

Быстрый и точный алгоритм численного моделирования переноса излучения в мутной среде на основе метода синтетических итераций

В.П. Будак, В.С. Желтов, А.В. Лубенченко, К.С. Фрейдлин, О.В. Шагалов*

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

Поступила в редакцию 10.05.2016 г.

Показано, что после выделения анизотропной части решения (АЧР) в малоугловой модификации метода сферических гармоник (МСГ) оставшаяся регулярная часть решения (РЧР) является гладкой квази-изотропной функцией с отдельными пиками на угловом распределении. Гладкую часть РЧР без пиков можно определять в двухпотоковом или диффузионном приближении. Первая итерация от полученного углового распределения яркости существенно уточняет решение и позволяет восстановить указанные угловые пики. Квазидиффузионное приближение – выделение АЧР на основе МСГ, определение РЧР в диффузионном приближении и уточнение решения на основе первой итерации – не зависит от симметрии задачи, а потому обобщается на случай произвольной геометрии среды.

Ключевые слова: дискретное уравнение переноса излучения, квазидиффузионное приближение, синтетические итерации; discrete radiative transfer equation, quasi-diffusion approximation, synthetic iteration.

Введение

Существенный прогресс, достигнутый в последние десятилетия в разработке приборов приема излучения в устройствах оптического дистанционного зондирования атмосферы Земли и земной поверхности, где прежде всего следует выделить гиперспектральные приборы и технологии, позволил создать системы определения малых газовых компонент, доля которых в атмосфере составляет менее 1%. Это накладывает жесткие требования к численному моделированию распространения оптических сигналов в атмосфере: погрешность не более 1% при времени счета не более 1 с для одной длины волны [1] на стандартном персональном компьютере. Главная трудность в создании такого метода решения уравнения переноса излучения (УПИ) в противоречивости этих требований: во всех традиционных методах решения скорость расчета и точность обратно пропорциональны друг другу – повышение точности расчета происходит при соответствующем увеличении времени счета. Для выполнения требования точности решения не хуже 1% необходимо включение в модель переноса всех влияющих факторов: поляризации излучения, вертикальной и горизонтальной неоднородности атмосферы, профиля земной поверхности. Несомненно, такое решение возможно получить только численными методами.

* Владимир Павлович Будак (BudakVP@mpei.ru); Виктор Сергеевич Желтов (ZheltoV@list.ru); Александр Владимирович Лубенченко (lem_a@mail.ru); Константин Сергеевич Фрейдлин (freidlinks@ya.ru); Олег Владимирович Шагалов (ShagalovOV@gmail.com).

1. Дискретное УПИ

Проанализируем алгоритм численного решения краевой задачи УПИ для случая освещения слоя мутной среды плоским мононаправленным (ПМ) источником в направлении $\hat{\mathbf{l}}_0 = \{\sqrt{1-\mu_0^2}, 0, \mu_0\}$, $\mu_0 = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{l}}_0) \equiv \cos \vartheta_0$:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L(\tau, \hat{\mathbf{l}})}{\partial \tau} = -L(\tau, \hat{\mathbf{l}}) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') L(\tau, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}', \\ L(\tau, \hat{\mathbf{l}})|_{\tau=0, \mu \geq 0} = \delta(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}_0), L(\tau, \hat{\mathbf{l}})|_{\tau=\tau_0, \mu \leq 0} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

где $L(\tau, \mu, \varphi)$ – яркость светового поля на оптической глубине $\tau = \int_0^z \epsilon(\zeta) d\zeta$ в направлении визирования

$\hat{\mathbf{l}} = \{\sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi, \mu\}$, $\mu = (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{l}}) \equiv \cos \vartheta$;

$x(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}')$ – индикатриса рассеяния; Λ – альbedo однократного рассеяния. Краевая задача (1) определена в Декартовой системе координат $OXYZ$, в которой ось OZ направлена вниз перпендикулярно границе слоя; $\hat{\mathbf{z}}$ – единичный вектор вдоль OZ . Верхняя граница слоя $z = 0$. Единичные вектора будем отмечать знаком $\hat{\cdot}$, вектор-столбцы правой стрелкой, вектор-строки левой стрелкой, а матрицы двойной стрелкой над соответствующими символами.

Краевая задача для ПМ-источника занимает особое место в теории переноса:

1) простота плоской симметрии определяет, что в ее решении содержатся, как в зерне, свойства решения УПИ при произвольной геометрии;

2) здесь имеются строгие аналитические решения, что позволяет использовать эту задачу для оценки точности численных решений для среды с произвольной трехмерной геометрией;

3) эта задача имеет большое практическое значение, поскольку соответствует случаю оптического дистанционного зондирования в однородной атмосфере.

Краевая задача (1) для ПМ-источника записана для случая отсутствия отражения от нижней границы (черной границы). Однако эта краевая задача является фундаментальной для проблемы переноса излучения через плоский слой мутной среды, и через нее методом функций Грина выражается решение и при наличии отражения на нижней границе [2]. Мы сосредоточим внимание на задаче ПМ-источника, все подробности перехода к границам с отражением приведены в [2].

Для численного решения УПИ его необходимо дискретизировать, для чего необходимо заменить интеграл рассеяния конечной суммой [3]. Это невозможно при наличии угловых особенностей в угловом распределении яркости, поскольку особенность нельзя представить конечным рядом ни в одном базисе. При наличии сильной анизотропии в угловом распределении яркости замена интеграла конечной суммой может привести к значительной погрешности [4].

Физической моделью теории переноса является лучевое приближение в описании излучений [5, 6]. В лучевом приближении любой разрыв в граничных условиях приводит к появлению особенностей в пространственно-угловом распределении яркости, которые распространяются вглубь среды [2, 7, 8]. Яркий повседневный пример подобного явления – резкая граница света и тени, возникающая за непрозрачной перегородкой (разрыв в граничных условиях). Наличие анизотропного рассеяния в среде приводит к появлению анизотропии в угловом распределении яркости рассеянного излучения.

Поэтому для аккуратной дискретизации необходимо выделить из решения пусть приближенно, но обязательно аналитически все особенности и сильно анизотропную часть – $L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ (анизотропная часть решения), т.е. представить решение в виде [2, 7, 8]:

$$L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \quad (2)$$

$L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ – регулярная часть решения (РЧР), являющаяся гладкой функцией, представление которой возможно по конечному базису элементов.

Для $L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ с учетом (2) краевая задача (1) преобразуется в выражение [2, 7, 8]:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} + L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}' + \Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}); \\ L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=0, \mu>0} = 0; L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = -L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \end{cases} \quad (3)$$

где функция источников определяется анизотропной частью решения

$$\Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = -\mu \frac{dL_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{d\tau} - L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}'. \quad (4)$$

Изменение второго граничного условия связано с тем, что неочевидно, что приближенное решение $L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ будет удовлетворять точным граничным условиям.

Выражение (4) нельзя использовать для прямых расчетов, поскольку $L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ содержит угловую δ -особенность. Она связана с прямым нерассеянным излучением. Выделим ее:

$$L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = e^{-\tau/\mu_0} \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) + \tilde{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \quad (5)$$

что приведет выражение (4) к виду

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = & -\mu \frac{d\tilde{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{d\tau} - \tilde{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + \\ & + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \tilde{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}' + \frac{\Lambda}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} x(\hat{\mathbf{I}}_0, \hat{\mathbf{I}}). \end{aligned} \quad (6)$$

Функция $\tilde{L}_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ анизотропная, но гладкая, поэтому расчет выражения (6) не представляет проблем [3].

Поскольку $L_r(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ – гладкая функция, то ее представление возможно по конечному базису. Например, если для дискретизации УПИ используется метод дискретных ординат (МДО), то такое представление будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{L}_r(\tau, \mu_i^\pm, \varphi) = & \sum_{m=0}^M (2 - \delta_{0,m}) \cos(m\varphi) \tilde{C}^m(\tau, \mu_i^\pm), \\ \tilde{C}_\pm(\tau) \equiv & \tilde{C}^m(\tau, \mu_i^\pm), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{C}(\tau) \equiv [\tilde{C}_-(\tau), \tilde{C}_+(\tau)]^T$ – вектор-столбец дискретных значений по азимуту коэффициентов разложения яркости в ряд Фурье по азимуту, $\mu_j^\pm = 0,5(\zeta_j \pm 1)$, ζ_j – нули гауссовой квадратуры порядка $N/2$ для дискретизации интеграла рассеяния по зенитному углу. Из-за очевидности верхний индекс m далее везде опускаем.

Это позволяет заменить интеграл рассеяния конечной суммой, а краевая задача (3) преобразуется в краевую задачу для матричного неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами [2, 7, 8]:

$$\frac{d\tilde{C}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{B}\tilde{C}(\tau) + \tilde{M}^{-1}\Delta(\tau), \quad \tilde{B} \equiv \tilde{M}^{-1}(\tilde{I} - \tilde{A}\tilde{W}), \quad (8)$$

где

$$\tilde{W} \equiv \frac{\Lambda}{4} \begin{bmatrix} w_i & 0 \\ 0 & w_i \end{bmatrix}; \quad \tilde{M} \equiv \begin{bmatrix} \mu_i^- & 0 \\ 0 & \mu_i^+ \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A} \equiv \sum_{k=0}^K (2k+1) P_k^m(\mu_i^\pm) x_k P_k^m(\mu_j^\pm);$$

$$x(\gamma) = \sum_{k=0}^K (2k+1) x_k P_k(\cos \gamma);$$

w_j – веса гауссовой квадратуры порядка $N/2$ по зенитному углу; $P_k^m(\mu)$ – присоединенные полиномы Лежандра, причем $P_k^0(\mu) \equiv P_k(\mu)$ – полиномы Лежандра.

Решение матричного уравнения (8) представимо в виде [2, 7, 8] суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$-\bar{C}(0) + \bar{P}(0, \tau_0) \bar{C}(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \bar{P}(0, \tau) \bar{M}^{-1} \bar{\Delta}(\tau, \mu_0) d\tau, \quad (9)$$

где функция

$$\bar{P}(t, \tau) \equiv e^{\bar{B}(\tau-t)} \quad (10)$$

есть решение однородного уравнения, описывающее связь распределений яркости в двух точках t и τ среды без внутренних источников, – пропагатор [2].

Проблемы расчетов по полученному решению (9) связаны с наличием в пропагаторе (10) как отрицательных, так и положительных экспонент, что физически соответствует потокам, распространяющимся сверху вниз и снизу вверх, приводит к быстрому ухудшению обусловленности матрицы и делает невозможным расчеты для световых полей для оптических толщ $\tau > 1$. Для устранения этого эффекта используется масштабное преобразование [2, 7, 8]:

$$-\bar{S} \bar{U}^{-1} \bar{C}(0) + \bar{H} \bar{U}^{-1} \bar{C}(\tau_0) = \bar{J}, \quad (11)$$

$$\bar{J} \equiv \bar{S} \int_0^{\tau_0} e^{\bar{F}t} \bar{U}^{-1} \bar{M}^{-1} \bar{\Delta}(t) dt,$$

где матричная экспонента представляется в виде [2, 7, 8]:

$$e^{\bar{B}\tau_0} = \bar{U} e^{\bar{F}\tau_0} \bar{U}^{-1}. \quad (12)$$

Здесь \bar{U} – матрица собственных векторов матрицы \bar{B} ; $\bar{F} = \text{diag}(\bar{F}_-, \bar{F}_+)$ – диагональная матрица собственных значений, причем $\bar{F}_- = -\bar{F}_+$; $\bar{U}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} \end{bmatrix}$; $\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{I} & 0 \\ 0 & e^{-\bar{F}_+\tau_0} \end{bmatrix}$; $\bar{H} = \begin{bmatrix} e^{\bar{F}_-\tau_0} & 0 \\ 0 & \bar{I} \end{bmatrix}$.

Вектор-столбцы $\bar{C}_+(0)$, $\bar{C}_-(\tau_0)$ в выражении (11) описывают потоки излучения, падающего на слои, и определяются граничными условиями. Векторы $\bar{C}_-(0)$, $\bar{C}_+(\tau_0)$ соответствуют потокам отраженного и прошедшего слой излучения. Разрешим уравнение (11) относительно потоков, выходящих из слоя, и получим решение в форме рассеивателей [3, 9]:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_-(0) \\ \bar{C}_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_- \\ \bar{F}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{T} \\ \bar{T} & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_+(0) \\ \bar{C}_-(\tau_0) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где $\begin{bmatrix} \bar{F}_- \\ \bar{F}_+ \end{bmatrix} = \bar{h} \bar{J}$; $\begin{bmatrix} \bar{R} & \bar{T} \\ \bar{T} & \bar{R} \end{bmatrix} = \bar{h} \begin{bmatrix} \bar{u}_{12} & -e^{\bar{F}_-\tau_0} \bar{u}_{11} \\ e^{-\bar{F}_+\tau_0} \bar{u}_{22} & -\bar{u}_{21} \end{bmatrix}$;

$$\bar{h} \equiv \begin{bmatrix} -\bar{u}_{11} & e^{\bar{F}_-\tau_0} \bar{u}_{12} \\ -e^{-\bar{F}_+\tau_0} \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Выражение в форме рассеивателей (13) дает связь выходящих из слоя потоков с падающими и представляет собой обобщение коэффициента яркости. При этом столбец \bar{F} описывает собственное излучение слоя, а матрицы \bar{R} и \bar{T} представляют дискретные значения коэффициентов яркости по отражению и пропусканию. Поскольку решение (13) справедливо только для гладкой части, то собственное излучение слоя \bar{F} физически связано не с излучением элементарных объемов среды, а с невязкой приближенного решения $L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ в УПИ.

Из проведенного анализа видно, что дискретизация УПИ любым другим методом обязательно приводит к одному и тому же дискретному УПИ для слоя (8), как, например, это показано для метода сферических гармоник в [7]. Это уравнение имеет одно единственное решение либо через пропагатор (11), либо в эквивалентной форме рассеивателей (13). Это наглядно показало численное сравнение различных алгоритмов [10, 11]: все решения совпали с машинной точностью, что говорит о том, что речь шла о сравнении одного и того же решения, но различными алгоритмами. Отличия составлял только метод выделения анизотропного решения.

2. Анизотропная часть решения

Вопрос определения приближенного решения не столь очевиден – необходимо определить критерий угловой анизотропии функции. В угловом пространстве это сделать затруднительно – большая производная по углу? Насколько большая? Однако существенно проще такое определение провести для углового спектра, обладающего известным свойством: чем более анизотропна угловая зависимость функции, тем более пологим является спектр. Следовательно, нам нужно понимать под $L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ часть решения, соответствующую наиболее медленно изменяющейся части углового спектра.

Под спектром углового распределения яркости будем понимать коэффициенты разложения тела яркости по сферическим функциям. При этом поскольку анизотропная часть решения соответствует направлениям визирования, близким к направлению падающего излучения, базисом разложения следует выбрать направление падения внешнего излучения ПМ-источника:

$$L_a(\tau, \mu, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k^m(\tau) Q_k^m(\nu) e^{im\phi}, \quad (14)$$

где $\nu = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0)$, $\mu = \nu \mu_0 + \sqrt{1-\nu^2} \sqrt{1-\mu_0^2} \cos\phi$; $Q_k^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_k^m(\mu)$ – перенормированные полиномы Лежандра.

Поскольку угловой спектр анизотропной части решения $C_k^m(\tau)$ имеет медленную зависимость от индекса k , то это позволяет сделать следующие допущения [12]:

1) введем непрерывную зависимость коэффициентов ряда (14) от номеров гармоник $C_k^m(\tau) = C^m(\tau, k)$, которая вследствие угловой анизотропии является медленной монотонной функцией, что возможно представление

$$C^m(\tau, k \pm 1) \approx C^m(\tau, k) \pm \frac{\partial C^m(\tau, k)}{\partial k}; \quad (15)$$

2) основной вклад в ряд (14) дают члены с номерами $k \gg 1$, и степень анизотропии существенно больше ее азимутальной асимметрии $k \gg m$.

В [12] показано, что получаемая из УПИ (1) бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений по методу сферических гармоник при использовании указанных допущений переходит в одно уравнение в частных производных

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial \tau} C_k^m(\tau) = -(1 - \Lambda x_k) C_k^m(\tau), \quad (16)$$

решение которого имеет простое аналитическое выражение

$$C_k^m(\tau) = \exp(-(1 - \Lambda x_k)\tau/\mu_0) \equiv Z_k(\tau) \quad (17)$$

или для анизотропной части углового распределения яркости

$$L_a(\tau, \mu, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} Z_k(\tau) Q_k^m(\nu) e^{im\phi}. \quad (18)$$

Данный подход получил название малоугловая модификация метода сферических гармоник (МСГ) и был предложен в [13]. Подставим полученное выражение для анизотропной части (18) в (6) и получим выражения для функции источников с учетом соотношения [3]:

$$\Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^k \frac{2k+1}{4\pi} (\Lambda x_k e^{-\tau/\mu_0} - d_k \tilde{Z}_k(\tau)) \times \\ \times Q_k^m(\mu_0) Q_k^m(\mu) e^{im\phi}, \quad (19)$$

где $\tilde{Z}_k(\tau) = e^{-d_k \tau/\mu_0} - e^{-\tau/\mu_0}$; $d_k = 1 - \Lambda x_k$.

После дискретизации функции источников (19) в соответствии с выбранной схемой МДО получим

$$\bar{\Delta}(\tau) = \left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{\bar{\mathbf{M}}}{\mu_0} \right) \times \\ \times \sum_{k=m}^K \frac{2k+1}{4\pi} (\Lambda x_k e^{-\tau/\mu_0} - d_k \tilde{Z}_k(\tau)) Q_k^m(\mu_0) \bar{Q}_k^m. \quad (20)$$

В соответствии с (11) и (20) функция источников в уравнении (11) примет вид [3]:

$$\bar{\mathbf{J}} = \sum_{k=m}^K \frac{2k+1}{4\pi} Q_k^m(\mu_0) ((1 - \Lambda x_k) \bar{\mathbf{J}}^k - \bar{\mathbf{J}}^0) \times \\ \times \bar{\mathbf{U}}^{-1} (\bar{\mathbf{I}} - \mu_0 \bar{\mathbf{M}}^{-1}) \bar{\mathbf{Q}}_k^m, \quad (21)$$

где

742

$$\bar{\mathbf{J}}^k \equiv \text{diag} \left(\frac{1}{\gamma_i \mu_0 - d_k} \right) (\bar{\mathbf{H}} e^{-d_k \tau_0/\mu_0} - \bar{\mathbf{S}}), \\ \bar{\mathbf{J}}^0 \equiv \text{diag} \left(\frac{1}{\gamma_i \mu_0 - 1} \right) (\bar{\mathbf{H}} e^{-\tau_0/\mu_0} - \bar{\mathbf{S}}),$$

γ_i — элементы матрицы $\bar{\Gamma}$ собственных значений матрицы $\bar{\mathbf{B}}$.

Выражения (8), (13) и (21) полностью определяют решения, причем (8) и (13) справедливы для любого способа выделения анизотропной части решения, а (21) определяет вид функции источников при выделении анизотропной части на основе МСГ. Описанный алгоритм реализован в виде программы MDOM. Сравнение алгоритмов с различными способами выделения анизотропной части решения в [10, 11] показал, что способ выделения анизотропной части определяет время счета до достижения фиксированной точности.

Заметим, что решение векторного УПИ приводит к совершенно эквивалентному матричному уравнению, только все матрицы и столбцы имеют в 4 раза больший размер [14]. В этом смысле после перехода к дискретному УПИ скалярный и векторный варианты аналитически неразличимы. Для простоты везде будем использовать скалярный вариант.

3. Регулярная часть решения

Сложность расчетов по полученному матричному уравнению (13) определяется размерами входящих в него матриц, которые зависят от трех целых констант — N , M , K : N — количество дискретных ординат; M — количество азимутальных гармоник; K — количество членов разложения индикатрисы по полиномам Лежандра.

В общем случае произвольного угла падения все эти три величины приблизительно равны: $M \approx N \approx K$. Однако при удачном выборе анизотропной части можно добиться, что угловая зависимость РЧР будет близка изотропной. В этом случае

$$K \gg N \gg M,$$

что существенно ускоряет решение.

Сравнение показало [10, 11, 15], что выделение особенностей на основе МСГ наилучшим образом описывает анизотропную часть решения и ускоряет алгоритм вычисления более чем на два порядка. На рис. 1 показано сравнение расчетов углового распределения яркости излучения, отраженного слоем, для различных наборов параметров N и M . На всех рисунках угол визирования отсчитывается от оси OZ . Расчеты проводились на компьютере Intel(R) Core (TM) i7-4770R CPU @ 3.50 GHz. Нетрудно видеть, что расчет практически полного распределения по углу существенно быстрее, чем расчет отдельных мелких острых пиков. Разница во времени расчета Δt более чем в 150 раз. Почему так?

Угловое распределение РЧР действительно близко к изотропному, но с некоторой мелкой рябью. Резонный вопрос: сколько дискретных ординат N необходимо для представления этой мелкой ряби?

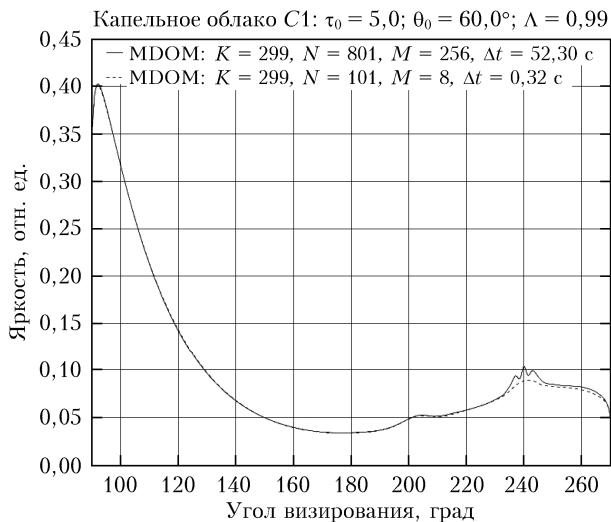


Рис. 1. Сравнение угловых распределений яркости отраженного излучения. Направление в надир 180°

Поскольку РЧР является гладкой функцией, то ее разложение в ряд по полиномам Лежандра имеет конечное число членов N :

$$L_m(\tau, \mu) = \sum_{k=1}^N \frac{2k+1}{2} L_k^m P_k(\mu). \quad (22)$$

Все полиномы Лежандра порядка менее N точно выражаются через полином порядка $N+1$:

$$P_k(\mu) = \sum_{i=1}^{N+1} P_k(\mu_i) \frac{P_{N+1}(\mu)}{(\mu - \mu_i) P'_{N+1}(\mu_i)}, \quad (23)$$

где μ_i — корни полинома $P_{N+1}(\mu)$.

Соответственно, это приводит к выражению

$$\begin{aligned} L_m(\tau, \mu) &= \sum_{i=1}^{N+1} \frac{P_{N+1}(\mu)}{(\mu - \mu_i) P'_{N+1}(\mu_i)} \sum_{k=0}^N \frac{2k+1}{2} L_k^m P_k(\mu_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} L_m(\tau, \mu_i) \frac{P_{N+1}(\mu)}{(\mu - \mu_i) P'_{N+1}(\mu_i)}, \end{aligned} \quad (24)$$

что соответствует интерполяционной формуле Лагранжа для функции $L(\tau, \mu)$.

Эти соотношения являются аналогом теоремы Котельникова о выборках для углового спектра углового распределения по полиномам Лежандра. Следовательно:

- 1) MDOM обеспечивает сходимость в среднем;
- 2) все методы выделения анизотропной части эквивалентны друг другу в равномерной метрике;
- 3) для достижения хорошей сходимости в равномерной метрике интервал дискретизации должен соответствовать угловому размеру самой мелкой детали, которая должна быть воспроизведена на распределении яркости.

Для решения обратных задач нужен алгоритм решения УПИ с точностью по равномерной метрике не хуже 1%, а по времени счета не более 1 с для одной длины волны. Как же совместить все эти про-

тиворечивые требования? Возможным вариантом решения здесь является алгоритм синтетических итераций [3, 16].

4. Метод синтетических итераций

Метод синтетических итераций (СИ) был предложен в ядерной физике [17]. При этом итерация распадается на два этапа. На первом этапе ищется приближенное решение, хорошо сходящееся в средней метрике по энергетике, а на втором выполняется обычная итерация, основанная на интегральном УПИ, являющемся формальным решением краевой задачи (1), что существенно повышает сходимость в равномерной метрике по углу. Поскольку разработанный метод решения MDOM имеет хорошую сходимость в средней метрике, то следует рассчитывать на его существенное повышение сходимости после итерации.

Численное сравнение яркости отраженного излучения в первой итерации с MDOM представлено на рис. 2 [3, 16], где Δt — время вычислений. Видно, что наибольшую сложность для вычисления в MDOM представляет область вблизи глории (рис. 2, б). Для расчетов этой области в программе MDOM требуются $N = 801$ и $M = 256$, что соответствует шагу дискретизации менее $0,5^\circ$. Для достижения той же точности в рамках синтетической итерации необходимы только $N = 11$, $M = 4$, что сокращает время вычислений почти в 60 раз. Соответственно, синтетическая итерация от MDOM позволяет вычислять угловые распределения яркости с точностью в равномерной метрике не хуже 1% при времени счета не более 1 с. Достоинством решения является возможность при вычислении итерации перехода к произвольной сетке углов визирования, не связанной с дискретными ординатами.

Столь высокая эффективность алгоритма СИ в данном случае связана с тем, что угловое распределение РЧР после выделения анизотропной части на основе МСГ очень близко к изотропному, за исключением некоторых всплесков, интеграл от которых по телесному углу очень мал. Это позволяет определять РЧР по МДО с малым числом ординат. Всплески же восстанавливаются уже первой итерацией. Отметим, что поскольку МСГ содержит прямое излучение, то в итерации точно учитывается однократно рассеянное излучение, а остальные кратности сильно улучшаются по точности.

Отметим, что в литературе для решения УПИ метод СИ часто используется под другими названиями: Discrete Ordinate Scheme with Infinitely Small Weight [18], False discrete ordinate [19] или метод аппроксимации значений яркости для углов вне сетки углов МДО [20]. Во всех случаях этот прием рассматривается как метод ускорения сходимости или аппроксимации сетки, но не как метод решения УПИ, что существенно снижает общность результатов.

Высокая точность решения СИ уже при малых значениях N , что связано с медленным изменением

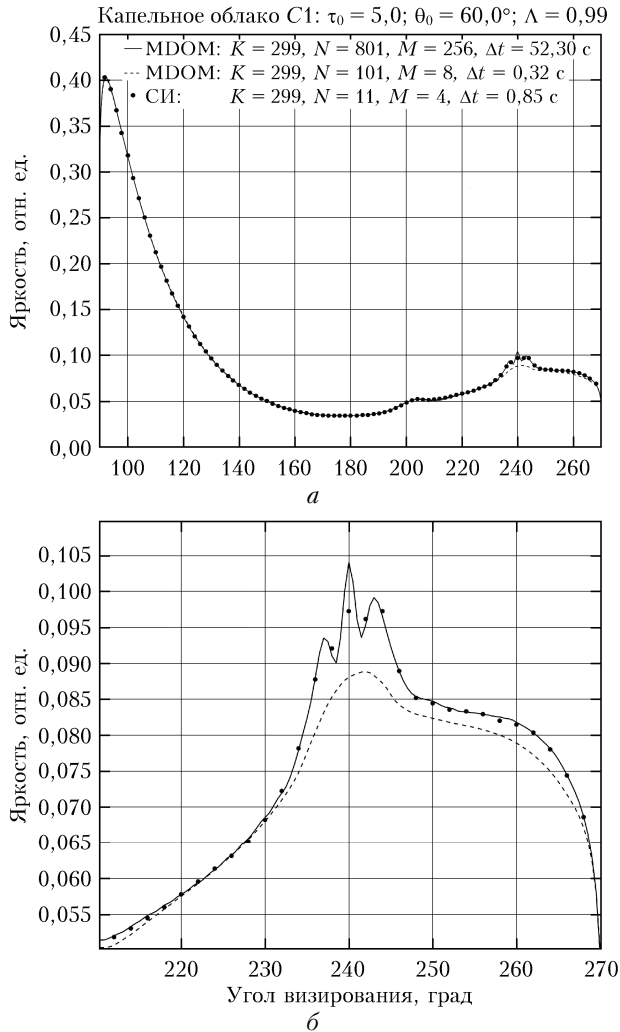


Рис. 2. Сравнение синтетической итерации с MDOM для яркости отраженного слоем излучения: а – полный диапазон углов визирования; б – область в окрестности глории

РЧР, позволила протестировать простейший вариант МДО для нахождения РЧР с двумя ординатами $N = 2$. Правда, в этом случае более эффективен вариант двухпотокового приближения (2П) за счет более удачной нормировки коэффициентов уравнения по энергетике. Как показали расчеты по алгоритму [3, 16], получаемое угловое распределение яркости практически неотличимо от результатов, представленных на рис. 2. Это подтверждает наше предположение, что МСГ достаточно точно описывает анизотропную часть решения, что делает РЧР гладкой, медленно изменяющейся с углом функцией, за исключением возможно конечного числа пиков. Хорошая сходимость в среднем позволяет утверждать, что интеграл отклонения РЧР от квазиизотропного распределения по телесному углу в области пиков крайне мал, что дает возможность их восстановить уже первой итерацией.

К сожалению, приближение 2П основывается на плоской геометрии, что не позволяет его обобщить на среды с более сложной геометрией. В теории переноса 2П-приближение эквивалентно P_1 -приближе-

нию метода сферических гармоник, иначе называемого диффузионным приближением. В литературе известно использование диффузионного приближения в качестве первого шага в решении УПИ методом СИ [21], которое получило название квазидиффузионного приближения (КДП). В работе [22] предложено его развитие, когда перед решением в КДП выделяется прямое излучение, что существенно улучшает сходимость. Можно предполагать, что эффективность решения будет еще более высокой, если перед решением в КДП выделить анизотропную часть в МСГ.

5. Квазидиффузионное приближение

Представим все функции в УПИ в краевой задаче (3) в виде разложения по сферическим функциям для случая P_1 -приближения метода сферических гармоник:

$$L_r(\tau, \hat{\mathbf{i}}) = C_{00}(\tau) Y_0^0(\hat{\mathbf{i}}) + \sum_{m=-1}^1 C_{1m}(\tau) Y_1^m(\hat{\mathbf{i}}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} E_0(\tau) + \frac{3}{4\pi} \mathcal{E}(\tau) \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{4\pi} (E_0(\tau) + 3\mathcal{E}(\tau) \hat{\mathbf{i}}), \quad (25)$$

$$\Delta(\tau, \hat{\mathbf{i}}) = s_{00}(\tau) Y_0^0(\hat{\mathbf{i}}) + \sum_{m=-1}^1 s_{1m}(\tau) Y_1^m(\hat{\mathbf{i}}) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4\pi} (s_0(\tau) + 3\mathbf{s}(\tau) \hat{\mathbf{i}}), \quad (26)$$

$$x(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} x_l P_l(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}), \quad (27)$$

где $E_0(\tau) \equiv \oint L_r(\tau, \hat{\mathbf{i}}) d\hat{\mathbf{i}}$, $\mathcal{E}(\tau) \equiv \oint L_r(\tau, \hat{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{i}} d\hat{\mathbf{i}}$ – пространственная облученность и световой вектор соответственно и аналогично $s_0(\tau)$, $\mathbf{s}(\tau)$ для функции источников; $Y_k^m(\hat{\mathbf{i}}) = \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} Q_k^m(\mu) e^{im\varphi}$ – сферическая функция; C_{km} , s_{km} – коэффициенты разложения РЧР и функции источников по сферическим функциям.

После подстановки (25)–(27) в УПИ последовательно проинтегрируем полученное выражение по полному телесному углу и с весом $\hat{\mathbf{i}}$. С учетом ортогональности сферических функций получим связанную систему из двух уравнений [22]:

$$\begin{cases} \varepsilon(1 - \Lambda)E_0(\tau) + \nabla \mathcal{E}(\tau) = s_0(\tau), \\ \frac{1}{3} \nabla E_0(\tau) + \varepsilon(1 - \Lambda x_1) \mathcal{E}(\tau) = \mathbf{s}(\tau), \end{cases} \quad (28)$$

что соответствует P_1 -приближению метода сферических гармоник [23].

В предположении, что среда однородная $\varepsilon = \text{const}$, можно вычислить дивергенцию от второго уравнения системы (28), выразить $\nabla \mathcal{E}(\tau)$ из первого и подставить во второе, что окончательно приведет к уравнению [22]:

$$\frac{1}{a^2} \Delta E_0(\tau) - E_0(\tau) = \psi(\tau), \quad (29)$$

где $a = \varepsilon \sqrt{(1-\Lambda)(1-\Lambda x_1)}$, $\psi(\tau) \equiv -\frac{s_0(\tau)}{3\varepsilon(1-\Lambda)} + \frac{\nabla \mathbf{s}(\tau)}{3a^2}$ — функция источников.

Источники $\psi(\tau)$ в правой части уравнения (29) легко вычисляются с учетом вида функции источников в МСГ (19) в УПИ (3) для РЧР:

$$s_0(\tau, \mu_0) = -(1-\Lambda)e^{-(1-\Lambda)\tau/\mu_0} + (1-\Lambda x_1)e^{-(1-\Lambda x_1)\tau/\mu_0}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \mathbf{s}(\tau)}{\varepsilon} &= -e^{-\tau/\mu_0} + (1-\Lambda x_1)^2 e^{-(1-\Lambda x_1)\tau/\mu_0} - \\ &- \frac{1}{3\mu_0^2} \left[-e^{-\tau/\mu_0} + (1-\Lambda)^2 e^{-(1-\Lambda)\tau/\mu_0} + \right. \\ &\left. + 2 \left(-e^{-\tau/\mu_0} + (1-\Lambda x_2)^2 e^{-(1-\Lambda x_2)\tau/\mu_0} \right) P_2(\mu_0) \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

С учетом плоской симметрии среды и функции источников (30), (31) уравнение диффузии (29) для плоского слоя приобретает форму

$$\frac{d^2 E_0(\zeta)}{d\zeta^2} - E_0(\zeta) = \psi(\zeta), \quad (32)$$

где $\zeta = az$.

Общее решение уравнения (32) определяется выражением

$$E_0(\zeta) = C_1 e^{-\zeta} + C_2 e^{\zeta} + E_{ps}(\zeta), \quad (33)$$

где частное неоднородное решение, исходя из вида функции источников, должно иметь вид

$$\begin{aligned} E_{ps}(\zeta) &= c_0 e^{-\zeta/a_1} + c_1 e^{-(1-\Lambda)\zeta/a_1} + \\ &+ c_2 e^{-(1-\Lambda x_1)\zeta/a_1} + c_3 e^{-(1-\Lambda x_2)\zeta/a_1}, \quad (34) \end{aligned}$$

C_1, C_2 — константы, определяемые из граничных условий, $a_1 \equiv a/\varepsilon = \sqrt{(1-\Lambda)(1-\Lambda x_1)}$.

Подставляя (33) и (34) в (32), получаем уравнение для констант c_0, c_1, c_2, c_3 , которые находятся из условий равенства коэффициентов при одинаковых показателях у экспонент.

Граничные условия положим в форме Маршака — равенство потоков через границу среды. Яркость в диффузионном приближении находится по (25), причем из второго уравнения системы (28):

$$|\mathcal{E}(\tau)| = \frac{1}{\varepsilon(1-\Lambda x_1)} \left[\mathbf{s}(\tau) - \frac{1}{3} \nabla E_0(\tau) \right]. \quad (35)$$

Для облученности (потока) вниз имеем

$$\begin{aligned} E_{\downarrow} &= \int_{\mu \geq 0} L_r(\tau, \hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{z}}) d\hat{\mathbf{l}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (E_0(\tau) + 3\mu |\mathcal{E}(\tau)|) \mu d\mu = \\ &= \frac{1}{4} E_0(\tau) + \frac{1}{2} |\mathcal{E}(\tau)|. \quad (36) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для потока вверх получим по аналогии

$$\begin{aligned} E_{\uparrow} &= - \int_{\mu \leq 0} L_r(\tau, \hat{\mathbf{l}})(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{z}}) d\hat{\mathbf{l}} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 (E_0(\tau) + 3\mu |\mathcal{E}(\tau)|) \mu d\mu = \\ &= -\frac{1}{4} E_0(\tau) + \frac{1}{2} |\mathcal{E}(\tau)|. \quad (37) \end{aligned}$$

Соответственно, граничные условия в плоской задаче примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} E_0(0) + \frac{1}{2} |\mathcal{E}(0)| &= 0, \\ -\frac{1}{4} E_0(az_0) + \frac{1}{2} |\mathcal{E}(az_0)| &= -E_a(z_0), \quad (38) \end{aligned}$$

откуда определяются константы C_1, C_2 .

Реализация описанного алгоритма для задачи, соответствующей представленным на рис. 2 результатам, показала, что квазидиффузионное приближение полностью эквивалентно квазидвухпоточковому приближению по точности и скорости вычислений. Однако квазидиффузионное приближение не зависит от плоской симметрии, а потому обобщается на произвольную геометрию среды.

Заключение

Выделение анизотропной части по выражению (2) из решения краевой задачи (1) делает угловое распределение соответствующей гладкой части близким к изотропному за исключением отдельных всплесков, отличие которых от гладкого распределения в среднеквадратичной метрике незначительно. Это позволяет находить гладкую часть в двухпоточковом или диффузионном приближении. Уточнить полученное решение с учетом описания и всплесков можно на основе итерации. Тем самым предлагаемый метод решения относится к классу синтетических итераций решения УПИ. Диффузионное приближение для определения гладкой части (квазидиффузионное приближение) в отличие от двухпоточкового не зависит от геометрии среды. Поскольку решения в МСГ получены [2] и вычисления итераций возможны для любой геометрии среды, это позволяет утверждать возможность построения решения УПИ в квазидиффузионном приближении также для произвольной трехмерной геометрии среды.

Отметим, что предлагаемый подход позволяет существенно ускорить сходимость традиционных методов решения УПИ на примере плоского слоя. Учет всех факторов: поляризации, вертикальной и горизонтальной неоднородности, профиля подстилающей поверхности и т.д. — увеличит время счета, но существенно в меньшей степени, чем в традиционных схемах. Так, например, при вертикальной неоднородности используется матрично-операторный метод, который при классическом подходе метода дискретных ординат или сферических гармоник [9] основывается на M матричных выражениях с матрицами $N \times N$. При сформулированном методе это одно матричное выражение с матрицей 2×2 , что также приведет к существенному выигрышу по времени. Однако это темы отдельных исследований.

1. Yokota T., Oguma H., Morino I., Inoue G. A nadir looking SWIR FTS to monitor CO₂ column density for Japanese GOSAT project // Proc. XXIV Int. Sym. Space Technol. Sci. Miyazaki, Japan, May–June 2004. P. 887.
2. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering // Light Scattering Reviews 5. Single Light Scattering and Radiative Transfer / Ed. A.A. Kokhanovsky. Springer Praxis Books, 2010. P. 147–204.
3. Budak V.P., Shagalov O.V., Zheltov V.S. Numerical radiative transfer modeling in turbid medium slab // 20th Int. Symp. on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics. Proc. SPIE. 9292. 2014. P. 92920Y.
4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
5. Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения: Статистические и волновые аспекты. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1983. 320 с.
6. Budak V.P., Veklenko B.A. Bosen peak, flickering noise, backscattering processes and radiative transfer in random media // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2011. V. 112, N 5. P. 864–875.
7. Будак В.П., Козельский А.В., Савицкий Е.Н. Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильно анизотропном рассеянии // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17, № 1. С. 36–41.
8. Budak V.P., Korkin S.V. On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2008. V. 109, N 2. P. 220–234.
9. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Complete matrix solution of radiative transfer equation for pile of horizontally homogeneous slabs // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2011. V. 112, N 7. P. 1141–1148.
10. Kokhanovsky A.A., Budak V.P., Cornet C., Duan M., Emde C., Katsev I.L., Klyuykov D.A., Korkin S.V., C-Labonnote L., Mayer B., Min Q., Nakajima T., Ota Y., Prikhach A.S., Rozanov V.V., Yokota T., Zege E.P. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2010. V. 111, N 12–13. P. 1931–1946.
11. Sokoletsky L.G., Budak V.P., Shen F., Kokhanovsky A.A. Comparative analysis of radiative transfer approaches for calculation of plane transmittance and diffuse attenuation coefficient of plane-parallel light scattering layers // Appl. Opt. 2014. V. 53, N 3. P. 459–468.
12. Будак В.П., Козельский А.В. О точности и границах применимости малоуглового приближения // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 1–2. С. 38–44.
13. Будак В.П., Сармин С.Э. Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3, № 9. С. 981–987.
14. Будак В.П., Клюйков Д.А., Кorkin С.В. СIAO – программа моделирования поляризационных сигналов спектральных приборов дистанционного зондирования в системе «океан–атмосфера» // Изв. вузов. Физ. 2010. Т. 53, № 9/3. С. 58–69.
15. Budak V.P., Efremenko D.S., Shagalov O.V. Efficiency of algorithm for solution of vector radiative transfer equation in turbid medium slab // J. Phys.: Conference Series. 2012. V. 369. 012021 (10 p.).
16. Budak V.P., Kaloshin G.A., Shagalov O.V., Zheltov V.S. Numerical modeling of the radiative transfer in a turbid medium using the synthetic iteration // Opt. Express. 2015. V. 23, N 15. P. A829.
17. Adams M.L., Larsen E.W. Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progr. Nuclear Energy. 2002. V. 40, N 1. P. 3–159.
18. Li H.-S., Flamant G., Lu J.-D. An alternative discrete ordinate scheme for collimated irradiation problems // Int. Comm. Heat Mass Transfer. 2003. V. 30, N 1. P. 61–70.
19. Efremenko D., Doicu A., Loyola D., Trautmann T. Acceleration techniques for the discrete ordinate method // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2013. V. 114. P. 73–81.
20. Thomas G.E., Stamnes K. Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean. N.Y.; Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 540 p.
21. Гольдин В.Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078–1087.
22. Аристова Е.Н., Гольдин В.Я. Расчет анизотропного рассеяния солнечного излучения в атмосфере (моноэнергетический случай) // Мат. моделир. 1998. Т. 10, № 9. С. 14–34.
23. Дэвидсон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960. 438 с.

V.P. Budak, V.S. Zheltov, A.V. Lubenchenko, K.S. Freidlin, O.V. Shagalov. Fast and accurate algorithm for the numerical simulation of radiative transfer in turbid media.

It is shown that the regular part of the solution (RPS) remained after the separation of the anisotropic part of the solution (APS) in the small-angle modification of the spherical harmonics method (MSH) is a smooth quasi-isotropic function with some peaks in the angular distribution. The smooth part of the RPS without peaks can be determined in two-streaming or diffuse approximation. The first iteration of the resulting radiance angular distribution significantly refines the solution and allows restoring the specified angular peaks. Quasi-diffusion approach – the separation of APS by MSH, the definition of RPS in the diffuse approximation and refinement of solutions based on the first iteration, – is independent of the problem symmetry, and therefore can be generalized to the case of arbitrary medium geometry.