

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ГИДРОДИНАМИКЕ С ДИСПЕРСИЕЙ ЗВУКА

В. Е. Захаров (Новосибирск)

Как известно, во многих случаях для описания волновых движений плазмы применяются гидродинамические модели. Однако, в отличие от обычной гидродинамики, в этих моделях необходимо учитывать эффекты дисперсии волн, особенно заметные для движений с большими пространственными градиентами. Таковы модели «гидродинамики ионного звука» [1], «гидродинамики с ионной дисперсией» [2] и модели, описывающие распространение звука в холодной плазме поперек магнитного поля. К гидродинамике с дисперсией приводят также задачи распространения волн в каналах конечной глубины. В этих моделях существуют стационарные волны конечной амплитуды с размером порядка дисперсионной длины [1, 2].

Для каждой из этих моделей может быть поставлен вопрос об эволюции произвольного волнового пакета. На первый взгляд кажется, что если взять амплитуду пакета достаточно малой, то можно пренебречь влиянием нелинейных членов и считать, что эволюция пакета описывается его расплыванием в результате дисперсии.

Однако можно показать, что такое рассмотрение справедливо лишь при весьма жестких ограничениях на форму пакета и что для общего случая влияние нелинейности необходимо учитывать при сколь угодно малой амплитуде пакета.

Рассмотрим простую одномерную гидродинамическую модель плазмы — модель ионного звука. Предполагается, что $T_e \gg T_i$ и магнитное поле отсутствует. Тогда плазма описывается скоростью v и плотностью n ионов и электростатическим потенциалом Φ . Для этих величин справедлива система уравнений [3] (m — масса ионов, $T_e = T$ — температура электронов, n_0 — невозмущенная плотность плазмы)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nv) = 0, \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4\pi e \left(n - n_0 \exp \frac{e\Phi}{T} \right)$$

В дальнейшем будем полагать, что рассматриваются движения, у которых

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{1}{r_d} \quad \left(r_d = \left(\frac{T}{8\pi e^2 n_0} \right)^{1/2} \text{ — дебаевский радиус плазмы} \right)$$

так что дисперсионные эффекты малы. Будем, кроме того, считать, что амплитуда волны невелика ($M - 1 < 1$). Пользуясь этими предположениями (M — число Маха), можно из последнего уравнения приближенно выразить градиент потенциала

$$e \frac{\partial \Phi}{\partial x} = T \frac{n'}{n} + 2Tr_d^2 \frac{1}{n_0} \frac{\partial^3 n}{\partial x^3}$$

Далее введем $\delta n = n - n_0$ и перейдем в систему отсчета, движущуюся вправо со скоростью звука

$$z = x - ct, \quad \tau = t \tag{2}$$

Система уравнений приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} - c \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{c^2}{n_0} \left(\frac{\partial \delta n}{\partial z} - \frac{\delta n}{n_0} \frac{\partial \delta n}{\partial z} + r_d^2 \frac{\partial^3 \delta n}{\partial z^3} \right) \\ \frac{\partial \delta n}{\partial \tau} - c \frac{\partial \delta n}{\partial z} - n_0 \frac{\partial v}{\partial z} + \delta n \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial \delta n}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь, вследствие того, что эффекты нелинейности и дисперсии предполагаются малыми, можно искать решения, для которых производные по τ малы. Это соответствует рассмотрению волн, бегущих вправо и медленно эволюционирующих под действием нелинейности и дисперсии.

Второе из уравнений (3) позволяет приближенно получить и

$$\delta n \approx \frac{n_0}{e} v, \quad \frac{\partial \delta n}{\partial z} \approx \frac{n_0}{c} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{2n_0}{c^2} v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{n_0}{c^2} \frac{\partial v}{\partial \tau} \tag{4}$$

Подставляя выражения (4) в первое из уравнений (3), получим окончательно

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial z} = cr_d^2 \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}, \quad \mu = cr_d^2 \tag{5}$$

Уравнение (5) было получено для волн на поверхности воды и применялось в работе [3] для гидродинамики с ионной дисперсией. В зависимости от закона дисперсии получали разный знак μ .

Уравнение (5) позволяет сделать оценку относительной величины нелинейного

члена и члена со старшей производной. Из уравнения (5) видно, что интеграл от vz сохраняется.

Нелинейный член имеет порядок $\sqrt{2}a/a$, а дисперсионный — $\sqrt{1/a^3}$. Отсюда

так как $\Delta a \sim E$, можно их записать соответственно E_2/a^3 и \sqrt{E}/a^4 . Отсюда

следует, что по мере расширения пакета a будет увеличиваться, и относительная

роль нелинейного члена возрастает. Нелинейный и дисперсионный члены сравниваются на длине $a^* \sim \sqrt{1/E}$. Именно

такую длину имеют в рассматриваемой модели стационарные уединенные волны.

Приведенное рассмотрение показывает, что только эволюция достаточно узких

пакетов ($a > a^*$) можно рассматривать в рамках линеаризованного уравнения.

Получим теперь более строгие условия на форму волнового пакета, при которой

эволюция определяется в основном линейными членами. Для этого сохраним в урав-

нении (5) замену переменных $\eta = z - ut$, $\tau = t$

уравнение (5) приобретает при этом вид

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{1 + \tau^2 a^2} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{1 + \tau^2 a^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1 + \tau^2 a^2}{a} \right) \quad (7)$$

Из последнего соотношения ясно, что если $1 + \tau^2 a^2 = 0$, то $\partial u / \partial z$ обращается

в бесконечность, что соответствует «проникающему фронту».

Из уравнения видно также, что при описании начальной стадии эволюции па-

кета, когда τ мало, можно заменить уравнение (7) линейным уравнением

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial a}{\partial \tau} \right) \quad (8)$$

Если эволюция пакета для всех τ описывается уравнением (8), она качественно

мало отличается от линейного расширения. Для выполнения этого условия, чтобы

Решение уравнения (8) выражается через функции Эри

$$v(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2 a^2}} \Phi \left(\frac{\eta}{\sqrt{1 - \tau^2 a^2}} \right) d\eta \quad (10)$$

Заметим, что $\eta = z$ при $t = 0$. Разложим $v_0(\eta)$ в ряд по производным δ -функции

$$v_0(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^{(n)}(\eta) \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в условие (7), получаем

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right| \leq 1 \quad (9)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ главную роль играют первые члены ряда (12). Для выполнения усло-

вия (12) необходимо, во всяком случае, чтобы

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right| < 2n^3 \quad (13)$$

Тогда условие (12) выполняется для $|\eta| > \sqrt{2}n^3$. Для больших η все равно при-

дется учитывать нелинейные члены вследствие возрастания производных функции

Эри при $\eta \rightarrow \infty$. Если первые $(k-1)$ моментов функции v_0 равны нулю, то при

$\tau \rightarrow \infty$ условие (12) имеет вид

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right| > \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \tau^2 a^2}} \right)^{k-1} \quad (14)$$

Оценим теперь из выражения (10) ширину волнового пакета при $\tau \rightarrow \infty$. Пусть λ — характерный размер, на котором функция $v_0(y)$ сильно меняется. Тогда $v(y, \tau)$ убывает, начиная с тех y_* , для которых функция Φ совершает несколько осцилляций на длине λ . Если $v_0(y)$ отлично от нуля для $|y| < y_0$, то $y_* \gg y_0$ при больших τ . Тогда

$$\Phi\left(\frac{y-y'}{\mu\tau^{1/3}}\right) \approx \left(\frac{y}{\mu\tau^{1/3}}\right)^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\mu\tau^{1/3}}\right)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Характерная «частота» функции Эйри есть $y^{1/2}\mu^{-3/2}\tau^{-1/2}$; отсюда следует оценка

$$y_* \sim \frac{\tau\mu^3}{\lambda^2} \quad (15)$$

Приблизительно на этих расстояниях сравниваются разные члены ряда (12).

Сравнение оценок (14) и (15) показывает, что если хотя бы одно A_n отлично от нуля, существует область, где необходимо учитывать нелинейные эффекты, хотя ширина этой области уменьшается с ростом n .

Возможно, что существуют начальные условия специфического вида, такие что все $A_n = 0$, для которых линейное распыление пакета имеет место при всех τ и z .

Недавно в работе [3] были найдены автомодельные решения уравнения (5), эволюционирующие по закону, близкому к линейному. Анализ этих решений показывает, что они удовлетворяют условиям (13).

В заключение автор благодарит Р. З. Сагдеева за обсуждение работы.

Поступила 23 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания в разреженной плазме. Ядерный синтез, 1961, № 1.
2. Карман В. И. О структуре фронта ударной волны, распространяющейся под углом к магнитному полю в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 8.
3. Березин Ю. А., Карман В. И. К теории нестационарных волн конечной амплитуды в разреженной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ. (в печати).

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ОТСАСЫВАНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ С ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Л. Ф. Козлов (Ленинград)

Под оптимальным отсасыванием жидкости из пограничного слоя через пористую поверхность крылового профиля будем понимать такое распределение нормальной составляющей скорости по поверхности, когда в каждом сечении пограничного слоя местное число Рейнольдса равно его нижнему критическому значению.

Впервые задача об оптимальном отсасывании жидкости из пограничного слоя пористой пластины численным интегрированием уравнения Л. Прандтля была решена в работе [1]. Приближенное решение этой же задачи в квадратурах получено автором [2].

Работы Вигхардта и Вортмана [3, 4] посвящены приближенному решению аналогичной задачи для пограничного слоя с продольным перепадом давлений на внешней границе. Обе работы основаны на одновременном использовании уравнений импульсов и энергии для пограничного слоя. В методе Вигхардта для каждого частного случая предлагается интегрировать основную систему дифференциальных уравнений весьма трудоемким численным способом конечных разностей. При выводе окончательных формул для оптимального отсасывания Вортманом использованы функции, вычисленные с применением профилей Шлихтинга, весьма приближенно аппроксимирующих действительное изменение скоростей в пограничном слое на пористой поверхности, особенно вблизи точки отрыва.

Ниже для расчета оптимального отсасывания жидкости из пограничного слоя крыловых профилей с пористой поверхностью в несжимаемой жидкости использована система уравнений нулевого и второго «моментов» [5]. Предложенный метод достаточно точен и свободен от недостатков, присущих методам Вигхардта и Вортмана. Следует отметить, что для решения задач пограничного слоя систему уравнений «моментов» впервые предложил Л. Г. Лойцянский [6].