УДК 517.948

Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения*

Е.В. Табаринцева

Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080
E-mail: eltab@rambler.ru

Табаринцева Е.В. Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.—Новосибирск, 2018.—Т. 21, № 3.—С. 293–313.

В работе рассмотрена граничная обратная задача для полулинейного параболического уравнения. Получены двусторонние оценки норм значений нелинейного оператора через нормы значений соответствующего линейного оператора. На основании этого установлены двусторонние оценки модуля непрерывности для полулинейной обратной задачи через модуль непрерывности для соответствующей линейной задачи. Устойчивые приближенные решения нелинейной обратной задачи строятся методом вспомогательных граничных условий. Получена точная по порядку оценка погрешности метода вспомогательных граничных условий на одном из классов равномерной регуляризации.

DOI: 10.15372/SJNM20180305

Ключевые слова: *параболическое уравнение, обратная задача, модуль непрерывности обратного оператора, метод приближенного решения, оценка погрешности.*

Tabarintseva E.V. On the estimate of accuracy of the auxiliary boundary conditions method for solving a boundary value inverse problem for a nonlinear equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2018.—Vol. 21, № 3.—P. 293–313.

An inverse boundary value problem for a nonlinear parabolic equation is considered. Two-way estimates for the norms of values of a nonlinear operator in terms of the norms of values of the corresponding linear operator are obtained. Consequent by the two-way estimates are established for the modulus of continuity of a nonlinear inverse problem in terms of the modulus of continuity of the corresponding linear problem. The auxiliary boundary conditions method to construct stable approximate solutions to the nonlinear inverse problem is used. An accurate in order error estimate for the auxiliary boundary conditions method on a uniform regularization class has been obtained.

Keywords: *parabolic equation, inverse problem, modulus of continuity of the inverse operator, approximate method, error estimate.*

Введение

В настоящей работе рассматривается одномерная нелинейная постановка обратной граничной задачи теплообмена. Приближенное решение строится методом вспомогательных граничных условий, который состоит в замене неустойчивой исходной задачи устойчивой задачей с “малым” параметром в граничных условиях. Получена точная по по-

*Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г., соглашение № 02.A03.21.0011).

рядку оценка погрешности построенного приближенного решения на одном из классов корректности обратной граничной задачи.

Для исследования рассмотренного метода приближенного решения на оптимальность основную роль играет модуль непрерывности обратного оператора, техника вычисления которого хорошо известна для широкого класса линейных задач [1–3], но недостаточно разработана в нелинейном случае.

В настоящей работе получены двусторонние оценки норм решений нелинейной задачи через нормы решений соответствующей линейной задачи, что позволяет получить двусторонние оценки модуля непрерывности для нелинейной обратной задачи.

Доказана оптимальность по порядку метода вспомогательных граничных условий с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева на рассмотренном классе корректности.

Важные классы нелинейных обратных задач и методы их решения рассмотрены, например, в [6–13].

Метод вспомогательных граничных условий для неустойчивых задач, связанных с линейными дифференциально-операторными уравнениями, подробно исследован в [5].

Вопросы теплообмена имеют особое значение в таких областях техники, как авиационная и ракетно-космическая техника, энергетика, металлургия. При этом большое значение имеют экспериментальные исследования, стендовая и натурная отработка тепловых режимов, создание эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов по результатам экспериментов и испытаний. В основу этих методов могут быть положены решения обратных задач теплообмена, причем в ряде случаев обратные задачи являются практически единственным средством получения необходимых результатов. Методы обратных задач обладают высокой информативностью и позволяют проводить экспериментальные исследования в условиях, максимально приближенных к натурным.

Диагностика и идентификация процессов теплообмена могут быть связаны с решением обратных задач различных типов, однако граничные обратные задачи — это один из наиболее важных и распространенных в тепловом моделировании классов задач. Граничные обратные задачи представляют и методический интерес, так как задачи данного типа, по сравнению с коэффициентными и геометрическими задачами, как правило, имеют большую склонность к искажению результатов, связанную с некорректностью постановок, априорная информация о точном решении граничных обратных задач бывает ограниченной [14]. При исследовании тепловых процессов высокой интенсивности особое значение имеет учет эффектов, связанных с нелинейностью процесса.

Рассмотренная в данной работе одномерная постановка обратной граничной задачи является основной расчетной моделью, для которой должны быть построены эффективные методы обработки экспериментальных данных.

1. Постановка задачи

Рассмотрим граничную обратную задачу, т. е. задачу восстановления функции $h(t) = u(l,t)$ (граничного условия), где $h(t) \in L_2[0,\infty)$, $u(x,t) \in C([0;l]; L_2[0;\infty)) \cap C^2((0;l);\, W_2^{1,0}[0;\infty))$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad u(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0 \tag{1}$$

и дополнительному условию $u(0,t)=\varphi(t)$. Здесь $\varphi(t)\in L_2[0,\infty)$ — заданная функция, $f: L_2[0,\infty)\to L_2[0,\infty)$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица: для любых элементов $z_1,z_2\in L_2[0,\infty)$ $\|f(z_1)-f(z_2)\|_{L_2[0,\infty)}\le L\|z_1-z_2\|_{L_2[0,\infty)}$. Задача (1) поставлена некорректно. Пусть вместо точных значений $\varphi(t)$ известны δ-приближения φ_δ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что $\|\varphi_\delta-\varphi\|\le\delta$. Требуется по исходным данным задачи построить приближенное решение и оценить его уклонение от точного решения.

2. Оценка модуля непрерывности для полулинейной обратной задачи

2.1. "Прямая" задача для параболического уравнения

Рассмотрим краевую задачу для полулинейного уравнения, т. е. задачу вычисления функции $u(x,t)\in C([0;l];\,L_2[0;\infty))\cap C^2((0;l);\,W_2^{1,0}[0;\infty))$, такой, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u(x,t));\quad t\in(0;\infty),\quad u(x,0)=0,\quad u(l,t)=h(t),\quad u_x(0,t)=0,\qquad (2)$$

где $h(t)\in L_2[0;\infty)$ — заданная функция. Здесь $f\colon L_2[0;\infty)\to L_2[0;\infty)$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица. В "прямой" задаче требуется определить функцию $\varphi(t)=u(0,t)$, где $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2).

Рассмотрим следующие линейные нормированные пространства: $L_2[0,\infty)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом, принимающих действительные значения, Φ — пространство комплекснозначных функций $\widetilde{f}(s)$, определенных на полупрямой $s\in(0;\infty)$, допускающих аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Im}z<0$, и таких, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|\widetilde{f}(s+i\sigma)|^2ds<C$ при всех $\sigma<0$. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\widetilde{f}(\lambda)=Ff=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i\lambda t}f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda t}\psi(t)\,dt=\widetilde{\psi}(\lambda),\qquad (3)$$

где $\psi(t)=\begin{cases} f(t), & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ Выполняется следующая теорема [15].

Теорема 1. *Класс функций Φ совпадает с классом функций, представимых в виде $\widetilde{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i\lambda t}f(t)\,dt$, где интеграл сходится в среднем и $\int_0^\infty|f(t)|^2\,dt<\infty$.*

Рассмотрим равенство Парсеваля $\int_0^\infty|f(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|\widetilde{f}(\lambda)|^2\,d\lambda$. Так как, очевидно, для функции $f(t)$ с действительными значениями выполняется равенство $\widetilde{f}(-\lambda)=\overline{\widetilde{f}}(\lambda)$, то из равенства Парсеваля следует $\int_0^\infty|f(t)|^2\,dt=2\int_0^{+\infty}|\widetilde{f}(\lambda)|^2\,d\lambda$. Рассмотрим в пространстве Φ норму $\|\widetilde{f}\|_\Phi=\left(\int_0^\infty|\widetilde{f}|^2(\lambda)\,d\lambda\right)^{\frac12}$. Из равенства Парсеваля следует, что линейный оператор $F_0: L_2[0,\infty)\to\Phi$, действующий по правилу $F_0f=\frac{1}{\sqrt2}\widetilde{f}(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt\pi}\int_0^\infty e^{-i\lambda t}f(t)\,dt$, является изометрией. Рассмотрим обратное преобразование Фурье на прямой. Из (3) следует

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \widetilde{\psi}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t} \widetilde{\psi}(\lambda)\, d\lambda + \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t} \widetilde{\psi}(\lambda)\, d\lambda \right)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t} \widetilde{\psi}(\lambda)\, d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} e^{i\lambda t} \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda.$$

Следовательно, $f(t) = F_1 \widetilde{f}$, где оператор $F_1 : \Phi \to L_2[0,\infty)$ действует по правилу $F_1 \widetilde{f} = F^{-1} \widetilde{f} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{\lambda t} \widetilde{f}(\lambda)\, d\lambda$. Пусть $f \colon L_2[0;\infty) \to L_2[0;\infty)$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица. Обозначим через g оператор, действующий в пространстве Φ по правилу $g(\widetilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(z(t)) e^{-i\lambda t} dt = F(f(F^{-1}\widetilde{z}))$. Так как оператор $F_0 : L_2[0;\infty) \to \Phi$ изометричен, то

$$\|g(\widetilde{z_1}) - g(\widetilde{z_2})\|_\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f(z_1) - f(z_2)\|_{L_2[0;\infty)} \le \frac{1}{\sqrt{2}} L \|z_1 - z_2\|_{L_2[0;\infty)} = L \|\widetilde{z_1} - \widetilde{z_2}\|_\Phi,$$

т. е. отображение $g : \Phi \to \Phi$ удовлетворяет условию Липшица. Применяя к задаче (2) преобразование Фурье, получим следующую краевую задачу для нелинейного уравнения:

$$\widetilde{u}_{xx}(x,\lambda) = i\lambda \widetilde{u}(x,\lambda) - g(\widetilde{u}(x,\lambda)); \quad \widetilde{u}_x(0,\lambda) = 0; \quad \widetilde{u}(l,\lambda) = \widetilde{h}(\lambda).$$

Полученная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения стандартным способом сводится к интегральному уравнению

$$\widetilde{u}(x,\lambda) = \frac{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x}{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} l} \widetilde{h}(\lambda) + \int_0^l G_l(x,\xi,\lambda) g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\, d\xi, \tag{4}$$

$$G(x,\xi,\lambda) = G_l(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{w(l,\lambda)} \begin{cases} \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\lambda} (\xi - l), & 0 \le x \le \xi \le l, \\ \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} \xi \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\lambda} (x - l), & 0 \le \xi \le x \le l, \end{cases}$$

где $w(l,\lambda) = -\mu_0 \sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} l$, $\mu_0 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. Выполняется

Теорема 2. *Пусть отображение $g : \Phi \to \Phi$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, такой, что $\sqrt{2} L l^2 < 1$. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $\widetilde{u}(x,\lambda) \in C([0;l];\Phi)$ для любой функции $\widetilde{h}(\lambda) \in \Phi$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{h}(\lambda) \in \Phi$, $\widetilde{u}(x,\lambda) \in C([0;l];\Phi)$. Рассмотрим отображение, определенное по правилу

$$B\widetilde{u}(x,\lambda) = \frac{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x}{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} l} \widetilde{h}(\lambda) + \int_0^l G_l(x,\xi,\lambda) g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\, d\xi. \tag{5}$$

Покажем, что $B\widetilde{u}(x,\lambda) \in C([0;l];\Phi)$ для любой функции $\widetilde{u}(x,\lambda) \in C([0;l];\Phi)$, т. е. $B : C([0;l];\Phi) \to C([0;l];\Phi)$. Рассмотрим функцию $\widetilde{Z}(x,\lambda) = \int_0^l G_l(x,\xi,\lambda) g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\, d\xi$. Покажем, что $\widetilde{Z}(x,\lambda) \in C([0;l];\Phi)$ для любой функции $\widetilde{u}(x,\lambda) \in C([0;l];\Phi)$. Действительно, $g(\widetilde{u}(\xi,\lambda)) \in C([0;l];\Phi)$, и при всех $0 \le x \le l$ и Δx, таких, что $0 \le x + \Delta x \le l$,

$$\|\widetilde{Z}(x+\Delta x,\lambda)-\widetilde{Z}(x,\lambda)\|_\Phi^2 \le \int\limits_0^l \|(G_l(x+\Delta x,\xi,\lambda)-G_l(x,\xi,\lambda))g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\|_\Phi^2\, d\xi$$
$$\le l \sup_{0\le\xi\le l} \|(G_l(x+\Delta x,\xi,\lambda)-G_l(x,\xi,\lambda))g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\|_\Phi^2.$$

Рассмотрим элементарные неравенства

$$|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x|^2 = \operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\cos^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x + \operatorname{sh}^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x \le e^{\sqrt{2\lambda}x};$$
$$|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x|^2 \ge \frac{e^{\sqrt{2\lambda}x}}{4}; \qquad |\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}x|^2 = \operatorname{sh}^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x + \sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x \le e^{\sqrt{2\lambda}x}. \tag{6}$$

С учетом (6) имеем неравенство (для определенности рассмотрим случай $x \le \xi$)

$$|G(x,\xi,\lambda)|^2 = \frac{|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x|^2|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(\xi-l)|^2}{\lambda|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l|^2} \le \frac{4e^{\sqrt{2\lambda}x}}{e^{\sqrt{2\lambda}l}}\ \frac{\operatorname{sh}^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(l-\xi)+\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(l-\xi)}{\lambda}$$
$$\le 4\frac{\operatorname{sh}^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(l-\xi)+\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(l-\xi)}{e^{\sqrt{2\lambda}(l-x)}\lambda} \le 4\frac{\operatorname{sh}^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(l-\xi)+\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(l-\xi)}{e^{\sqrt{2\lambda}(l-\xi)}\lambda}. \tag{7}$$

Обозначим $s=\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(l-\xi)$, $s\ge 0$. Из неравенства (7) следует, что при $0\le x,\ \xi\le l,\ \lambda\ge 0$

$$|G(x,\xi,\lambda)|^2 \le 2l^2\frac{\operatorname{sh}^2 s+\sin^2 s}{s^2e^{2s}}. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $r(s)=\frac{\operatorname{sh}s}{se^s}=\frac{1-e^{-2s}}{2s}$, $r(0)=1$. Вычисляя наибольшее значение функции $r(s)$ на луче $s\in[0,\infty)$, убедимся, что $r(s)\le 1$ при $s\in[0,\infty)$. Рассмотрим функцию $q(s)=\frac{\sin s}{se^s}$, $q(0)=1$. Так как критические точки s_k функции $q(s)$ удовлетворяют условию $\frac{\sin s_k}{s_k}=\frac{\cos s_k}{s_k+1}$, то значения функции в критических точках удовлетворяют условию $|q(s_k)|=\frac{|\sin s_k|}{s_ke^{s_k}}=\frac{|\cos s_k|}{(s_k+1)e^{s_k}}<1$. Учитывая, что $q(s)\to 0$ при $s\to+\infty$, убеждаемся, что $q(s)\le 1$ при $s\ge 0$. Следовательно, в силу неравенства (8) $|G(x,\xi,\lambda)|\le\sqrt{2}l$. Таким образом, при $0\le x,\ \xi\le l,\ \lambda\ge 0$

$$|(G_l(x+\Delta x,\xi,\lambda)-G_l(x,\xi,\lambda))g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))|^2 \le 8\,l^2|g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))|^2,$$

следовательно, интеграл $\int_0^\infty |(G_l(x+\Delta x,\xi,\lambda)-G_l(x,\xi,\lambda))g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))|^2d\lambda$ сходится равномерно по $0\le x\le l$, $0\le\xi\le l$, Δx, для которых $0\le x+\Delta x\le l$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\alpha>0$, такое, что при всех $A>\alpha$, $0\le x\le l$, $0\le\xi\le l$, Δx, для которых $0\le x+\Delta x\le l$,

$$\int\limits_A^\infty |(G_l(x+\Delta x,\xi,\lambda)-G_l(x,\xi,\lambda))g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))|^2d\lambda<\varepsilon.$$

Так как $G(x,\xi,\lambda)$ равномерно непрерывна на множестве $0\le x\le l$, $0\le\xi\le l$, $0\le\lambda\le A$, то по заданному числу $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$, такое, что при всех $0\le x\le l$, $0\le\xi\le l$, $|\Delta x|<\delta$, для которых $0\le x+\Delta x\le l$, $|G_l(x+\Delta x,\xi,\lambda)-G_l(x,\xi,\lambda)|<\varepsilon$. Следовательно,

$$\int_0^A |(G_l(x+\Delta x,\xi,\lambda)-G_l(x,\xi,\lambda))g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))|^2\,d\lambda \le \varepsilon^2\|g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\|^2_{C([0;l];\Phi)},$$

$$\|\widetilde{Z}(x+\Delta x,\lambda)-\widetilde{Z}(x,\lambda)\|^2_\Phi \le \varepsilon^2+\varepsilon^2\|g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\|^2_{C([0;l];\Phi)}.$$

Рассмотрим отображение $B : C([0;l];\Phi) \to C([0;l];\Phi)$, заданное равенством (5). Покажем, что отображение B является сжимающим. Оценим норму:

$$\|B\widetilde{u}_1(x,\lambda)-B\widetilde{u}_2(x,\lambda)\|_{C([0;l];\Phi)} \le \int_0^l \|G_l(x,\xi,\lambda)(g(\widetilde{u}_1(\xi,\lambda))-g(\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)))\|_{C([0;l];\Phi)}\,d\xi$$

$$\le \sup\{|G(x,\xi,\lambda)| : x,\xi\in[0,l],\lambda\ge 0\}L\int_0^l \|\widetilde{u}_1(\xi,\lambda)-\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)\|_\Phi\,d\xi$$

$$\le \sqrt{2}Ll\int_0^l \|\widetilde{u}_1(\xi,\lambda)-\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)\|_\Phi\,d\xi \le \sqrt{2}Ll^2\|\widetilde{u}_1(\xi,\lambda)-\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)\|_{C([0;l];\Phi)}.$$

Следовательно, отображение B при условии $\sqrt{2}Ll^2 < 1$ является сжимающим в пространстве $C([0;l];\Phi)$ и имеет единственную неподвижную точку в данном пространстве, т. е. уравнение (4) имеет единственное решение $\widetilde{u}(x,\lambda)\in C([0;l];\Phi)$.

Гладкость решений уравнения (4) исследуется в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $h(t)\in L_2[0,\infty)$, $\widetilde{u}(x,\lambda)$ — решение уравнения (4). Тогда функция $u(x,t)=F^{-1}(\widetilde{u}(x,\lambda))$ удовлетворяет условиям (2).*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\widetilde{Y}(x,\lambda)=\dfrac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l}\widetilde{h}(\lambda)$. Покажем, что функция $Y(x,\lambda)=F^{-1}(\widetilde{Y}(x,\lambda))$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},\quad Y(x,0)=0,\quad Y'_x(0,t)=0,\quad Y(l,t)=h(t). \tag{9}$$

Из неравенств (6) следует неравенство

$$|\widetilde{Y}(x,\lambda)| \le \frac{2e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x}}{e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}l}}|\widetilde{h}(\lambda)|. \tag{10}$$

Так как $h(t)\in L_2[0,\infty)$, то из (10) следует, что $\widetilde{Y}(x,\lambda)$, $\lambda\widetilde{Y}(x,\lambda)\in\Phi\bigcap L_1[0,\infty)$ при $0<x<l$. Следовательно, по свойству дифференцирования образа для обратного преобразования F_1 функция $Y(x,t)$ дифференцируема по t и

$$Y'_t(x,t)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\int_0^\infty \widetilde{Y}(x,\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda\right)'_t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{Re}\int_0^\infty i\lambda\widetilde{Y}(x,\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda=F^{-1}(i\lambda\widetilde{Y}(x,\lambda)).$$

Так как $\widetilde{Y}(x,\lambda)$, $\lambda\widetilde{Y}(x,\lambda)\in L_1[0,\infty)$ при $0<x<l$, то по теореме Римана–Лебега для случая неограниченного промежутка

$$Y(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \widetilde{Y}(x,\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \to 0 \tag{11}$$

при $t\to\infty$ при каждом $x\in(0,l)$. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^\infty Y_t'(x,t)e^{-i\lambda t}\,dt = Y(x,t)e^{-i\lambda t}\,\Big|_{t=0}^{\infty} + i\lambda\int\limits_0^\infty Y(x,t)e^{-i\lambda t}\,dt = i\lambda\widetilde{Y}(x,\lambda)$$

или

$$\lim_{t\to+\infty} Y(x,t)e^{-i\lambda t} - Y(x,0) = 0. \tag{12}$$

Из равенства (12) с учетом (11) следует $Y(x,0)=0$. Пусть $0<x<l$. Вычислим вторую производную Y_{xx}''. Так как выполняется неравенство

$$|\widetilde{Y}_{xx}''(x,\lambda)e^{i\lambda t}| = \lambda\frac{|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x|}{|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l|}|\widetilde{h}(\lambda)| \le \lambda e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x-l)}|\widetilde{h}(\lambda)|$$

при всех $x\in[0,l]$, то интеграл $\int_0^\infty \lambda\widetilde{Y}(x,\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$ сходится равномерно по x на произвольном промежутке $(x-\delta,x+\delta)\subset(0,l)$ и

$$F^{-1}(\widetilde{Y}_{xx}'') = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty i\lambda\widetilde{Y}(x,\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda = \Big(F^{-1}(\widetilde{Y})\Big)_{xx}'' = Y_{xx}'' = F^{-1}(i\lambda\widetilde{Y}) = Y_t'.$$

Следовательно, функция $Y(x,t)$ удовлетворяет условиям (9).

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{Z}(x,\lambda) = \int\limits_0^l G_l(x,\xi,\lambda)g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\,d\xi.$$

Покажем, что функция $Z(x,t)=F^{-1}(\widetilde{Z}(x,\lambda))$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + f(u), \quad Z(x,0)=0, \quad Z(l,t)=0, \quad Z_x(0,t)=0. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{K}(x,\xi,\lambda) = G_l(x,\xi,\lambda)g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))$. Из неравенств (6) следует, что при всех x, $\xi\in[0,l]$, $x\ne\xi$

$$|\widetilde{K}(x,\xi,\lambda)| \le \frac{2e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}|x-\xi|}}{\sqrt{\lambda}}|g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))|.$$

Заметим, что $\widetilde{K}(x,\xi,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\widetilde{K}_{xx}'' = i\lambda\widetilde{K} \quad (\xi\ne x),$$

$$\widetilde{K}_\xi'(0,\xi,\lambda)=0; \quad \widetilde{K}(l,\xi,t)=0; \quad \widetilde{K}_x'(x,x-0,\lambda) - \widetilde{K}_x'(x,x+0,\lambda) = -g(\widetilde{u}(x,\lambda)).$$

Аналогично исследованию свойств функции $Y(x,t)$, применяя свойства прямого и обратного преобразования Фурье, убедимся, что $K(x,\xi,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \quad (\xi \neq x); \quad K(x,\xi,0) = 0; \quad K(l,\xi,t) = 0; \quad K'_x \ (0,\xi,t) = 0;$$

$$K'_x(x, x-0, t) - K'_x(x, x+0, t) = -f(u(x,t)).$$

Заметим, что $|G(x,\xi,\lambda)| \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x-\xi)}$ при $0 < \xi < x$. По теореме о среднем [16, с. 16, 17] $\int_0^l g^2(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\, d\xi = g_0^2 l$, где $g_0^2 \in \Phi$ — элемент замкнутой выпуклой оболочки значений функции $g^2(\widetilde{u}(\xi,\lambda))$ при $\xi \in [0,l]$. Следовательно, с учетом неравенства Коши–Буняковского выполняется неравенство

$$|\widetilde{Z}(x,\lambda)|^2 \leq \frac{8\, g_0^2 l}{\lambda} \int\limits_0^x \sqrt{\lambda} e^{-2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x-\xi)} d\xi = \frac{4\sqrt{2} g_0^2}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \left(1 - e^{-2\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x}\right).$$

Следовательно, существует интеграл $\int_{[0,l]\times[0,\infty)} \widetilde{K}(x,\xi,\lambda)\, d\xi\, d\lambda$, и по теореме Фубини

$$F\left(\int\limits_0^l K(x,\xi,t)\, d\xi\right) = \int\limits_0^l \widetilde{K}(x,\xi,\lambda)\, d\xi,$$

то есть

$$F^{-1}(\widetilde{Z}) = \int\limits_0^l \widetilde{K}(x,\xi,\lambda)\, dx = Z(x,t).$$

Так как $\widetilde{K}$, $\lambda\widetilde{K} \in C([0;l];\Phi)$, то существуют интегралы $\int_0^1 \widetilde{K}(x,\xi,\lambda) d\xi$, $\lambda \int_0^1 \widetilde{K}(x,\xi,\lambda) d\xi$. Так как при $x, \xi \in (0,l)$

$$\|K'_t(x,\xi+\Delta\xi,t) - K'_t(x,\xi,t)\|_{L_2[0,\infty)} = \sqrt{2}\, \|\lambda(\widetilde{K}(x,\xi+\Delta\xi,\lambda) - \widetilde{K}(x,\xi,\lambda))\|_\Phi \to 0$$

при $\Delta\xi \to 0$, то при любом $x \in (0,l)$ $K'_t(x,\xi,t) \in C([0,l] \to L_2[0,\infty))$, и существует интеграл $\int_0^l K'_t(x,\xi,t)\, d\xi$. Так как $F : L_2[0,\infty) \to \Phi$ — линейный непрерывный оператор, то

$$F\left(\int\limits_0^l K'_t(x,\xi,t)\, d\xi\right) = \int\limits_0^l F(K'_t(x,\xi,t))\, d\xi = \int\limits_0^l i\lambda\widetilde{K}(x,\xi,\lambda)\, d\xi.$$

Вычислим производные функции $Z(x,t)$:

$$Z''_{xx} = \left(\int\limits_0^l K(x,\xi,t) d\xi\right)''_{xx} = \int\limits_0^l K_{xx}(x,\xi,t)\, d\xi - f(u(x,t)) = \int\limits_0^l K'_t(x,\xi,t)\, d\xi - f(u(x,t))$$

$$= \left(\int\limits_0^l K(x,\xi,t)\, d\xi\right)'_t - f(u(x,t));$$

$$Z(x,0) = \int\limits_0^l K(x,\xi,0)\, d\xi = 0, \quad Z'_x(0,t) = \int\limits_0^l K'_x(0,\xi,t)\, d\xi = 0, \quad Z(l,t) = \int\limits_0^l K(l,\xi,t)\, d\xi = 0.$$

Таким образом, функция $Z(x,t)$ удовлетворяет условиям (13). □

Рассмотрим соответствующую задаче (2) краевую задачу для линейного параболического уравнения, т. е. задачу вычисления функции

$$v(x,t)\in C([0;l];L_2[0;\infty))\cap C^2((0;l);W_2^{1,0}[0;\infty)),$$

удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2};\quad v(x,0)=0,\quad v_x(0,t)=0,\quad v(l,t)=h(t). \tag{14}$$

Применяя к задаче (14) преобразование Фурье, убедимся, что для решения задачи выполняется равенство $\widetilde{v}(x,\lambda)=\frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l}\widetilde{h}(\lambda)$. Для норм решений линейной и нелинейной краевых задач выполняется лемма.

Лемма. *Пусть* $h_1,h_2\in L_2[0;\infty)$, $\varphi_1(t)=u_1(0,t)$, $\varphi_2(t)=u_2(0,t)$, $\psi_1(t)=v_1(0,t)$, $\psi_2(t)=v_2(0,t)$, *где* $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ *— соответствующие решения задачи* (2), $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$ *— решения задачи* (14). *Тогда выполняются неравенства*

$$e^{-4Ll}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2[0,\infty)}\le\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2[0,\infty)}\le e^{Lle^{4Ll}}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2[0,\infty)}.$$

Доказательство. Рассмотрим линейную краевую задачу для произвольного промежутка $(0;\xi)\subset(0;x)$, т. е. рассмотрим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2};\quad t\in(0;\infty),\ 0<\xi<x;\quad v(0,\xi,x)=0;\ v_\xi(t,0,x)=0,\ v(t,x,x)=H(t,x) \tag{15}$$

и соответствующую нелинейную задачу, т. е. задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+f(u);\quad \xi\in(0;x);\quad u(0,\xi,x)=0,\quad u_\xi(t,0,x)=0,\quad u(t,x.x)=H(t,x). \tag{16}$$

Обозначим решения “прямых” задач: $\Phi(x,t)=u(t,0,x)$, $\Psi(x,t)=v(t,0,x)$, где $u(t,\xi,x)$ — решение задачи (16), $v(t,\xi,x)$ — решение задачи (15). Заметим, что для образа Фурье решения линейной задачи выполняется равенство $\widetilde{\Psi}(x,\lambda)=\frac{\widetilde{H}(x,\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}$. Из равенства (4) следует

$$\frac{\widetilde{H}_1(x,\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}-\frac{\widetilde{H}_2(x,\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}=\widetilde{\Phi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}_2(x,\lambda)+$$
$$\int_0^x\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}(g(\widetilde{u}_1(\xi,x,\lambda))-g(\widetilde{u}_2(\xi,x,\lambda)))d\xi. \tag{17}$$

Далее, с учетом неравенств (6)

$$\int_0^\infty\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}(g(\widetilde{u}_1(\xi,\lambda))-g(\tilde{u}_2(\xi,\lambda)))\right|^2d\lambda$$
$$=\int_0^\infty\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}\right|^2\left|\frac{g(\widetilde{u}_1(\xi,x,\lambda)-g(\widetilde{u}_2(\xi,x,\lambda))}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi}\right|^2d\lambda$$
$$\le 4\int_0^\infty\left|\frac{g(\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\widetilde{\Psi}_1)-g(\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\widetilde{\Psi}_2)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi}\right|^2d\lambda.$$

Из полученного неравенства с учетом условия Липшица следует

$$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}(g(\widetilde{u}_1(\xi,\lambda))-g(\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)))\right|^2 d\lambda - 4L^2\int_0^\infty |\Psi_1(\xi,\lambda)-\Psi_2(\xi,\lambda)|^2\,d\lambda$$
$$\leq 4\int_0^\infty \left|\frac{1}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi}\right|^2 \left|g(\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\widetilde{\Psi}_1)-g(\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\widetilde{\Psi}_2)\right|^2 d\lambda -$$
$$4L^2\int_0^\infty \left|\frac{1}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi}\right|^2 \left|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\right|^2\left|\Psi_1(\xi,\lambda)-\Psi_2(\xi,\lambda)\right|^2 d\lambda$$
$$\leq 16\int_0^\infty \left|g(\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\widetilde{\Psi}_1)-g(\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\widetilde{\Psi}_2)\right|^2 d\lambda -$$
$$16L^2\int_0^\infty \left|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\right|^2\left|\Psi_1(\xi,\lambda)-\Psi_2(\xi,\lambda)\right|^2 d\lambda \leq 0.$$

Следовательно, для любых $x\in(0,l)$, $\xi\in(0,l)$

$$\left\|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}(g(\widetilde{u}_1(\xi,\lambda))-g(\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)))\right\|_\Phi \leq 4L\|\Psi_1(\xi,\lambda)-\Psi_2(\xi,\lambda)\|_\Phi$$

и

$$\left\|\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}(g(\widetilde{u}_1(\xi,\lambda))-g(\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)))\,d\xi\right\|_\Phi$$
$$\leq \int_0^x \left\|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}(g(\widetilde{u}_1(\xi,\lambda))-g(\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)))\right\|_\Phi d\xi \leq 4L\int_0^x \|\Psi_1(\xi,\lambda)-\Psi_2(\xi,\lambda)\|_\Phi\,d\xi.$$

Таким образом, из (17) в силу условия Липшица следует неравенство

$$\|\widetilde{\Psi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Psi}_2(x,\lambda)\|_\Phi \leq \|\widetilde{\Phi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}_2(x,\lambda)\|_\Phi + 4L\int_0^x \|\widetilde{\Psi}_1(\xi,\lambda)-\widetilde{\Psi}_2(\xi,\lambda)\|\,d\xi_\Phi. \quad (18)$$

Из (18) в силу леммы Гронуолла вытекает оценка

$$\|\widetilde{\Psi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Psi}_2(x,\lambda)\|_\Phi \leq e^{4Ll}\|\widetilde{\Phi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}_2(x,\lambda)\|_\Phi. \quad (19)$$

Полагая $x=l$,

$$\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\|_{L_2[0,\infty)} \leq e^{4Ll}\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{L_2[0,\infty)}. \quad (20)$$

Из равенства (17) следует также

$$\widetilde{\Phi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}_2(x,\lambda) = \frac{\widetilde{H}_1(x,\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x} - \frac{\widetilde{H}_2(x,\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x} - \int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}(g(\widetilde{u}_1(\xi,\lambda))-g(\widetilde{u}_2(\xi,\lambda)))\,d\xi,$$

откуда с учетом условия Липшица и неравенства (18) имеем для любого $x\in[0,l]$

$$\|\widetilde{\Phi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}_2(x,\lambda)\|_\Phi$$
$$\le \|\widetilde{\Psi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Psi}_2(x,\lambda)\|_\Phi + Le^{4Ll}\int\limits_0^x \|\widetilde{\Phi}_1(\xi,\lambda)-\widetilde{\Phi}_2(\xi,\lambda,x_0)\|_\Phi\, d\xi. \qquad (21)$$

Из неравенства (21) в силу леммы Гронуолла следует

$$\|\widetilde{\Phi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}_2(x,\lambda)\|_\Phi \le e^{Lle^{4Ll}}\|\widetilde{\Psi}_1(x,\lambda)-\widetilde{\Psi}_2(x,\lambda)\|_\Phi. \qquad (22)$$

Полагая $x = l$ и используя изометричность преобразования Фурье, получаем неравенство

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{L_2[0,\infty)} \le e^{Lle^{4Ll}}\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\|_{L_2[0,\infty)}. \qquad (23)$$

Из неравенств (20) и (23) следует утверждение леммы. □

2.2. Обратная задача для параболического уравнения

Рассмотрим граничную обратную задачу для параболического уравнения, т. е. задачу вычисления функции $h(t) \in L_2[0;\infty)$, такой, что решение задачи (2) удовлетворяет условию $u(0,t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t) \in L_2[0;\infty)$ — заданная функция. Предполагается, что для точной функции $\varphi(t)$ существует функция $h(t) \in L_2[0;\infty)$, которая переводится прямой задачей в функцию $\varphi(t)$. Наряду с нелинейной обратной задачей рассмотрим обратную задачу для линейного параболического уравнения, т. е. задачу вычисления функции $h(t) \in L_2[0;\infty)$, такой, что решение задачи (14) удовлетворяет условию $v(0,t) = \psi(t)$, где $\psi(t) \in L_2[0;\infty)$ — заданная функция. Рассмотрим множество

$$M = \{h(t) : \|h(t)\|^2_{L_2[0,\infty)} + \|h'(t)\|^2_{L_2[0,\infty)} \le r^2\}.$$

Предположим, что для заданной функции $\varphi(t) \in L_2[0;\infty)$ существует точное решение $h(t)$ нелинейной обратной задачи (2), принадлежащее множеству M, но значения функции $\varphi(t)$ нам не известны, а известна функция $\varphi_\delta \in L_2[0;\infty)$, такая, что $\|\varphi-\varphi_\delta\| \le \delta$. Требуется определить приближенное решение h_δ граничной обратной задачи и оценить его уклонение от точного решения. Рассмотрим величины:

$$\omega(M,\delta) = \sup\{\|h_1-h_2\| \colon h_1,h_2\in M, \|\varphi_1-\varphi_2\|\le\delta\},$$

т. е. модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи;

$$\hat{\omega}(M,\delta) = \sup\{\|h_1-h_2\| \colon h_1,h_2\in M, \|\psi_1-\psi_2\|\le\delta\},$$

т. е. модуль непрерывности для линейной обратной задачи.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Существует $\delta_0 > 0$, такое, что для всех $0<\delta<\delta_0$ выполняются неравенства*

$$\hat{\omega}(M, e^{-4Ll}\delta) \le \omega(M,\delta) \le \hat{\omega}(M, e^{Lle^{4Ll}}\delta).$$

Доказательство. Пусть $h_1, h_2 \in M$. Используя неравенства, полученные в лемме, оценим величину $\omega(M,\delta)$. Оценим величину $\omega(M,\delta)$ снизу. Запишем неравенство (23):

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2[0,\infty)} \le e^{Lle^{4Ll}}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2[0,\infty)},$$

то есть из условий $h_1, h_2 \in M$, $\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2[0,\infty)} \le \delta_1$ вытекает $\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2[0,\infty)} \le \delta$, где $\delta_1 = e^{-Lle^{4Ll}}\delta$. Следовательно, по определению модуля непрерывности $\omega(M,\delta) \ge \hat{\omega}(M, e^{-Lle^{4Ll}}\delta)$. Оценим величину $\omega(M,\delta)$ сверху. Запишем неравенство (20):

$$\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2[0,\infty)} \le e^{4Ll}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2[0,\infty)}.$$

Обозначим $\delta_2 = e^{4Ll}\delta$. С учетом последнего неравенства из условий $h_1, h_2 \in M$ и $\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2[0,\infty)} \le \delta$ вытекает $\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2[0,\infty)} \le \delta_2$. Следовательно, по определению модуля непрерывности $\omega(M,\delta) \le \hat{\omega}(M, e^{4Ll}\delta)$. □

3. Метод вспомогательных граничных условий

Рассмотрим задачу с малым параметром — задачу восстановления функции $h_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(l,t)$, где $u_\varepsilon(x,t) \in C([0;l]; L_2[0;\infty)) \cap C^2((0;l); W_2^{1,0}[0;\infty))$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + f(u_\varepsilon), \quad u_\varepsilon(x,0)=0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(0,t)=0; \quad u_\varepsilon(0,t)+\varepsilon u_\varepsilon(l,t)=\varphi(t). \tag{24}$$

В качестве приближенного решения задачи (1) будем рассматривать элемент $h_\delta(t) = u_\delta^\varepsilon(l,t)$, где $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ — решение задачи (24) с приближенно заданным условием $\varphi_\delta(t)$ при подходящем выборе зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$. Применяя к задаче (24) преобразование Фурье по t, получим задачу для нелинейного уравнения:

$$\frac{d^2\widetilde{u}_\varepsilon}{dx^2} = i\lambda\widetilde{u}_\varepsilon - g(\widetilde{u}_\varepsilon), \quad \frac{d\widetilde{u}_\varepsilon}{dx}(0,\lambda)=0; \quad \widetilde{u}_\varepsilon(0,\lambda)+\varepsilon\widetilde{u}_\varepsilon(l,\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda). \tag{25}$$

Решение задачи (24) удовлетворяет равенству

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda) = \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x\widetilde{u}_\varepsilon(0,\lambda) - \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}} g(\widetilde{u}_\epsilon)\,d\xi. \tag{26}$$

Из (26) и граничного условия

$$\widetilde{u}_\varepsilon(0,\lambda) + \varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l\widetilde{u}_\varepsilon(0,\lambda) - \varepsilon\int_0^l \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}} g(\widetilde{u}_\epsilon)\,d\xi = \varphi(\lambda),$$

$$\widetilde{u}_\varepsilon(0,\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l} + \varepsilon\int\limits_0^l \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)} g(\widetilde{u}_\varepsilon)\,d\xi. \tag{27}$$

Из (26) и (27) следует

$$\widetilde{u}_\varepsilon(l,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l\varphi(\lambda)}{1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l} - \int\limits_0^l \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)} g(\widetilde{u}_\varepsilon)\,d\xi. \tag{28}$$

Рассмотрим задачу, аналогичную (25), на произвольном отрезке $0<\zeta<x<l$ с приближенно заданным условием $\widetilde{\varphi}_\delta(\lambda)$, т. е. рассмотрим задачу:

$$\frac{d^2\widetilde{u}_\delta^\varepsilon}{d\zeta^2} = i\lambda\widetilde{u}_\delta^\varepsilon - g(\widetilde{u}_\delta^\varepsilon), \quad \frac{d\widetilde{u}_\delta^\varepsilon}{dx}(0,\lambda) = 0; \quad \widetilde{u}_\delta^\varepsilon(0,\lambda) + \varepsilon\widetilde{u}_\delta^\varepsilon(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}_\delta(\lambda). \tag{29}$$

Выполняя преобразования, аналогичные (25)–(28), убедимся, что решение задачи (29) удовлетворяет равенству

$$\widetilde{u}_\delta^\varepsilon(x,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x\widetilde{\varphi}_\delta(\lambda)}{1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x} - \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x)} g(\widetilde{u}_\delta^\varepsilon)\,d\xi. \tag{30}$$

Из равенства (4) следует

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l}\widetilde{u}_\varepsilon(l,\lambda) + \int\limits_0^l G_l(x,\xi,\lambda)(g(\widetilde{u}_\varepsilon(\xi,\lambda)))\,d\xi. \tag{31}$$

Подставим выражение (28) в (31). Имеем равенство

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l}\widetilde{\varphi}(\lambda) + \int\limits_0^l K_\varepsilon(x,\xi,\lambda)g(\widetilde{u}_\varepsilon(\xi,\lambda))\,d\xi. \tag{32}$$

Здесь $K_\varepsilon(x,\xi,\lambda) = G(x,\xi,\lambda) + \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(\xi-l)\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)}$. Вычислим значения $K_\varepsilon(x,\xi,\lambda)$ при $0 \le \xi \le x \le l$. С учетом определения $G(x,\xi,\lambda)$

$$K_\varepsilon(x,\xi,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-x)(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)} - \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)}.$$

Преобразуем сумму в числителе

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-x) - \operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x \\
&\qquad = \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi(\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}l\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x - \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}x) - \\
&\qquad\quad \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(-\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}x\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi + \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi) \\
&\qquad = \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(\xi-x).
\end{aligned}$$

Из полученного равенства

$$K_\varepsilon(x,\xi,\lambda) = \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(\xi-x)}{\mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)} + \varepsilon\frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-x)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)}.$$

Вычислим значения $K_\varepsilon(x,\xi,\lambda)$ при $0 \le x \le \xi \le l$. Из определения $G(x,\xi,\lambda)$ следует

$$K_\varepsilon(x,\xi,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)} - \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)}.$$

Приводя в числителе дроби подобные слагаемые, убеждаемся, что при $0 \le x \le \xi \le l$

$$K_\varepsilon(x,\xi,\lambda) = \varepsilon\frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)}.$$

Таким образом, задача (25) сводится к интегральному уравнению

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l}\widetilde{\varphi}(\lambda) + \int\limits_0^l K_\varepsilon(x,\xi,\lambda)g(\widetilde{u}_\varepsilon(\xi,\lambda))\,d\xi, \tag{33}$$

$$K_\varepsilon(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{w_\varepsilon(l,\lambda)}\begin{cases} -\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(\xi-l), \ 0\le x\le\xi\le l, \\ \operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(\xi-x) - \varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}\xi\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-l), \ 0\le\xi\le x\le l, \end{cases}$$

где $w_\varepsilon(l.\lambda) = \mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l)$, $\mu_0 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. Выполняется

Теорема 5. *Пусть отображение $g:\Phi\to\Phi$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, такой, что $\sqrt{2}Ll^2(1+\varepsilon) < 1$. Тогда уравнение* (33) *имеет решение $\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda)\in C([0;l];\Phi)$ для любой функции $\widetilde{\varphi}(\lambda)\in\Phi$.*

Доказательство теоремы может быть получено стандартным способом с применением принципа сжимающих отображений.

Теорема 6. *Пусть $\varphi(t)\in L_2[0,\infty)$, $\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda)$ — решение уравнения* (33). *Тогда функция $u_\varepsilon(x,t) = F^{-1}(\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda))$ удовлетворяет условиям* (24).

Доказательство теоремы может быть получено с помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 3.

4. Оценка погрешности метода вспомогательных граничных условий

Пусть $h(t)$ — точное решение задачи (1). В качестве характеристики точности приближенного решения задачи (1), вычисленного с помощью метода вспомогательных граничных условий, на классе M рассмотрим величину $\Delta = \sup\{\|h_\delta^\varepsilon - h\| : h\in M; \|\varphi-\varphi_\delta\|\le\delta\}$. Здесь зависимость ε от δ выбирается по схеме М.М. Лаврентьева. Используем очевидную оценку

$$\Delta \le \Delta_1 + \Delta_2,$$

где $\Delta_2 = \sup_{\|\varphi-\varphi_\delta\|\le\delta}\|h_\delta^\varepsilon - h^\varepsilon\|$, $\Delta_1 = \sup_{h\in M}\|h_\varepsilon - h\|$. Здесь h_ε — решение вспомогательной задачи (24) при точно заданном граничном условии, h_ε^δ — решение вспомогательной задачи (24) с приближенно заданным граничным условием.

Оценим величину Δ_2. Решения вспомогательной задачи удовлетворяют условию (30). Из равенства (30) следует при всех $x\in[0,l]$

$$\|\widetilde{u}_\delta^\varepsilon(x,\lambda)\|_\Phi \le \sup_{\lambda\ge0}\frac{|\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x|\,\|\varphi_\delta(\lambda)\|_\Phi}{|1+\epsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x|} + L\int\limits_0^x \sup_{\lambda>0}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)|}{\sqrt{\lambda}|1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x|}\|\widetilde{u}_\delta^\epsilon\|_\Phi\,d\xi. \tag{34}$$

Рассмотрим уравнение $|1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x| = 0$. Используя запись комплексных чисел в алгебраической форме, получаем систему:

$$\begin{cases} 1+\varepsilon\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}}x\cos\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}}x = 0, \\ \varepsilon\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}}x\sin\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}}x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x = \pi m$, $m = 1, 2 \ldots$. При $m = 2l$

$$1 + \varepsilon \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x \cos \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x = 1 + \varepsilon \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x > 0,$$

и первое уравнение не обращается в верное равенство. Пусть $m = 2l + 1$, тогда первое уравнение обращается в верное равенство при условии $\varepsilon = \varepsilon_m = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l+1)}$. Рассмотрим интервалы $(\varepsilon_{2l+1}; \varepsilon_{2l-1})$. Обозначим

$$d_l = |\varepsilon_{2l-1} - \varepsilon_{2l+1}| = \left|\frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l-1)} - \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l+1)}\right|.$$

Пусть $\varepsilon \neq \varepsilon_l$, $\frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l+1)} + \frac{d_l}{4} < \varepsilon < \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l-1)} - \frac{d_l}{4}$. Оценим снизу длину интервала, записав ее в виде $d_l = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l-1)}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} \pi(2l-1)}{\operatorname{ch} \pi(2l+1)}\right)$. Так как $\frac{\operatorname{ch} \pi(2l-1)}{\operatorname{ch} \pi(2l+1)} < \frac{2e^{\pi(2l-1)}}{e^{\pi(2l+1)}} < \frac{2}{e^{2\pi}}$, то для длины интервала получаем оценку $d_l \geq \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l-1)}\left(1 - \frac{2}{e^{2\pi})}\right)$. Следовательно, так как $\frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l+1)} + \frac{d_l}{4} < \varepsilon < \frac{1}{\operatorname{ch} \pi(2l-1)} - \frac{d_l}{4}$; $|\varepsilon - \varepsilon_l| \geq \frac{d_l}{4}$, то $|\varepsilon - \varepsilon_l| \geq \left(\varepsilon + \frac{d_l}{4}\right)\left(1 - \frac{2}{e^{2\pi}}\right)$. Выполняя элементарные преобразования, с учетом полученной оценки длины интервала получаем неравенство

$$|\varepsilon - \varepsilon_l| \geq \frac{\varepsilon(e^{2\pi} - 2)}{3e^{2\pi} + 2} = C\varepsilon, \tag{35}$$

где $C = \frac{e^{2\pi} - 2}{3e^{2\pi} + 2}$. Пусть $0 < x_0 \leq x < l$. Оценим дробь $F_{x_0}(x, \lambda) = \frac{|\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x_0|}{|1 + \varepsilon \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x|}$. Для знаменателя дроби с учетом неравенства (35) имеем оценку

$$|1 + \varepsilon \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x| = |\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x| \left|\frac{1}{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x} + \varepsilon\right| \geq |\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x|\, |\varepsilon - \varepsilon_l| \geq C\varepsilon |\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x|. \tag{36}$$

Рассмотрим множества

$$D_1 = \left\{\lambda > 0 : e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x} \leq \frac{1}{2\varepsilon}\right\}; \qquad D_2 = \left\{\lambda > 0 : e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x} > \frac{1}{2\varepsilon}\right\}. \tag{37}$$

Оценим сверху $F_{x_0}(x, \lambda)$ при $x \in [0, l]$ на множестве D_1. Воспользуемся неравенством

$$|1 + \varepsilon \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x| \geq 1 - |\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x| \geq \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Так как

$$|\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\lambda} x_0| \leq \left(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x}\right)^{\frac{x_0}{x}} \leq \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^{\frac{x_0}{x}}, \tag{39}$$

то из оценки (38) следует неравенство

$$F_{x_0}(x, \lambda) \leq 2(2\varepsilon)^{\frac{-x_0}{x}}. \tag{40}$$

Оценим сверху $F_{x_0}(x, \lambda)$ при $x \in [0, l]$ на множестве D_2. В силу (36)

$$F_{x_0}(x,\lambda) \le \frac{2}{C\varepsilon e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x-x_0)}}. \tag{41}$$

Так как $e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x-x_0)} \ge (2\varepsilon)^{\frac{x_0}{x}-1}$, то из неравенства (41) следует, что $F_{x_0}(x,\lambda) \le \frac{2}{C}(2\varepsilon)^{\frac{x_0}{x}-1}$ при $\lambda \in D_2$. Следовательно, для всех $\lambda \ge 0$

$$F_{x_0}(x,\lambda) \le \frac{2}{C}(2\varepsilon)^{-\gamma(x_0,x)}, \tag{42}$$

где $\gamma(x_0,x) = \begin{cases} 1-\frac{x_0}{x},\ x_0 \le \frac{x}{2}, \\ \frac{x_0}{x},\ x_0 > \frac{x}{2}. \end{cases}$ Из (34) и (42) следует для любого $x \in (0,l)$

$$\|\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x,\lambda)\|_{\Phi} \le \frac{2}{C\varepsilon}\|\varphi_{\delta}(\lambda)\|_{\Phi} + L\int\limits_0^x \frac{2}{C}(2\varepsilon)^{-\gamma(x-\xi,x)}\|\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\delta}(\xi,\lambda)\|_{\Phi}\,d\xi. \tag{43}$$

Так как $\gamma(x-\xi,x) = 1-\gamma(\xi,x)$, из неравенства (43) следует

$$\frac{C\varepsilon}{2}\|\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x,\lambda)\|_{\Phi} \le \|\varphi_{\delta}(\lambda)\|_{\Phi} + L\frac{2}{C}\int\limits_0^x (2\varepsilon)^{-\gamma(\xi,x)}\|\widetilde{u}^{\epsilon}_{\delta}(\xi,\lambda)\|_{\Phi}\,d\xi. \tag{44}$$

Рассмотрим функцию $z^{\varepsilon}_{\delta}(\xi,\lambda) = \frac{2}{C}(2\varepsilon)^{-\gamma\xi(\xi,x)}\widetilde{u}^{\epsilon}_{\delta}(\xi,\lambda)$. Неравенство (44) запишем в виде

$$\|z^{\varepsilon}_{\delta}(x,\lambda)\|_{\Phi} \le \|\varphi_{\delta}(\lambda)\|_{\Phi} + L\int\limits_0^x \|z^{\varepsilon}_{\delta}(\xi,\lambda)\|_{\Phi}\,d\xi. \tag{45}$$

Из неравенства (45) в силу леммы Гроноулла следует $\|z^{\varepsilon}_{\delta}(x,\lambda)\|_{\Phi} \le e^{Ll}\|\varphi_{\delta}(\lambda)\|_{\Phi}$. Таким образом, для любого $x \in (0,l)$

$$\|\widetilde{u}^{\varepsilon}_{\delta}(x,\lambda)\|_{\Phi} \le \frac{Ce^{Ll}}{2\varepsilon}\|\varphi_{\delta}(\lambda)\|_{\Phi} \le \frac{e^{Ll}}{2\varepsilon}\|\varphi_{\delta}(\lambda)\|_{\Phi}. \tag{46}$$

Из (46) следует оценка

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta) \le \frac{e^{Ll}}{2\varepsilon}\delta. \tag{47}$$

Оценим величину $\Delta_1(\varepsilon)$. Из уравнения (4) при $x=0$ следует равенство

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \frac{\widetilde{h}(\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l} + \int\limits_0^l \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l}g(\widetilde{u})\,d\xi.$$

Следовательно,

$$\widetilde{u}(l,\lambda) = \widetilde{h}(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda)\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}l + \int\limits_0^l \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(l-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}}g(\widetilde{u})\,d\xi.$$

Аналогично, рассматривая краевую задачу для произвольного отрезка $[0,x] \subset [0,l]$, убедимся, что решение задачи (1) удовлетворяет условию

$$\widetilde{u}(x,\lambda) = \operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x\widetilde{\varphi}(\lambda) + \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}} g(\widetilde{u})\,d\xi. \tag{48}$$

Из равенства (48) следует

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \frac{\widetilde{u}(x,\lambda)}{\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x} - \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x} g(\widetilde{u}(\xi,\lambda))\,d\xi. \tag{49}$$

С учетом равенства (49) запишем равенство (30) в виде

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda) = \frac{\widetilde{u}(x,\lambda)}{1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x} + \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x)} g((\widetilde{u}_\varepsilon-\widetilde{u})(\xi,\lambda))\,d\xi. \tag{50}$$

Следовательно, с учетом определения класса корректности, для любого $x\in(0,l)$

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda)-\widetilde{u}(x,\lambda)\|_\Phi \le r\sup_{\lambda>0}\left|\frac{\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x)\sqrt{1+\lambda^2}}\right| +$$
$$L\int\limits_0^x \sup_{\lambda>0}\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x)}\right| \|(\widetilde{u}_\varepsilon-\widetilde{u})(\xi,\lambda)\|_\Phi\,d\xi. \tag{51}$$

При каждом $x\in(0,l)$ оценим дробь $P(x,\lambda) = \left|\frac{\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x}{(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x)\sqrt{1+\lambda^2}}\right|$. Рассмотрим определенные равенствами (37) множества D_1, D_2. Пусть $\varepsilon<1$. Оценим $P(x,\lambda)$ на множестве D_1. Так как $\frac{1}{2}\le P(x,0)=\frac{1}{1+\varepsilon}$, то найдется $0<\lambda_0<1$, такое, что $\frac{1}{2}\le P(x,\lambda)\le 1$ при $0<\lambda<\lambda_0$. При $\lambda\in D_1\backslash[0;\lambda_0]$ выполняется неравенство $P(x,\lambda)\le \frac{2e^{\sqrt{\lambda/2}\,x}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \le \frac{2e^{\sqrt{\lambda/2}\,x}}{\lambda}$. Вычисляя наибольшее значение функции $y_x(\lambda)=\frac{2e^{\sqrt{\lambda/2}\,x}}{\lambda}$ на промежутке $D_1\setminus[0;\lambda_0]$, находим, что при $\lambda\in D_1\setminus[0;\lambda_0]$ $P(x,\lambda)\le\frac{x^2}{2\varepsilon(\ln 2\varepsilon)^2}$. Для значений $\lambda\in D_2$ в силу неравенства (36) $P(x,\lambda)\le\frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+\lambda^2}}\le\frac{x^2}{2\varepsilon(\ln 2\varepsilon)^2}$. Следовательно, при всех $\lambda>0$

$$P(x,\lambda)\le\frac{x^2}{2\varepsilon(\ln 2\varepsilon)^2}. \tag{52}$$

Так как, аналогично (42), $\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0\sqrt{\lambda}(x-\xi)}{\mu_0\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon\operatorname{ch}\mu_0\sqrt{\lambda}x)}\right| \le \frac{2}{C}(2\varepsilon)^{-\gamma(x-\xi,x)}$, с учетом неравенства (52) из (51) следует для любого $x\in(0,l)$

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda)-\widetilde{u}(x,\lambda)\|_\Phi \le r\frac{l^2}{(2\ln 2\varepsilon)^2} + L\int\limits_0^x \frac{2}{C}(2\varepsilon)^{-\gamma(x-\xi,x)}\|(\widetilde{u}_\varepsilon-\widetilde{u})(\xi,\lambda)\|_\Phi\,d\xi. \tag{53}$$

Рассмотрим функцию

$$y_\varepsilon(x,\xi,\lambda) = \frac{2}{C}(\varepsilon)^{\gamma(\xi,x)}(\widetilde{u}_\varepsilon-\widetilde{u})(\xi,\lambda).$$

Из (53) следует, что функция $y_\varepsilon(x,\xi,\lambda)$ удовлетворяет неравенству при $0\le x\le l$

$$\|y_\varepsilon(x,x,\lambda)\|_\Phi \le r\frac{l^2\varepsilon}{2(\ln 2\varepsilon)^2} + L\int\limits_0^x \|y_\varepsilon(x,\xi,\lambda)\|_\Phi\, d\xi. \tag{54}$$

Из (54) в силу леммы Гронуолла

$$\|y_\varepsilon(x,x,\lambda)\|_\Phi \le re^{Ll}\frac{l^2}{2\ln 2(\varepsilon)^2}.$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon(x,\lambda) - \widetilde{u}(x,\lambda)\|_\Phi \le re^{Ll}\frac{Cl^2}{4(\ln 2\varepsilon)^2} \le re^{Ll}\frac{l^2}{4(\ln 2\varepsilon)^2}. \tag{55}$$

Из неравенства (55) следует

$$\Delta_1(\varepsilon) \le re^{Ll}\frac{l^2}{4(\ln 2\varepsilon)^2}. \tag{56}$$

Выберем зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ из условий

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = r\frac{l^2}{2(\ln 2\varepsilon)^2}, \quad |\varepsilon - \varepsilon_l| > C\varepsilon. \tag{57}$$

Следовательно, $\ln\varepsilon(\delta) \simeq \ln\delta$ при $\delta \to 0$. При таком выборе параметра регуляризации из полученной оценки для $\Delta(\varepsilon(\delta),\delta)$ следует, что существуют числа $C_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, такие, что для всех $\delta < \delta_1$, таких, что для соответствующих значений ε, удовлетворяющих условиям (57), справедлива оценка

$$\Delta(\varepsilon(\delta),\delta) \le \frac{C_1}{\ln^2\delta}. \tag{58}$$

Модуль непрерывности для линейной граничной обратной задачи может быть вычислен по схеме, предложенной в [1], он также имеет логарифмический порядок [11, 13]. Из (58) с учетом полученной оценки погрешности оптимального метода решения обратной граничной задачи на множестве M следует теорема.

Теорема 7. *Метод вспомогательных граничных условий оптимален по порядку на множестве M.*

5. Численное решение обратной граничной задачи

Приведем результат численного решения задачи (1) с нелинейностью $f(u) = \dfrac{u^2}{1+|u|}$.

Для вычисления приближенного решения неустойчивой задачи (1) методом вспомогательных граничных условий численно решалась регуляризованная задача (24). Уравнение (24) заменялось дискретным аналогом с помощью линейной неявной разностной схемы [17]

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f(u_i^n).$$

Граничные и начальные условия также заменялись разностным аналогом $u_i^1 = 0$; $u_1^n = 0$; $\dfrac{u_2^n - u_1^n}{h} + \varepsilon u_N^n = \varphi_n$ $(i, n = 1, \dots, N)$.

Полученная система линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей решалась методом Гаусса. Для проведения численного эксперимента была написана программа в MATLAB. В приводимом примере использована равномерная сетка с шагом $h = 0.1$ по переменной x и с шагом $\tau = 0.1$ по переменной t. Для сравнения на модельных примерах полученного приближенного решения обратной задачи с точным решением предварительно строилось численное решение "прямой" задачи (2) с заданным граничным условием, и результат решения "прямой" задачи (вектор значений производной $\varphi_n = u'_x(0, t_n)$ в точках сетки) использовался в качестве исходных данных при решении обратной задачи. На рисунке представлен результат численного решения граничной обратной задачи в случае исходных данных со случайными возмущениями (1 — график точного решения, 2 — график приближенного решения). Случайная погрешность в исходные данные для обратной задачи вносилась с помощью датчика случайных чисел (в приводимом примере значение параметра регуляризации $\varepsilon = 0.001$; уровень погрешности $\delta \le 0.01$).

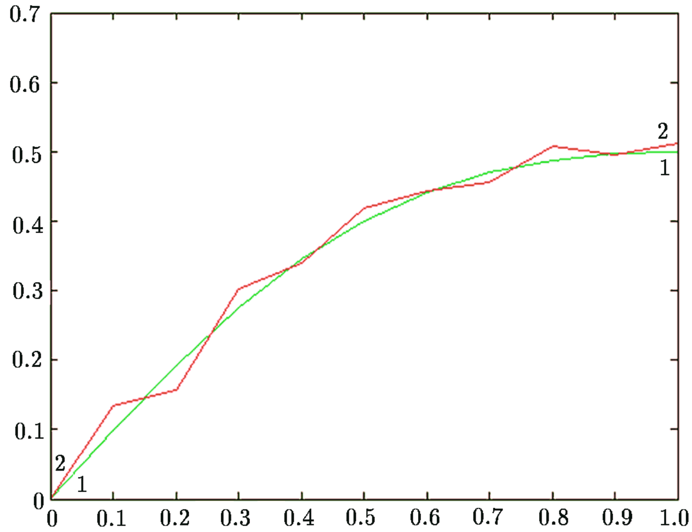

Рис.

Литература

1. **Иванов В.К., Королюк Т.И.** Об оценке погрешности при решении линейных некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 1. — С. 30–41; Перевод: Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9,№ 1. — P. 35–49.

2. **Страхов В.Н.** О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифф. уравнения. — 1970. — Т. 6, № 8. — С. 1490–1495.

3. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978 Перевод: Ivanov V.K., VasinV.V., Tanana V.P. // Theory of linear ill-posed problem and its applications. — VSP, 2002.
4. **Табаринцева Е.В.** Об оценке модуля непрерывности для нелинейной обратной задачи // Тр. ИММ УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 1. — С. 251–257; Перевод: Tabarintseva E.V., On an estimate for the modulus of continuity of a nonlinear inverse problem // Ural Math. J. — 2015. — Vol. 1. — P. 87–92.
5. **Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.** Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.
6. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Наука, 1993; Перевод: Vasin V.V, Ageev A.L. Inverse and Ill-posed problems with a priori information. — VSP, 1995.
7. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.
8. **Кокурин М.Ю.** Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. — Йошкар-Ола: Изд-во Марийского госуниверситета, 1998.
9. **Танана В.П.** Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1976. — Т. 39, № 5. — С. 503–507.
10. **Танана В.П., Табаринцева Е.В.** О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 2. — С. 221–228.
11. **Танана, В.П., Табаринцева Е.В.** Об одном подходе к приближению разрывного решения некорректно поставленной задачи // Сиб. журн. индустр. математики. — 2005. — Т. 8, № 1 (21). — С. 130–142; Перевод: Tanana V.P., Tabarintseva E.V. On an approximation method of a discontinuous solutions of an ill-posed problem // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2007. — Vol. 1, № 1. — P. 116–126.
12. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
13. **Танана В.П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. математики. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.
14. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
15. **Виленкин Н.Я.** Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
16. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
17. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. — М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 14 апреля 2017 г.,
в окончательном варианте 22 декабря 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Ivanov V.K., Korolyuk T.I.** Ob otsenke pogreshnosti pri reshenii lineynyh nekorrektnyh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1969. — T. 9, № 1. — C. 30–41; Perevod: Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9,№ 1. — P. 35–49.
2. **Strahov V.N.** O reshenii lineynyh nekorrektnyh zadach v gil'bertovom prostranstve // Diff. uravneniya. — 1970. — T. 6, № 8. — C. 1490–1495.

3. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Teoriya lineynyh nekorrektno postavlennyh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978; Perevod: Ivanov V.K., VasinV.V., Tanana V.P. // Theory of linear ill-posed problem and its applications. — VSP, 2002.
4. **Tabarintseva E.V.** Ob otsenke modulya nepreryvnosti dlya nelineynoy obratnoy zadachi // Tr. IMM UrO RAN. — 2013. — T. 19, № 1. — C. 251–257; Perevod: Tabarintseva E.V., On an estimate for the modulus of continuity of a nonlinear inverse problem // Ural Math. J. — 2015. — Vol. 1. — P. 87–92.
5. **Ivanov V.K., Mel'nikova I.V., Filinkov A.I.** Differentsial'no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi. — M.: Nauka, 1995.
6. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Nekorrektnye zadachi s apriornoy informatsiey.—Ekaterinburg: Nauka, 1993; Perevod: Vasin V.V, Ageev A.L. Inverse and Ill-posed problems with a priori information.— VSP, 1995.
7. **Tihonov A.N., Leonov A.S., YAgola A.G.** Nelineynye nekorrektnye zadachi. — M.: Nauka, 1995.
8. **Kokurin M.Yu.** Operatornaya regulyarizatsiya i issledovanie nelineynyh monotonnyh zadach.— Yoshkar-Ola: Izd-vo Mariyskogo gosuniversiteta, 1998.
9. **Tanana V.P.** Optimal'nye po poryadku metody resheniya nelineynyh nekorrektno postavlennyh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1976. — T. 39, № 5. — C. 503–507.
10. **Tanana V.P., Tabarintseva E.V.** O metode priblizheniya kusochno-nepreryvnyh resheniy nelineynyh obratnyh zadach // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie.—Novosibirsk, 2007. — T. 10, № 2. — C. 221–228.
11. **Tanana, V.P., Tabarintseva E.V.** Ob odnom podhode k priblizheniyu razryvnogo resheniya nekorrektno postavlennoy zadachi // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2005. — T. 8, № 1 (21). — S. 130–142; Perevod: Tanana V.P., Tabarintseva E.V. On an approximation method of a discontinuous solutions of an ill-posed problem // J. of Applied and Industrial Mathematics. — 2007. — Vol. 1, № 1. — P. 116–126.
12. **Kabanihin S.I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi.—Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009.
13. **Tanana V.P.** Ob optimal'nosti po poryadku metoda proektsionnoy regulyarizatsii pri reshenii obratnyh zadach // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2004. — T. 7, № 2. — C. 117–132.
14. **Alifanov O.M., Artyuhin E.A., Rumyantsev S.V.** Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnyh zadach. — M.: Nauka, 1988.
15. **Vilenkin N.YA.** Spetsial'nye funktsii i teoriya predstavleniy grupp. — M.: Nauka, 1965.
16. **Kreyn S.G.** Lineynye differentsial'nye uravneniya v banahovom prostranstve.—M.: Nauka, 1967.
17. **Samarskiy A.A., Gulin A.V.** Chislennye metody. — M.: Nauka, 1989.