ПМТФ, № 1, 1963

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. М. Елеонский, В. М. Жданов

(*Свердловск*)

Последовательный кинетический подход к решению задачи о поведении ионизованного газа во внешнем поле, рассмотренный Б. И. Давыдовым [1] и развитый в работах В. Л. Гинзбурга и А. В. Гуревича [2], приводит к необходимости анализа цепочки связанных кинетических уравнений для парциальных функций распределения $f_{(k)}$, возникающих при разложении вида

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_0 + \frac{v_\alpha}{v} f_\alpha^{(1)} + \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} f_{\alpha\beta}^{(2)} + \ldots \tag{1}$$

В общем случае анализ такой системы сложен.

В рассматриваемом ниже приближении, которое является по существу обобщением метода моментов, кинетический подход используется для определения функции распределения основного состояния f_0, а отклонения от основного состояния исследуются в гидродинамическом приближении. В методе моментов решение кинетического уравнения ищется, как известно, в виде разложения по тензорным полиномам, построенным на фундаментальной последовательности тензоров 1, v_α v_α, v_β, $v_\alpha v_\beta v_\gamma$,..., причем за основное состояние принимается обычно либо стационарное решение при нулевом внешнем поле (т. е. решение, обращающее в нуль интеграл столкновений), либо решение бесстолкновительного кинетического уравнения [3-4]. При этом структура разложения и тип полиномов однозначно определяются процессом ортогонализации фундаментальной последовательности с весовой функцией, определяемой видом функции распределения основного состояния. Примером может служить разложение по тензорным полиномам Эрмита, возникающее, когда за основное состояние принимается максвелловская функция распределения [3].

В настоящем сообщении в основу рассмотрения положено разложение вида

$$f = \left\{1 + a_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha} + a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} + a_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^3}{\partial v_\alpha \partial v_\beta \partial v_\gamma} + \ldots\right\} f_0 \tag{2}$$

Коэффициенты этого разложения выражаются через моменты функции распределения, причем первые моменты соответствуют плотности, средней скорости, тензору напряжений и тепловому потоку частиц. Удержание лишь первых нескольких моментов в разложении соответствует фактически гидродинамическому приближению при решении кинетического уравнения, так как указанные выше переменные определяют гидродинамическое поведение системы. Моменты удовлетворяют замкнутой системе уравнений, в которые, помимо гидродинамических переменных, входят времена релаксации этих переменных, определенные на функции распределения основного состояния f_0. Для последней находится уравнение, являющееся прямым следствием исходного кинетического уравнения и принятой формы разложения для f. При этом система уравнений для моментов и уравнение для f_0 являются самосогласованными, ибо не только времена релаксации определены на функции основного состояния, но и сама функция распределения f_0 выражается через гидродинамические переменные системы.

Такой подход к решению кинетического уравнения позволяет развить последовательное гидродинамическое приближение для ионизованного газа, находящегося в сильном внешнем поле, когда функция распределения основного состояния может быть отличной от максвелловской.

Будем предполагать, что функция распределения основного состояния зависит только от модуля скорости частиц. Ограничимся в разложении (2) конечным числом членов, положив $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ и сохранив для $a_{\alpha\beta\gamma}$ только свернутые по двум индексам компоненты тензора. Выполняя при этих условиях ортогонализацию разложения (2), находим, что

$$f=\left\{1-u_\alpha\frac{\partial}{\partial v_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial v_\alpha\partial v_\beta}-\frac{1}{5}\frac{h_\alpha}{\rho}\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\Delta\right\}f_0 \tag{3}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, а плотность ρ, средняя скорость $\mathbf{u}$, недиагональная часть тензора напряжения $\pi_{\alpha\beta}$ и относительный тепловой поток $\mathbf{h}$ определены соотношениями

$$\rho=m\int f d\mathbf{v}=m\int f_0 d\mathbf{v},\qquad \rho\mathbf{u}=m\int \mathbf{v}f d\mathbf{v}\qquad (m\text{ — масса частицы})$$

$$\pi_{\alpha\beta}=m\int\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}\right)f d\mathbf{v}=P_{\alpha\beta}-p\delta_{\alpha\beta} \tag{4}$$

$$\mathbf{h}=\mathbf{q}-\frac{5}{2}p\mathbf{u},\qquad \mathbf{q}=\frac{1}{2}m\int \mathbf{v}v^2 f d\mathbf{v},\qquad p=\frac{1}{3}m\int v^2 f_0 d\mathbf{v}$$

Нетрудно убедиться, что если f_0 является максвелловской функцией распределения, то (3) тождественно известному разложению функции распределения в методе моментов, а именно «13-моментному» разложению Грэда [3]. Рассмотрим кинетическое уравнение для электронов в частично ионизованном газе в пренебрежении электрон-электронными столкновениями (влияние последних будет обсуждено позже)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\frac{e}{m}\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}=\iint(f'F'-fF)\,g\sigma(g,\chi)\,d\Omega\,d\mathbf{V} \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — внешнее электрическое поле, $g=|\mathbf{v}-\mathbf{V}|$ — относительная скорость, $\sigma(g,\chi)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния, $F(\mathbf{V})$ — функция распределения тяжелых частиц (молекул или ионов). Интегрирование в (5) проводится по скоростям тяжелых частиц $d\mathbf{V}$ и по углам рассеяния $d\Omega=\sin\chi d\chi d\varepsilon$. Рассмотрим только упругие соударения.

Для электрон-ионных взаимодействий можно использовать фоккер-планковское приближение для интеграла столкновений. В этом случае правая часть (5) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left\{D_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial v_\beta}+A_\alpha\right\}f \tag{6}$$

Здесь $D_{\alpha\beta}(v)$ — фоккер-планковский коэффициент диффузии, $A_\alpha(v)$ — коэффициент динамического трения. Структура этих коэффициентов может быть установлена на основании достаточно общих соображений. Действительно коэффициент диффузии является тензором второго ранга и в предположении однородности и изотропности системы имеет вид $D_{\alpha\beta}(v)=B(v)v^2\delta_{\alpha\beta}-C(v)v_\alpha v_\beta$, где B и C — функции модуля скорости. Аналогично при тех же предположениях найдем $A_\alpha=G(v)v_\alpha$. При нулевом внешнем поле стационарным решением кинетического уравнения (5) является максвелловская функция распределения электронов с температурой, равной температуре тяжелых частиц ионизованного газа T_0. Тогда связь между B, C и G находится из условия обращения в нуль фоккер-планковского интеграла столкновений

$$[B(v)-C(v)]\,mv^2=kT_0G(v)\qquad\text{(соотношение Эйнштейна)} \tag{7}$$

Явные выражения для этих коэффициентов могут быть получены [5] разложением ядра интеграла столкновений Ландау в ряд по параметру $m/M\ll 1$

$$2B=\nu(v)\left[1-\frac{m}{M}\frac{kT_0}{mv^2}\right],\quad 2C=\nu(v)\left[1-3\frac{m}{M}\frac{kT_0}{mv^2}\right],\quad G(v)=\frac{m}{M}\nu(v) \tag{8}$$

при этом частота столкновений с передачей импульса $\nu(v)$ определена известным соотношением

$$\nu(v) = 2\pi \frac{Ne^4}{m^2v^3} L \tag{9}$$

Здесь M и N — масса и плотность ионов, L — кулоновский логарифм. Система уравнений, которой удовлетворяют моменты функции распределения, находится путем умножения уравнения (5) на m, mv_α, $mv_\alpha v_\beta$, $mv_\alpha v^2, \ldots$ с последующим интегрированием по f пространству скоростей. С учетом принятого приближения для f (3) имеем

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho\mathbf{u} = 0, \qquad \tfrac{3}{2}\partial_t p + \operatorname{div} \mathbf{q} = \mathbf{Ej} + R[f_0]$$

$$(\partial_t + \tau^{-1})\rho\mathbf{u} + \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \boldsymbol{\pi} = ne\mathbf{E} - \alpha\mathbf{h} \tag{10}$$

$$(\partial_t + \tau_\pi^{-1})\pi_{\alpha\beta} + \frac{2}{5}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial q_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) = E_\alpha j_\beta + E_\beta j_\alpha - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}E_\gamma j_\gamma$$

$$(\partial_t + \tau_h^{-1})h_\alpha + \frac{5}{2}\left[\rho u_\alpha \partial_t\theta + \pi_{\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(\eta p)}{\partial x_\alpha} - \frac{\theta\partial p}{\partial x_\alpha}\right] +$$
$$+ \frac{\partial(\theta\pi_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} = \frac{e}{m}E_\beta\pi_{\alpha\beta} - \beta\rho u_\alpha$$

Здесь

$$\mathbf{j} = en\mathbf{u} \tag{11}$$

$$\theta = \frac{p}{\rho} = \frac{1}{3}\int_0^\infty v^4 f_0(v)\,dv \Big/ \int_0^\infty v^2 f_0(v)\,dv, \qquad \eta = \frac{1}{5}\int_0^\infty v^6 f_0(v)\,dv \Big/ \int_0^\infty v^4 f_0(v)\,dv \tag{12}$$

Времена релаксации гидродинамических переменных τ, τ_π, τ_h и величины α и β определяются соотношениями

$$\tau^{-1} = a^{(1)}[f_0], \qquad \tau_\pi^{-1} = a^{(2)}[f_0], \qquad \tau_h^{-1} = a^{(3)}[\triangle f_0] - {}^1/_2\,\theta a^{(1)}[\triangle f_0] \tag{13}$$

$$\alpha = {}^1/_5\, a^{(1)}[\Delta f_0], \quad \beta = 5\{a^{(3)}[f_0] - {}^1/_2\,\theta a^{(1)}[f_0]\}$$

где

$$a^{(1)}[f_0] = -\frac{4\pi}{3n}\int_0^\infty \nu(v)\frac{\partial f_0}{\partial v}v^3\,dv + O(m/M) \qquad \left(n = 4\pi\int_0^\infty v^2 f_0(v)\,dv\right)$$

$$a^{(2)}[f_0] = \frac{2\pi}{5n}\int_0^\infty \nu^{(2)}(v)\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f_0}{v\partial v}v^5 dv + O(m/M) \tag{14}$$

$$a^{(3)}[f_0] = -\frac{2\pi}{15n}\int_0^\infty \nu(v)\frac{\partial f_0}{\partial v}v^5 dv + O(m/M)$$

Значения $a^{(1)}[\Delta f_0]$ и $a^{(3)}[\Delta f_0]$ определяются аналогичными выражениями с заменой f_0 на Δf_0. Кроме того, для величины $R[f_0]$, описывающей передачу энергии при столкновениях частиц, имеем

$$R[f_0] = -\frac{4\pi m}{M}\int_0^\infty \nu(v)v^3\left(kT_0\frac{\partial f_0}{\partial v} + mv f_0\right)dv \tag{15}$$

В приведенных выше выражениях

$$\nu = Nv\int\sigma(v,\chi)(1-\cos\chi)\,d\Omega, \qquad \nu^{(2)} = Nv\int\sigma(v,\chi)(1-\cos^2\chi)\,d\Omega \tag{16}$$

При этом для электрон-ионных взаимодействий $\nu^{(2)} = 2\nu$, а для частной модели твердых упругих шариков в случае электрон-нейтральных взаимодействий $\nu^{(2)} = {}^2/_3\nu = {}^2/_3 NQv$, где Q — поперечное сечение столкновений электрона с нейтроном.

Следует отметить, что времена релаксации τ, τ_π, τ_h и величины α, β, найденные в результате вычисления «моментов относительно интеграла столкновений», определены на произвольной функции распределения основного состояния, в то время как в обычной схеме метода моментов за f_0 принимается максвелловская функция распределения [3].

Для отыскания кинетического уравнения, определяющего функцию распределения основного состояния f_0, подставим полученное выше разложение (3) в кинетическое уравнение (5) и выполним интегрирование по угловым переменным пространства скоростей. В результате находим

$$\partial_t f_0 + \frac{v}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{\delta}\mathbf{f} + \frac{e}{3m} v^{-2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}) = \frac{m}{M} v^{-2}\frac{\partial}{\partial v}\left[v^2 \nu(v)\left(\frac{kT_0}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0\right)\right] \tag{17}$$

где

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{f} = -\mathbf{u}\frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{1}{5}\frac{\mathbf{h}}{\rho}\frac{\partial}{\partial v}(\triangle f_0) \tag{18}$$

Заметим, что структура полученного уравнения совпадает со структурой уравнения Б. И. Давыдова [1] для симметричной функции распределения электронов в сильном электрическом поле. Различие заключается в следующем. В методе Б. И. Давыдова как f_0, так и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}$ (или $\mathbf{f}^{(1)}$) определяются из системы первых двух уравнений цепочки, возникающей в результате подстановки разложения (1) в исходное кинетическое уравнение, и интегрирования по угловым переменным пространства скоростей. Это означает, что кинетический подход используется для исследования как основного состояния, так и отклонений от него.

Анализ второго из уравнений цепочки показывает, в частности, что в пренебрежении пространственной неоднородностью $\mathbf{f}^{(1)}$ допускает представление

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{f} = -\mathbf{u}(v)\,\partial f_0 / \partial v$$

где $\mathbf{u}(v)$ определяется из уравнения

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \nu(v)\,\mathbf{u} = e\mathbf{E} / m$$

и является, таким образом, функцией хаотической скорости электронов [2].

В рассматриваемом приближении токовая часть функции распределения $\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}$ определена через среднюю макроскопическую скорость $\mathbf{u}$ и относительный тепловой поток $\mathbf{h}$, которые связаны системой гидродинамических уравнений с изотропным давлением, тензором напряжений и внешним полем. Кинетический метод используется, таким образом, лишь для определения функции распределения основного состояния, а отклонения от основного состояния исследуются в гидродинамическом приближении. Применение в этом случае обобщенного метода моментов, в основе которого лежит разложение (3), позволяет в гидродинамическом приближении учесть влияние внешнего поля на функцию распределения основного состояния, связанное с сохранением трех членов в разложении типа (1), в то время как в методе Б. И. Давыдова учет $f_{\alpha\beta}^{(2)}$ в разложении (1) неизбежно связан с анализом связанной системы трех кинетических уравнений.

Для стационарных и пространственно-однородных состояний уравнение (17) переходит в

$$\frac{m}{M}\nu(v)\left[\frac{kT_0}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0\right] = -\frac{1}{3}\frac{e}{m}\left[\mathbf{E}\mathbf{u}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{1}{5}\frac{1}{\rho}\mathbf{E}\mathbf{h}\frac{\partial}{\partial v}(\Delta f_0)\right] \tag{19}$$

которое может быть представлено в интегральной форме

$$\frac{3m}{M}kT_0\,[f_0 - f_0^{(0)}]\exp\left(\frac{mv^2}{2kT_0}\right) = \tag{20}$$

$$= -e\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}\int_0^v \exp\left(\frac{mw^2}{2kT_0}\right)\frac{df_0(w)}{\nu(w)} - \frac{1}{5\rho}e\mathbf{E}\cdot\mathbf{h}\int_0^v \exp\left(\frac{mw^2}{2kT_0}\right)\frac{d\Delta f_0(w)}{\nu(w)}$$

Здесь $f_0^{(0)}$ — решение уравнения (19) при нулевом внешнем поле (максвелловское распределение электронов с температурой T_0). Входящие в правую часть (20) величины $\mathbf{Eu}$ и $\mathbf{Eh}$ могут быть найдены из решения системы гидродинамических уравнений (10). В предположении стационарности и пространственной однородности приходим к следующим соотношениям:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{u} = \frac{\sigma}{en}E^2, \qquad \mathbf{E}\cdot\mathbf{h} = ne\alpha^{-1}E^2[1 - \sigma/\sigma_0] \tag{21}$$

где σ — коэффициент электропроводности плазмы, определяемый выражением (22)

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1-\Delta_0}\frac{1}{1+\zeta E^2} \qquad \left(\sigma_0 = \frac{ne^2}{m}\tau,\ \Delta_0 = \alpha\beta\tau\tau_h,\ \zeta = \frac{4}{3}\frac{1}{1-\Delta_0}\left(\frac{e}{m}\right)^2\alpha\tau\tau_\pi\tau_h\right)$$

Для анализа уравнений (20) и (21) можно использовать метод итераций. Приняв за нулевое приближение $f_0^{(0)}$ и вычисляя величины $\tau^{(0)}$, $\tau_\pi^{(0)}$, $\tau_h^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$ и $\beta^{(0)}$, находим на основании соотношений (21) значения $\mathbf{u}^{(1)}$ и $\mathbf{h}^{(1)}$ в первом приближении. Подставляя полученные значения в уравнение (20), в правой части которого f_0 заменяется на $f_0^{(0)}$, приходим к явной зависимости поправки первого приближения $f_0^{(1)} - f_0^{(0)}$ от напряженности внешнего поля. Если использовать полученное для $f_0^{(1)}$ выражение для вычисления $\tau^{(1)}$, $\tau_\pi^{(1)}$, $\tau_h^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$, то соотношения (21) приведут ко второму приближению для средней скорости $\mathbf{u}^{(2)}$ и теплового потока $\mathbf{h}^{(2)}$. Таким путем может быть, в частности, проанализирован характер нелинейной зависимости тока проводимости $\mathbf{j} = en\mathbf{u}$ и теплового потока $\mathbf{h}$ от напряженности электрического поля.

Отметим, что нулевое приближение соответствует случаю «слабых» полей, определяемых условием

$$E \ll E_p, \qquad E_p^2 = \left(\frac{m}{e}\right)^2\frac{3kT_0}{M}\frac{1}{[\tau(T_0)]^2} \tag{23}$$

Оценивая для этого случая зависящий от E^2 член в знаменателе выражения для σ (22), находим

$$\zeta E^2 \sim \frac{m}{M}\left(\frac{E}{E_p}\right)^2 \tag{24}$$

т. е. этим членом можно заведомо пренебрегать по сравнению с единицей. В результате коэффициент электропроводности σ не зависит в рассматриваемом приближении от напряженности электрического поля, согласуясь по величине с известными результатами «второго приближения» Чепмэна—Каулинга для лорентцевского газа [6].

Перейдем к оценке влияния электрон-электронных столкновений. Учет последних приводит к появлению дополнительного интегрального члена правой части уравнения для f_0 и к уточнению величин времен релаксации в уравнениях для моментов (10). При достаточно большой степени ионизации вид функции распределения основного состояния определяется в основном межэлектронными столкновениями. Решением, обращающим в нуль интеграл электрон-электронных столкновений в уравнении для f_0, служит максвелловская функция распределения [2] с температурой электронов T. Последняя может быть определена из уравнения энергии (10), которое принимает вид

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}nkT + \operatorname{div}\mathbf{q} = \mathbf{Ej} - 3nk\frac{m}{M}\frac{T-T_0}{\tau(T)} \tag{25}$$

где $\tau(T)$ определено при температуре электронов.

Поправки к временам релаксации, обусловленные электрон-электронными столкновениями, могут быть взяты из работ [7,8]. В частности,