

УДК 539.3

ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН С ЗАДАНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. Г. Колпаков

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
630102 Новосибирск

Рассмотрена задача проектирования слоистых пластин с заданными жесткостными и прочностными характеристиками. Исходная задача проектирования сводится к задаче о выпуклых комбинациях, для решения которой применяется метод свертывания. Решаются следующие задачи проектирования: проектирование с учетом прочности, проектирование слоистой пластины нефиксированной толщины, проектирование с приближенно заданными характеристиками.

Ключевые слова: задача проектирования, слоистые пластины, жесткости, прочность.

Решению задач проектирования слоистых пластин посвящено большое количество работ. Хорошо изучена задача оптимального проектирования, формулируемая в следующем виде: получить проект пластины, минимизирующий какой-либо функционал (вес, прогиб и т. п.) [1, 2]. Менее изучена следующая задача проектирования [3–5]: указать способ создания пластины с заданными (необязательно оптимальными) характеристиками. В данной работе показано, что в рамках разработанных ранее алгоритмов при проектировании слоистых пластин с заданными жесткостными характеристиками можно учесть ограничения на ее прочность.

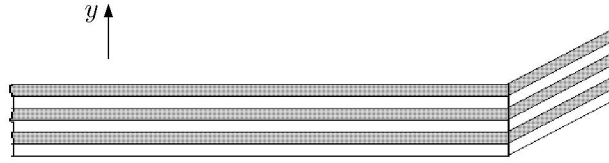
1. Постановка задачи. Рассмотрим слоистую пластину со слоями из однородных изотропных материалов, параллельными координатной плоскости (см. рисунок). Обозначим через y координату, отсчитываемую в направлении поперек пластины. В слоистой пластине модуль Юнга $E(y)$ и коэффициент Пуассона $\nu(y)$ являются функциями переменной y .

Требуется выбрать распределение материалов в слоях так, чтобы пластина имела заданные жесткости (жесткости в плоскости S_{ijk}^0 , несимметричные жесткости S_{ijkl}^1 и изгибные жесткости S_{ijkl}^2). Для этого необходимо решить систему интегральных уравнений первого рода

$$\begin{aligned}
 h^{\mu+1} \int_{-1/2}^{1/2} E(y) \frac{y^\mu}{1-\nu^2(y)} dy &= S_{iii}^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad i = 1, \\
 h^{\mu+1} \int_{-1/2}^{1/2} E(y) \frac{y^\mu}{1+\nu(y)} dy &= S_{1212}^\mu, \quad h^{\mu+1} \int_{-1/2}^{1/2} E(y)\nu(y) \frac{y^\mu}{1-\nu^2(y)} dy = S_{1122}^\mu
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

относительно функций $E(y)$ и $\nu(y)$ при заданных S_{iii}^μ , S_{1212}^μ , S_{1122}^μ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант № Е-00-40-120).



Интегралы в (1.1) есть жесткости пластины, выраженные через упругие постоянные образующих ее слоев [2, 4]. Уравнения (1.1) записаны для пластины единичной толщины (общий случай рассмотрен ниже).

Для простоты положим $\nu(y) = \text{const}$ (случай $\nu(y) \neq \text{const}$ рассмотрен ниже). В этом случае задача (1.1) является задачей относительно одной функции $E(y)$.

Для изготовления пластин используется конечное число материалов. В этом случае функция $E(y)$ принимает конечное число значений.

Разобьем пластину на m слоев равной толщины $\delta = 1/m$. Функция $E(y)$ будет постоянна на интервалах $[-1/2 + (i - 1)/m, -1/2 + i/m)$. Здесь и далее $i = 1, \dots, m$.

Введем следующие обозначения: $d_{1i} = \frac{1}{\delta} \int_{-1/2+(i-1)/m}^{1/2+i/m} y \, dy$, $d_{2i} = \frac{1}{\delta} \int_{-1/2+(i-1)/m}^{1/2+i/m} y^2 \, dy$.

Тогда (1.1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^m E_i \delta = S^0, \quad \sum_{i=1}^m E_i d_{1i} \delta = S^1, \quad \sum_{i=1}^m E_i d_{2i} \delta = S^2. \tag{1.2}$$

Величины S^0, S^1, S^2 выражаются через правые части уравнений (1.1) и ν . Деля равенства (1.2) на S^0 , получаем задачу

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \in Z_n, \quad \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}, \tag{1.3}$$

где $x_i = E_i \delta / S^0$, $\mathbf{v}_i = (d_{1i}, d_{2i})$, $i = 1, \dots, m$; $\mathbf{v} = (S^1/S^0, S^2/S^0)$. Искомыми величинами в задаче (1.3) являются E_i . По физическому смыслу $E_i \geq 0$.

2. Дискретная задача о выпуклых комбинациях. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $Z_n \subset [0, 1]$ — конечное множество (состоящее из n чисел), $\mathbf{v}_i, \mathbf{v} \in R^k$ — заданные векторы. Требуется указать числа x_i , являющиеся решением задачи

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i x_i = \mathbf{v}; \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1; \tag{2.2}$$

$$x_i \in Z_n, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.3}$$

Задача (2.1), (2.2) с условием

$$0 \leq x_i \leq 1 \tag{2.4}$$

есть задача о выпуклых комбинациях (ЗВК), рассмотренная в [5]. Задача (2.1)–(2.3) — дискретная ЗВК.

Общее решение задачи (2.1)–(2.3) (т. е. множество всех ее решений) может быть построено следующим образом. Заменим условие дискретности (2.3) условием (2.4). Общее решение ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) известно и имеет вид [5] (см. также [4, 6])

$$x_i = \sum_{\gamma=1}^M P_{i\gamma} \lambda_\gamma, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

где $M < \infty$; λ_γ ($\gamma = 1, \dots, M$) — любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{\gamma=1}^M \lambda_\gamma = 1, \quad 0 \leq \lambda_\gamma \leq 1. \quad (2.6)$$

Векторы $\mathbf{P}_\gamma = (P_{1\gamma}, \dots, P_{m\gamma})$, $\gamma = 1, \dots, M$ являются так называемыми симплицеальными решениями ЗВК (2.1), (2.2), (2.4), метод построения которых описан в [5]. При случайных возмущениях коэффициентов $\{\mathbf{v}_i\}$ и свободного члена \mathbf{v} в ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) с вероятностью 1 система векторов $\{\mathbf{P}_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ совпадает с множеством крайних точек многогранника $\Lambda(\mathbf{v})$, в силу чего она является минимальной системой точек, порождающих множество $\Lambda(\mathbf{v})$ [7]. Это свойство можно использовать при решении задачи на ЭВМ методом, изложенным в [5].

Множество $\Lambda(\mathbf{v})$ решений ЗВК (2.1), (2.2), (2.4) можно записать в виде $\Lambda(\mathbf{v}) = \text{conv}\{\mathbf{P}_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ (conv — выпуклая комбинация [8]). Множество $Z_n^m = \{\mathbf{x}: x_i \in Z_n\}$ есть дискретная сетка в R^m . Множество решений ЗВК (2.1)–(2.3) есть $\Lambda(\mathbf{v}) \cap Z_n^m$. Задача (2.1)–(2.3) будет решена, если указать способ, позволяющий из величин x_i , определенных формулами (2.5), (2.6), отобрать удовлетворяющие условию $x_i \in Z_n$.

Соотношения (2.5), (2.6) можно рассмотреть как ЗВК относительно величин λ_γ . Из выпуклости $\Lambda(\mathbf{v})$ следует, что если первые $i - 1$ уравнений в (2.5) удовлетворяются, то следующее i -е уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$x_i \in I_i = [\min_i, \max_i]. \quad (2.7)$$

Следует отметить, что интервал I_i зависит от выбора x_1, \dots, x_{i-1} .

Из (2.7) получаем необходимое и достаточное условие существования решения дискретной ЗВК $Z(i) = Z_n \cap I_i \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Поскольку интервалы I_i зависят от выбора x_1, \dots, x_{i-1} , возникает дерево T . Обозначим через $T(0)$ корень этого дерева. Ветвление дерева на уровне $T(i - 1)$ определяется точками $Z(i)$. Любая ветвь, идущая от корня $T(0)$ до уровня $T(m)$, дает решение дискретной ЗВК (2.1)–(2.3). Наоборот, любому решению дискретной ЗВК соответствует ветвь, идущая от корня $T(0)$ до уровня $T(m)$. Таким образом, построив дерево T , находим множество всех решений дискретной ЗВК [9].

Опишем шаг итерационного алгоритма построения дерева T . Пусть имеется фрагмент проекта x_1, \dots, x_{i-1} (т. е. произведено заполнение первых $i - 1$ слоев пластины). На i -м шаге все имеющиеся фрагменты x_1, \dots, x_{i-1} дополняются величинами x_i , удовлетворяющими (2.7) при соответствующих фрагментах x_1, \dots, x_{i-1} . В результате получается фрагмент x_1, \dots, x_{i-1}, x_i .

Основные процедуры численного алгоритма изложены в [9]. Как следует из [9], решение дискретной ЗВК сводится к решению ЗВК и задачи линейного программирования.

3. Приближенные решения ЗВК. Множество $\Lambda(\mathbf{v})$ (2.1), (2.2), (2.4) принадлежит гиперплоскости и имеет размерность меньше m [10]. Точки из Z_n^m , находящиеся вблизи множества $\Lambda(\mathbf{v})$, соответствуют приближенным проектам (проектам пластин, имеющих жесткости, близкие к заданным). Как показано в [10], для нахождения приближенных проектов следует возмутить множество $\{\mathbf{P}_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ векторами $\mathbf{w}_i = (\mathbf{v}_i, 1)$, ортогональными множеству $\Lambda(\mathbf{v})$, а затем решить ЗВК для этой системы векторов.

Будем использовать возмущение множества $\{\mathbf{P}_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ вида $\{\mathbf{P}_{M+1+j} = \mathbf{P}_{j+1} + \zeta \mathbf{w}_j, j = 0, 1, 2\}$, где ζ — характерная величина возмущения. Таким образом, к

системе векторов $\{\mathbf{P}_\gamma, \gamma = 1, \dots, M\}$ добавляется три вектора, имеющих составляющие, ортогональные $\Lambda(\mathbf{v})$.

4. Усредненный критерий прочности. Под усредненным критерием прочности композита понимается критерий, записанный в терминах характеристик пластины как двумерного объекта и позволяющий судить о прочности этой пластины как трехмерного (хотя и тонкого) неоднородного тела. Получение таких критериев возможно при наличии формул, связывающих локальные напряжения σ_{ij}^ε в пластине, рассматриваемой как трехмерное тело, с деформационными характеристиками этой пластины как двумерного объекта. Для слоистой пластины такие формулы получены, например, в [4, 6] и имеют вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = c_{ij\alpha\beta}(y)[\varepsilon_{\alpha\beta} + (y - S^1/S^0)\rho_{\alpha\beta}] \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta = 1, 2),$$

где $c_{ijkl}(y)$ — тензор упругих постоянных; $\varepsilon_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}$ — тензор деформаций в плоскости пластины и тензор кривизн соответственно.

Используя связь между $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ с усилиями в плоскости пластины $N_{\alpha\beta}$ и моментами $M_{\alpha\beta}$:

$$N_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta\gamma\delta}^0 \varepsilon_{\gamma\delta} + S_{\alpha\beta\gamma\delta}^1 \rho_{\gamma\delta}, \quad M_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta\gamma\delta}^1 \varepsilon_{\gamma\delta} + S_{\alpha\beta\gamma\delta}^2 \rho_{\gamma\delta},$$

σ_{ij}^ε можно выразить через $N_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим случай, когда коэффициенты Пуассона материалов слоев одинаковы. При этом тензор упругих постоянных может быть записан в виде

$$c_{ijkl}(y) = E(y)c_{ijkl}^0,$$

где c_{ijkl}^0 не зависит от y . Тогда, если i -й слой пластины $[-1/2 + (i - 1)/m, -1/2 + i/m]$ занят K -м материалом, то локальные напряжения в этом слое вычисляются по формуле

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = E_K c_{ijkl}^0 [\varepsilon_{\alpha\beta} + (y - S^1/S^0)\rho_{\alpha\beta}], \quad y \in [-1/2 + (i - 1)/m, -1/2 + i/m]. \quad (4.1)$$

Пусть критерий прочности K -го материала имеет вид

$$f_K(\sigma_{ij}^\varepsilon) < 1, \quad (4.2)$$

где f_K — неотрицательная липшицева функция.

Подставив (4.1) в (4.2), получаем усредненный критерий прочности i -го слоя при условии, что он занят K -м материалом:

$$F_K(\varepsilon_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}) \equiv f_K\{E_K c_{ijkl}^0 [\varepsilon_{\alpha\beta} + (y - S^1/S^0)\rho_{\alpha\beta}]\} < 1. \quad (4.3)$$

Разбиение пластины на слои проводилось с шагом $1/m$. Тогда с погрешностью M/m (M — максимум постоянных Липшица для функций $f_K, K = 1, \dots, n$) (4.3) можно заменить условием

$$F_K(\varepsilon_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}) \equiv f_K\{E_K c_{ijkl}^0 [\varepsilon_{\alpha\beta} + (-1/2 + i/m - S^1/S^0)\rho_{\alpha\beta}]\} < 1. \quad (4.4)$$

В созданной по проекту $\{E_1, \dots, E_m\}$ или $\{x_1, \dots, x_m\}$ пластине сохраняется целостность всех ее слоев, если условие (4.4) выполнено для всех $i = 1, \dots, m$. При нарушении условия (4.3) происходит разрушение соответствующего слоя. Условие (4.3) — точное условие прочности, а (4.4) — приближенное.

5. Задача проектирования с учетом прочности. Требуется указать все проекты пластин, имеющих заданные жесткости S^μ ($\mu = 0, 1, 2$) и выдерживающих без разрушения слоев деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}$ (или нагрузки $N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}$). Математическая постановка задачи следующая: требуется решить задачу (2.1)–(2.3) с условием (4.4). Для решения задачи можно применить алгоритм решения ЗВК из п. 2, используя условие (4.4) в качестве

фильтра на очередном шаге этого алгоритма. Для обоснования данного утверждения опишем шаг алгоритма решения ЗВК (см. п. 2). На i -м шаге имевшийся фрагмент проекта $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ дополняется величиной x_i , удовлетворяющей условию (2.7).

Изменим шаг алгоритма следующим образом. Пусть x_K удовлетворяет (2.7) (индекс i соответствует номеру слоя, K — номеру материала). Проверим, выполняется ли условие

$$F_{Ki}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}) \equiv f_K \{E_K c_{ijkl}^0 [\varepsilon_{\alpha\beta} + (-1/2 + i/m) \rho_{\alpha\beta}]\} < 1. \quad (5.1)$$

Если условие (5.1) выполнено, то $x_K = E_K / (mS^0)$ принимается в качестве возможного значения. Очевидно, это соответствует алгоритму из п. 2, в котором условие $x_i \in I_i$ заменено на условие

$$x_K \in I_i \cap \{x_R: x_R = E_K / (mS^0)\}, \quad (5.2)$$

где x_R удовлетворяет условию (5.1). Таким образом, на шаге алгоритма, описанного в п. 2, требуется выполнение дополнительного условия (5.1), которое будем называть фильтром по условию прочности.

Условие (5.2) имеет механический смысл. Если это условие выполнено, то материал с модулем Юнга E_K (x_K и E_K однозначно связаны) является кандидатом на заполнение им i -го слоя.

Предложенная модификация алгоритма позволяет получить все решения задачи проектирования (2.1)–(2.3) с условием (4.4). Это следует из того, что множество векторов (2.5) дает все решения ЗВК и любое решение задачи проектирования (2.1)–(2.3), (4.4) удовлетворяет (2.5) и (5.2).

В случае, когда заданы нагрузки $N_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$, деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$ можно выразить через $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$. В результате получим рассмотренную выше задачу.

6. Включение толщины пластины в число переменных проектирования.

Рассмотрим пластину переменной толщины h . Жесткости $S_{iii}^\mu(h)$, $\mu = 0, 1, 2$ пластины переменной толщины можно представить в виде $S_{iii}^\mu(h) = h^{\mu+1} S_{iii}^\mu$, где S_{iii}^μ ($\mu = 0, 1, 2$) — жесткости пластины единичной толщины (см. (1.1)). С учетом этого преобразуем уравнения (2.1)–(2.3) в дискретную ЗВК с правой частью, зависящей от h :

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i x_i = \left(\frac{v_1}{h}, \frac{v_2}{h^2} \right), \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (6.1)$$

где x_i удовлетворяют условию (2.3). В (6.1) векторы \mathbf{v}_i , \mathbf{v} те же, что в п. 1.

Для того чтобы спроектировать пластину толщиной h , обладающую жесткостями S_{1111}^μ ($\mu = 0, 1, 2$), нужно решить задачу (6.1) при данном значении h . Если толщина пластины не задана, то ее можно менять с шагом δh в некотором интервале $[h_{\min}, h_{\max}]$ и решать задачу (6.1) с правой частью $(v_1/h, v_2/h^2)$, где $h = h_{\min} + p\delta h$; $p = 1, \dots, \text{int}((h_{\max} - h_{\min})/(\delta h))$ (int — целая часть).

Интервал $[h_{\min}, h_{\max}]$ (если он не задан) можно оценить исходя из заданных жесткостей S_{1111}^μ ($\mu = 0, 1, 2$). При этом для толщины пластины получим следующие оценки:

$$a_0 < h < b_0, \quad a_1 < h < b_1, \quad a_2 < h < b_2,$$

где $a_0 = S^0/E_{\max}$; $b_0 = S^0(1 - \nu^2)/E_{\min}$; $a_1 = (8S^1/(E_{\max} - E_{\min}))^{1/2}$; $b_1 = \infty$; $a_2 = (12S^2/E_{\max})^{1/3}$; $b_2 = (12S^2/E_{\min})^{1/3}$; $S^\mu = (1 - \nu^2)S_{1111}^\mu$. Отсюда следует

$$h_{\min} = \max\{a_0, a_1, a_2\}, \quad h_{\max} = \min\{b_0, b_2\}. \quad (6.2)$$

7. Программа и численные примеры. На основе описанных выше алгоритмов составлена программа для ЭВМ, включающая следующие три основные подпрограммы: оценка толщины пластины, решение ЗВК, решение дискретной ЗВК.

7.1. Тестовая задача — задача перепроектирования. Задача перепроектирования (альтернативного проектирования) для слоистых пластин состоит в следующем. Пусть имеется некоторый проект пластины $\mathbf{E}^* = \{E_i, i = 1, \dots, m\}$. Вычислим для него значения S^μ ($\mu = 0, 1, 2$) по формуле (1.2). Затем решим задачу проектирования. В результате получим множество проектов пластины с теми же значениями S^μ ($\mu = 0, 1, 2$) — альтернативные проекты. Если алгоритм позволяет найти все проекты пластины с заданными S^μ ($\mu = 0, 1, 2$), то среди них должен быть первоначальный проект $\mathbf{E}^* = \{E_i, i = 1, \dots, m\}$.

Пример точного решения задачи перепроектирования. Приведем решение задачи перепроектирования для начального проекта $\mathbf{E}^* = \{7, 20, 7, 20, 7, 20, 7\}$ семислойной ($m = 7$) пластины. С точностью до 10^{10} значения $E_i^* = 20$ соответствуют стали (модуль Юнга стали равен $2 \cdot 10^{11}$ Па), $E_i^* = 7$ — алюминию (модуль Юнга алюминия равен $0,7 \cdot 10^{11}$ Па) [11]. Жесткости для этого проекта принимают следующие значения: $S^0 = 12,571$, $S^1 = 0$, $S^2 = 0,896$.

Рассмотрим случай, когда для создания пластины можно использовать шесть материалов с модулями Юнга, принадлежащими множеству $M_6 = \{20, 7, 13, 8, 11, 9\}$. По описанному выше алгоритму было найдено три проекта: $\mathbf{E}_1 = \{7, 20, 7, 20, 7, 20, 7\}$, $\mathbf{E}_2 = \{11, 11, 11, 20, 13, 13, 9\}$, $\mathbf{E}_3 = \{9, 13, 13, 20, 11, 11, 11\}$. Для всех этих проектов $S^0 = 12,571$, $S^1 = 0$, $S^2 = 0,896$.

Проект \mathbf{E}_1 является исходным, проекты \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 соответствуют еще двум точным решениям. Возможность существования точных решений задачи перепроектирования, отличных от исходного, следует из теоремы о виде общего решения системы линейных уравнений в целых числах [12].

Приближенное решение задачи проектирования (задача с возмущенной системой $\{\mathbf{P}_\gamma, \gamma = 1, \dots, M+3\}$). Выше найдены точные решения задачи перепроектирования. Если программа проектирования находит все решения как при точном, так и при приближенном решении задачи проектирования, то среди решений приближенной задачи должны содержаться все точные решения. При этом проекты, соответствующие меньшему значению параметра возмущения, должны находиться среди решений, соответствующих большему значению параметра возмущения.

Задача решена при значениях параметра возмущения $\zeta = 0,01$ и $\zeta = 0,02$. Численные решения показали, что при увеличении ζ появляются новые решения, а прежние сохраняются.

“Зеркально-симметричные” решения задачи проектирования. С точки зрения механики каждому проекту пластины с нулевой несимметричной жесткостью должен соответствовать проект с теми же жесткостями в плоскости пластины и жесткостями на изгиб и “зеркально-симметричной” укладкой слоев. При этом строение пластины может быть несимметричным относительно плоскости $y = 0$. Алгоритм позволяет обнаружить такие проекты. В приведенном выше решении “зеркально-симметричными” являются проекты \mathbf{E}_2 и \mathbf{E}_3 .

Проектирование с учетом прочности. Приведем пример проектирования пластины с учетом прочности. Критерий прочности (4.2) примем в виде

$$f_K(\sigma_{ij}^\varepsilon) = (\sigma_{ij}^\varepsilon - \sigma_{ij}^\varepsilon \delta_{ij} / 3)^2 / (\sigma_K^*)^2 < 1,$$

где σ_K^* — предел прочности K -го материала. Значения модулей Юнга и пределов прочности, используемых в расчетах, приведены в таблице.

Как отмечено в п. 5, условие прочности является фильтром для проектов пластины с заданными жесткостями. При увеличении параметра нагрузки множество проектов уменьшается: остаются проекты, способные выдерживать все возрастающие нагрузки (де-

i	$E_i \cdot 10^{10}$, Па	$\sigma_i^* \cdot 10^7$, Па
1	20	30
2	7	19
3	13	30
4	8	7
5	11	10
6	9	20

формации). В результате должен остаться проект наиболее прочной пластины, имеющей заданные жесткости.

Решим задачу перепроектирования, соответствующую проекту $\mathbf{E}^* = \{7, 20, 7, 20, 7, 20, 7\}$, для множества материалов $M_6 = \{20, 7, 13, 8, 11, 9\}$ при $\zeta = 0,02$. Рассмотрим цилиндрический изгиб пластины с кривизной ρ_{11} (ρ_{11} — параметр нагружения). При $\rho_{11} < 0,07$ получено пять проектов включая исходный. При $0,08 < \rho_{11} < 0,1$ получено два проекта: $\{7, 20, 7, 20, 7, 20, 7\}$ и $\{9, 13, 13, 20, 11, 11, 11\}$. При $0,1 < \rho_{11} < 0,12$ получен один проект $\{9, 13, 13, 20, 11, 11, 11\}$ (проект наиболее прочной пластины). При $\rho_{11} > 0,12$ решений нет.

Таким образом, исходный проект $\{7, 20, 7, 20, 7, 20, 7\}$ не является наиболее прочным. Если помимо жесткостей необходимо учесть прочностные свойства пластины, то следует использовать альтернативный проект $\{9, 13, 13, 20, 11, 11, 11\}$, обеспечивающий пластине те же жесткости, что исходный, но позволяющий выдерживать больший (на 20 %) цилиндрический изгиб.

Проектирование пластины переменной толщины. Выше приведены примеры решения задач проектирования слоистых пластин заданной (единичной) толщины. Задание фиксированной толщины пластины — достаточно сильное ограничение на проект. В п. 6 показано, каким образом толщина пластины может быть включена в число переменных проектирования. Приведем результаты расчетов для случая, когда толщина пластины является переменной проектирования. Рассмотрим задачу перепроектирования при условии, что в альтернативных проектах пластины могут иметь разные толщины. В качестве исходного возьмем проект $\mathbf{E}^* = \{7, 20, 7, 20, 7, 20, 7\}$, в котором толщина пластины $h = 1$. В этом случае $S^0 = 12,571$, $S^1 = 0$, $S^2 = 0,896$. Решим задачу перепроектирования, задав толщину $h = 0,9$. Для значений параметра возмущения $\zeta = 0 \div 0,04$ задача не имеет решений. Для $\zeta = 0,05$ задача становится разрешимой, при этом получено два проекта: $\mathbf{E}_1 = \{13, 13, 7, 7, 20, 7, 13\}$, $\mathbf{E}_2 = \{13, 12, 7, 7, 20, 8, 13\}$. Для первого проекта $S^0 = 11,429$, $S^1 = -0,02$, $S^2 = 1,014$. Значения S^0 и S^2 отличаются от исходных на 9 и 13 % соответственно. Для второго проекта $S^0 = 11,571$, $S^1 = -0,061$, $S^2 = 1,026$. Жесткости S^0 и S^2 отличаются от исходных на 8 и 15 % соответственно.

7.2. Задача проектирования. В задаче проектирования жесткости задаются произвольно. Поскольку решение задачи проектирования слоистой пластины эквивалентно решению системы интегральных уравнений первого рода, задача проектирования, как правило, не имеет точного решения [13]. Следовательно, задача проектирования может ставиться и решаться только приближенно (этим объясняется внимание автора к вопросам, изложенным в п. 3).

Зная жесткости, определим интервал $[h_{\min}, h_{\max}]$ возможных значений толщины пластины по формулам (6.2), затем решим задачу проектирования при $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$. Будем использовать процедуру возмущения, дающую как точные, так и приближенные решения.

Зададим следующие жесткости: $S_{1111}^0 = 10$, $S_{1111}^1 = 0$, $S_{1111}^2 = 1$. Следует отметить, что в приведенных выше примерах рассматривались величины S^0 , S^1 , S^2 , отличающиеся от S_{1111}^0 , S_{1111}^1 , S_{1111}^2 одним и тем же множителем.

Формулы (6.2) дают $h_{\min} = 0,45$, $h_{\max} = 1,3$. Решим задачу проектирования, меняя толщину пластины от h_{\min} до h_{\max} с шагом $\delta h = 0,1$. В приводимых расчетах параметр возмущения $\zeta = 0,05$.

Для $h = 0,5; 0,6; 0,7$ задача проектирования не имеет решения. В частности, не имеет решения ЗВК (6.1). Для $h = 0,8; 0,9; 1,0$ задача не имеет решения из-за отсутствия дискретных решений. Для $h = 1,1$ получено 70 решений. Для $h = 1,2$ получено 16 проектов. Для $h = 1,3$ решений нет.

Проекты с наименьшим отличием жесткостей от заданных получены при $h = 1,1$. Следовательно, проекты надо искать в окрестности $h = 1,1$. С использованием программы проектирования слоистых пластин такой поиск был произведен. Приведем четыре (из 30) проекта, полученных при $h = 1,03$: $\mathbf{E}_1 = \{13, 8, 11, 7, 7, 13, 11\}$, $\mathbf{E}_2 = \{13, 8, 9, 11, 7, 9, 13\}$, $\mathbf{E}_3 = \{13, 9, 7, 11, 9, 8, 13\}$, $\mathbf{E}_4 = \{13, 9, 8, 11, 8, 8, 13\}$. Для всех перечисленных проектов $S^1 = 10$, $S^2 = 0$, $S^3 = 0,944$. Отличие жесткостей от заданных значений имеет место только для S^3 и составляет 6 %, что приемлемо с инженерной точки зрения.

8. Случай $\nu \neq \text{const}$. Если $\nu \neq \text{const}$, то все уравнения в (1.1) не могут быть одновременно приведены к задаче вида (1.3). Рассмотрим следующие группы уравнений:

$$h^{\mu+1} \int_{-1/2}^{1/2} z(y)y^\mu dy = S_{ijkl}^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad (8.1)$$

где

$$\begin{aligned} z(y) = z_I(y) = E(y)/(1 - \nu^2(y)) & \quad \text{при } ijkl = iiii & \quad (\text{задача I}), \\ z(y) = z_{II}(y) = E(y)/(1 + \nu(y)) & \quad \text{при } ijkl = 1212, 2121 & \quad (\text{задача II}), \\ z(y) = z_{III}(y) = E(y)\nu(y)y^\mu/(1 - \nu^2(y)) & \quad \text{при } ijkl = 1122, 2211 & \quad (\text{задача III}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Для каждого материала известны E_i и ν_i , поэтому можно ввести множества Z_{nI} , Z_{nII} , Z_{nIII} такие, что $z_I(y) \in Z_{nI}$, $z_{II}(y) \in Z_{nII}$, $z_{III}(y) \in Z_{nIII}$. В результате (8.1) сводится к трем дискретным ЗВК, соответствующим задачам I, II, III. Общие решения этих ЗВК обозначим через Λ_I , Λ_{II} , Λ_{III} . В записи решения ЗВК модули упругости можно заменить соответствующими номерами материалов (см. таблицу). Записанные в таком виде общие решения ЗВК обозначим через M_I , M_{II} , M_{III} . Тогда множество проектов, удовлетворяющих всем трем ЗВК в (8.1), (8.2), есть

$$M_I \cap M_{II} \cap M_{III}. \quad (8.3)$$

Итак, для того чтобы решить задачу проектирования в случае $\nu \neq \text{const}$, достаточно решить три ЗВК (8.1), (8.2), записать их решения, используя номера материалов, и образовать множество (8.3).

Различие коэффициентов Пуассона материалов существенно, только если заданы жесткости разного типа (см. (8.2)), например при задании жесткости в плоскости пластины S_{iii}^0 (задача I) и изгибной жесткости S_{1212}^2 (задача III). Если заданы жесткости одного типа, то, вводя новую переменную в соответствии с (8.2), приходим к задаче вида (1.3). Например, если заданы жесткости S_{iii}^μ ($\mu = 0, 1, 2$) (задача I), то задача решается относительно функции $z_I(y) = E(y)/(1 - \nu^2(y))$. Для решения этой задачи множество $Z_n = \{E_i\}$ нужно заменить множеством $\{E_i/(1 - \nu_i^2)\}$ и решать задачу аналогично тому, как это сделано выше для случая $\nu = \text{const}$.

9. Проектирование пластины с заданными “физическими” жесткостями в произвольной системе координат. Для пластины жесткости зависят от выбора плоскости $y = 0$. В то же время механическое поведение пластины не должно зависеть от выбора системы координат. Избежать этого противоречия можно, перейдя к модели пластины, записанной в инвариантах [14], или задав “физические” жесткости.

Для произвольно выбранной системы координат K и системы координат $K(h)$, полученной из K сдвигом на h по оси y , имеем следующие соотношения для величин, определенных в (1.2) (значения S^μ ($\mu = 0, 1, 2$) совпадают со значениями жесткостей с точностью до постоянных множителей):

$$S^0(h) = S^0, \quad S^1(h) = S^1 + hS^0, \quad S^2(h) = S^2 + 2hS^1 + h^2S^0 \quad (9.1)$$

(S^μ , $S^\mu(h)$ вычисляются в системах координат K и $K(h)$ соответственно).

Под “физическими” жесткостями понимаются жесткости, вычисленные в системе координат, в которой выполняется равенство $S^1(h) = 0$.

Из равенства $S^1(h) = 0$ в (9.1) имеем $h = -S^1/S^0$ (уравнение “нейтральной” плоскости). При $h = -S^1/S^0$ из (9.1) следует

$$S^0(-S^1/S^0) = S^0, \quad S^1(-S^1/S^0) = 0, \quad S^2(-S^1/S^0) = S^2 - (S^1)^2/S^0. \quad (9.2)$$

В силу (9.2) условие

$$S^0 = A^0, \quad S^2 - (S^1)^2/S^0 = A^2 \quad (9.3)$$

означает, что физическая жесткость в плоскости пластины равна A_{ijkl}^0 , а физическая изгибная жесткость равна A_{ijkl}^2 . В (9.3) A^0 , A^2 — величины, отличающиеся от жесткостей A_{ijkl}^0 , A_{ijkl}^2 теми же множителями, которыми S^μ отличаются от S_{ijkl}^μ (эти множители зависят от типа жесткости и подробно описаны в п. 8 (см. формулы (8.2)).

Уравнения (9.3) справедливы в произвольной системе координат K . При этом значение S^1 не определено и должно рассматриваться как свободный параметр.

Оценим значения S^1 для системы координат K , в которой плоскость $y = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластины:

$$S^1 = \int_{-1/2}^{1/2} E(y)y dy \in I = \left[-\frac{E_{\max} - E_{\min}}{8}, \frac{E_{\max} - E_{\min}}{8} \right].$$

Таким образом, получим задачу

$$h \int_{-1/2}^{1/2} E(y) dy = A_{iiii}^0, \quad h^2 \int_{-1/2}^{1/2} E(y)y dy = t, \quad t \in I, \quad h^3 \int_{-1/2}^{1/2} E(y)y^2 dy = A^2 - \frac{t^2}{A^0}, \quad (9.4)$$

аналогичную задаче (1.1), но зависящую от параметра t . Параметр t — дополнительная переменная проектирования. Решение задачи (9.4) строится следующим образом. Интервал I дискретизируется с шагом Δ , в результате для каждого значения $t_k = -(E_{\max} - E_{\min})/8 + \Delta k$ получаем задачу, аналогичную рассмотренным выше.

В приведенных в п. 8 примерах полагалось $t = 0$, что обеспечивало совпадение “нейтральной” плоскости со срединной плоскостью пластины. Как следует из (9.4), решения задачи проектирования с близкими к нулю значениями S^1 дают проект с “физическими” жесткостями, близкими к заданным. Следует отметить, что равенство $S^1(h) = 0$ (условие, определяющее “нейтральную” поверхность) неустойчиво по отношению к возмущениям. Однако жесткостные характеристики устойчивы по отношению к возмущению проекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.** Оптимальное проектирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977.

2. **Gurdal Z., Haftka R. T., Hajela P.** Design and optimization of laminated composite materials. Chichester, N. Y. etc: John Wiley and Sons, 1999.
3. **Алехин В.В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988.
4. **Аннин Б. Д., Каламкарров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
5. **Kolpakov A. G., Kolpakova I. G.** Convex combinations problem and its application for problem of design of laminated composites with specified characteristics // Proc. of the 13th World congress on numer. and appl. math., Dublin, Ireland, 22–26 July, 1991. Dublin: Trinity College, 1991. V. 4. P. 136–142.
6. **Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G.** Analysis, design and optimization of composite structures. Chichester, N.Y. etc: John Wiley and Sons, 1997.
7. **Колпаков А. Г.** К решению задачи о выпуклых комбинациях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 8. С. 1323–1330.
8. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
9. **Колпаков А. Г.** Дискретная задача о выпуклых комбинациях и ее приложения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 2. С. 328–331.
10. **Колпаков А. Г.** Задача проектирования слоистых пластин с заданными жесткостями // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 3. С. 509–513.
11. **Расчетно-теоретический** справочник проектировщика. М.: Госстройиздат, 1960.
12. **Мину М.** Математическое программирование. М.: Наука, 1990.
13. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
14. **Kolpakov A. G.** Variational principles for stiffnesses of a non-homogeneous beam // J. Mech. Phys. Solids. 1998. V. 46, N 6. P. 1039–1053.

*Поступила в редакцию 21/VIII 2000 г.,
в окончательном варианте — 9/X 2002 г.*
