. — T. 215, № 5. — S. 1032–1034.
8. **Tanana V.P.** Proektsionnye metody i konechnoraznostnaya approksimatsiya lineynykh nekorrektnykh zadach // Sib. matem. zhurn. — 1975. — T. 16, № 6. — S. 1301–1307.
9. **Vasin V.V.** Diskretnaya skhodimost' i konechnomernaya approksimatsiya regulyarizuyushchikh algoritmov // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1979. — T. 19, № 1. — S. 11–21.
10. **Tanana V.P., Sidikova A.I.** Ob otsenke pogreshnosti regulyarizuyushchego algoritma, osnovannogo na obobshchennom printsipe nevyazki, pri reshenii integral'nykh uravneniy // ZHurn. vychisl. metody i program. — 2015. — T. 16, № 1. — S. 1–9.
11. **Tanana V.P.** Ob optimal'nosti metodov resheniya nelineynykh neustoychivykh zadach // Dokl. AN SSSR. — 1975. — T. 220, № 5. — S. 1035–1037.
12. **Tanana V.P.** Ob optimal'nosti po poryadku metoda proektsionnoy regulyarizatsii pri reshenii obratnykh zadach // Sib. zhurn. industr. matem. — 2004. — T. 7, № 2. — S. 117–132.