ПМТФ, № 4, 1960

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ ПЕРЕДНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЦИЛИНДРА ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ

И. В. Немчинов, Л. П. Топеха

(Москва)

Рассматривается пограничный слой вблизи передней критической точки цилиндра, когда температура столь высока, что передача тепла осуществляется в основном излучением. Выписываются обыкновенные дифференциальные нелинейные уравнения пограничного слоя, граничные условия. Проводится упрощение системы при малых изменениях температуры и ее решение, когда температурный слой значительно шире вязкого или когда перенос тепла излучением осуществляется путем лучистой теплопроводности.

§ 1. Будем предполагать, что адиабатическим нагревом от работы сил сжатия и диссипацией энергии вследствие трения можно пренебречь. Температуры набегающего потока T_∞ и поверхности тела T_w считаются постоянными.

Тогда уравнения плоского ламинарного пограничного слоя вблизи передней критической точки цилиндра радиуса r примут вид

$$u + \frac{d\chi}{d\psi} = 0, \quad u^2 + \chi\frac{du}{d\psi} - \frac{T}{\mu(T)} = \varepsilon_1 \frac{d}{d\psi}\left[\eta\rho\frac{du}{d\psi}\right] \tag{1.1}$$

$$c_p\chi\frac{dT}{d\psi} + \frac{dq}{d\psi} = \varepsilon_2\frac{d}{d\psi}\left(k\rho\frac{dT}{d\psi}\right), \qquad \lambda^2 l\rho\frac{d}{d\psi}\left(l\rho\frac{dq}{d\psi}\right) = q + \varepsilon_3 l\rho T^3\frac{dT}{d\psi}$$

$$\begin{gathered}\chi = \rho v, \qquad \psi = \int_0^y \rho\, dy, \qquad \eta = \eta(T), \qquad \rho T = \mu(T) \\ c_p = c_p(T), \qquad k = k(T), \qquad l = l(T)\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь для безразмерных величин введены следующие обозначения u и v — скорости вдоль осей x и y соответственно, T — температура, ρ — плотность, η — коэффициент вязкости, k — коэффициент молекулярной (электронной, ионной, атомарной) теплопроводности, c_p — теплоемкость, μ—молекулярный вес, q—лучистый поток тепла вдоль оси y, т. е. поперек пограничного слоя, l — пробег излучения, в который включен коэффициент, возникающий при осреднении уравнений лучистого переноса по углам (проведено осреднение и по частотам).

Безразмерные величины связаны с соответствующими размерными (отмечены индексом) следующим образом:

$$\begin{gathered}u^\vee = 2u_\infty ux, \qquad v^\vee = 2u_\infty v, \qquad T^\vee = T_\infty T \\ \rho^\vee = \rho_\infty\rho, \qquad \eta^\vee = \eta_\infty\eta, \qquad x^\vee = rx, \qquad y^\vee = ry \\ k^\vee = k_\infty k, \qquad l^\vee = l_\infty l, \qquad \mu^\vee = \mu_\infty\mu, \qquad q^\vee = 2\rho_\infty u_\infty c_{p\infty}T_\infty q\end{gathered} \tag{1.3}$$

Параметры ε_1, ε_2, ε_3 и λ представляют собой следующую комбинацию размерных величин:

$$\varepsilon_1 = \frac{\eta_\infty}{2\rho_\infty u_\infty r} = \frac{1}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{k_\infty}{2\rho_\infty u_\infty c_{p\infty} r} = \frac{1}{RP}, \quad \varepsilon_3 = \frac{l_\infty}{r}\frac{4\sigma T_\infty^4}{\rho_\infty u_\infty c_{p\infty} T_\infty}, \ \lambda = \frac{l_\infty}{r} \tag{1.4}$$

Кроме того, введем обозначения комбинаций из безразмерных критериев

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\alpha\lambda = 4\omega\lambda^2, \quad \alpha = \frac{8\sigma T_\infty{}^4}{\rho_\infty u_\infty c_{p_\infty} T_\infty}, \quad \omega = \frac{\sigma T_\infty{}^4}{\rho_\infty u_\infty c_{p_\infty} T_\infty}\frac{r}{l_\infty} \qquad (1.5)$$

Здесь σ — константа в законе Стефана — Больцмана, P — число Прандтля, R — число Рейнольдса.

Первые три уравнения (1.1) являются обычными уравнениями пограничного слоя несжимаемой жидкости [1, 2], за исключением того, что учтена возможность изменения плотности, молекулярного веса, вязкости, коэффициента теплопроводности и теплоемкости с температурой при постоянном давлении поперек пограничного слоя. При их выводе используется симметрия функций $v^\vee$, $T^\vee$, $\rho^\vee$, $p^\vee$, $q_y{}^\vee$ и антисимметрия функций $u^\vee$, $q_x{}^\vee$ относительно оси y. Последнее уравнение — уравнение переноса тепла излучением в одномерном плоскопараллельном случае (потоками излучения вдоль оси x, т. е. q_x и $\partial q_x/\partial x$, как это обычно делается в пограничном слое, пренебрегаем). Обсуждение этого уравнения и литературу можно найти, например, в [3].

Для простоты и для выяснения основных особенностей пограничного слоя с учетом излучения считаем, что поток тепла из-за обычного молекулярного переноса много меньше лучистого потока тепла, и пренебрегаем соответствующим членом в уравнении энергии (1.1), положив $\varepsilon_2 = 0$. Тогда граничные условия системы уравнений (1.1) примут вид

$$u = 1, \quad q = 0, \quad T = 1 \quad \text{при } \psi = \infty \qquad (1.6)$$

$$\chi = 0, \quad u = 0 \quad \text{при } \psi = 0 \qquad (1.7)$$

Записанные выше условия надо дополнить условием на температурный скачок, которое может быть просто получено из соотношения [3], связывающего полный поток тепла q и его производную $dq/d\psi$ с потоками излучения F^+ и F^- в положительном и отрицательном направлении оси y

$$\begin{gathered} 2F^\pm = -l^\vee \frac{\partial q^\vee}{\partial y^\vee} \pm q^\vee + 2\sigma (T^\vee)^4 \\ \frac{\alpha}{8}(\theta_\pm{}^4 - T^4) = -\lambda l \rho \frac{dq}{d\psi} \pm q \end{gathered} \qquad (1.8)$$

В критической точке $\chi(\psi) = 0$, следовательно, при конечной производной $dT/d\psi$ производная $dq/d\psi = 0$. Входящий поток излучения с поверхности тела $F^\pm$ является заданным, поэтому из (1.8) получим условие в безразмерном виде

$$\theta_+{}^4 - T_0{}^4 = \frac{8}{\alpha} q \qquad (1.9)$$

где θ_+ — эффективная температура, соответствующая потоку излучения с поверхности тела (если поверхность светит как абсолютно черное тело, то $\theta_+ = T_w$, где T_w — температура тела). Легко видеть, что, согласно (1.9), температура газа вблизи тела $T_0 \neq T_w$ («температурный скачок»).

Если поверхность сублимирует (для простоты свойства паров и набегающего газа считаем одинаковыми), то вместо условия (1.7) будем иметь

$$\psi = 0, \quad \chi = \chi_w, \quad u = 0, \quad T_w = T_S = T_0 \qquad (1.10)$$

где значение безразмерного расхода массы χ_w может быть получено из уравнения

$$\beta\chi_w T_S = -q_w, \qquad \beta T_S = \frac{Q_S}{c_{p_\infty}{}^{\vee} T_\infty{}^{\vee}} \tag{1.11}$$

Здесь Q_S — теплота сублимации, $T_S{}^{\vee}$ — температура сублимации. В (1.8) θ_+ может быть задана равной $T_0 = T_S$ и тогда

$$q_w = \lambda \frac{dq}{d\psi}\Big|_w l_w \rho_w$$

В критической точке, где $\chi = 0$, имеет место $dq/d\psi = 0$, а так как F^+ и F^- непрерывны, то, согласно (1.8), непрерывен полный поток $q^{\vee} = F^+ - F^-$ и температура газа T.

§ 2. Рассмотрим уравнения (1.1) при малых отклонениях температуры газа от T_∞. Заметим, что это может иметь место не только при $T_\infty \approx T_w$, но и при $T_\infty \gg T_w$, когда температурный скачок велик и $T_0 \approx T_\infty$. В этом случае система уравнений (1.1) примет вид

$$u + \frac{d\chi}{d\psi} = 0, \qquad u^2 + \chi\frac{du}{d\psi} - 1 = \varepsilon_1 \frac{d^2u}{d\psi^2} \tag{2.1}$$

$$\chi\frac{dT}{d\psi} + \frac{dq}{d\psi} = \varepsilon_2 \frac{d^2T}{d\psi^2}, \qquad \lambda^2 \frac{d^2q}{d\psi^2} = q + \varepsilon_3 \frac{dT}{d\psi} \tag{2.2}$$

и, как легко видеть, уравнения (2.1) решаются независимо от уравнений (2.2). Уравнения (2.1) являются обычными уравнениями несжимаемого пограничного слоя [1,2]. Систему уравнений (2.1) можно заменить одним уравнением третьего порядка

$$(\chi')^2 - \chi\chi'' - 1 = \varepsilon_1\chi''', \qquad \chi = \chi(\psi) \tag{2.3}$$

или, производя замену переменных $\chi = -\varphi\sqrt{\varepsilon_1}$, $\psi = \xi\sqrt{\varepsilon_1}$, приходим к обычному уравнению Блязиуса [1,2]. Таким образом, в уравнениях (2.2) в качестве переменного коэффициента стоит затабулированное решение уравнения (2.3).

На расстояниях от поверхности тела, больших чем $\sqrt{\varepsilon_1}$, решение (2.3) при граничных условиях $\chi'(0) = 0$, $\chi(0) = 0$, $\chi'(\infty) = 1$ имеет простой вид: $\chi = -\psi$.

Рассмотрим режим, когда пограничный температурный слой много шире вязкого. При числе Прандтля, определяемого обычной теплопроводностью и вязкостью $P = \varepsilon_1/\varepsilon_2 \approx 1$, это имеет место при $\varepsilon_3 \gg \varepsilon_2$.

Подставляя $\chi(\psi)$ в (2.2) и полагая $\varepsilon_2 = 0$, получим

$$\lambda^2 \frac{d^2q}{d\psi^2} = q + \varepsilon_3 \frac{dq}{d\psi}\frac{1}{[-\chi(\psi)]} \tag{2.4}$$

При $\chi = -\psi$ введем замену зависимой и независимой переменной и из (2.4) получим

$$\xi^2 f'' + \xi f'(2\nu - 4\omega) + f[(\nu-1)\nu - 4\omega\nu - \xi^2] = 0 \tag{2.5}$$

$$q = \xi^\nu f(\xi), \qquad \psi = \lambda\xi, \qquad 4\omega\lambda^2 = \varepsilon_3$$

Если положить $2\nu = 1 + 4\omega$, то уравнение (2.5) преобразуется к уравнению Бесселя [4]

$$\xi^2 f'' + \xi f' - (\xi^2 + \nu^2) f = 0 \tag{2.6}$$

$$q = \xi^\nu f(\xi) = C_1 \xi^\nu K_\nu(\xi) + C_2 \xi^\nu I_\nu(\xi) \tag{2.7}$$

где $K_\nu(\xi)$ и $I_\nu(\xi)$ — функции Бесселя — Макдональда порядка ν.

Известно, что $I_\nu(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$, поэтому при рассмотрении полупрямой $\xi > 0$ следует положить $C_2 = 0$.

В случае лучистой теплопроводности обычно рассматривают вместо второго уравнения (2.2) уравнение $q = -\varepsilon_3 dT / d\psi$, а граничное условие (1.9) заменяют условием отсутствия скачка. Тогда вместо (2.2) получим

$$\chi \frac{dT}{d\psi} = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \frac{d^2T}{d\psi^2}$$

$$T = 1 \quad \text{при} \quad \psi = \infty, \qquad T = T_0 = T_w \quad \text{при} \quad \psi = 0 \tag{2.8}$$

т. е. обычная и лучистая теплопроводность складываются.

Вводя новый безразмерный параметр

$$P' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{1 + \varepsilon_3 / \varepsilon_2} = \frac{P}{1 + \varepsilon_3 / \varepsilon_2} \tag{2.9}$$

получим, что решение (2.8) аналогично результатам в обычном пограничном слое [1,2], но роль числа P играет P'.

Если $P' \ll 1$, т. е. ширина теплового слоя много шире вязкого, то можно положить $\chi(\psi) = -\psi$. Тогда из (2.8) находим распределение температуры и поток тепла

$$T = T_0 + (1 - T_0) \operatorname{erf}(x), \qquad \psi = x \sqrt{2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}$$

$$q = -(1 - T_0) \sqrt{2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) / \pi} \exp(-x^2) \tag{2.10}$$

где $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятности.

§ 3. Вновь вернемся к уравнению (2.6). Вычислим производную $dq / d\xi$ согласно его решению (2.7)

$$\frac{dq}{d\xi} = C_1 \frac{d}{d\xi} [\xi^\nu K_\nu(\xi)] + C_2 \frac{d}{d\xi} [\xi^\nu I_\nu(\xi)] \tag{3.1}$$

Используя свойства Бесселевых функций [4], из (3.1) получаем

$$\frac{dT}{d\xi} = \frac{dq}{d\xi} \frac{1}{\xi\lambda} = -\frac{C_1}{\lambda} \xi^{\nu-1} K_{\nu-1}(\xi) + \frac{C_2}{\lambda} \xi^{\nu-1} I_{\nu-1}(\xi) \tag{3.2}$$

и, полагая, что в области $\xi > 0$ константа $C_2 = 0$, находим, что

$$1 - T_0 = \frac{C_1}{\lambda} \int_0^\infty \xi^{\nu-1} K_{\nu-1}(\xi)\, d\xi = \frac{C}{\lambda} \varphi(\nu) \tag{3.3}$$

где температура газа вблизи поверхности $T_0 \neq T_w$. Интеграл $\varphi(\nu)$ можно легко вычислить из известного свойства интегралов от Бесселевых функций [4]:

$$\varphi(\nu) = 2^{\nu-2} \Gamma\left(\nu - \tfrac{1}{2}\right) \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \tag{3.4}$$

Поток тепла на поверхности тела находится следующим образом

$$q = C \lim_{\xi \to 0} [\xi^\nu K_\nu(\xi)] = C\gamma(\nu) \tag{3.5}$$

Если $T_0 \gg T_w$, то из (1.9) имеем

$$\frac{8}{\alpha} q = \frac{8}{\alpha} C\gamma(\nu) = -1 - 4(T_0 - 1) = -1 + 4 \frac{C}{\lambda} \varphi(\nu) \tag{3.6}$$

Если температура $T_0 \approx T_w \approx 1$, то получим

$$2q = \alpha [(T_w - 1) - (T_0 - 1)] \tag{3.7}$$

Для вычисления $\gamma(\nu)$ воспользуемся разложением $K_\nu(\xi)$ в ряд с конечным числом членов, если $2s - 1 = 2\nu$, где s — целое число. При других значениях ν выписываемый ниже ряд является асимптотическим

$$K_\nu(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}\, e^{-\xi} \Big\{1 + \frac{4\nu^2 - 1}{1!\, 8\xi} +$$

$$+ \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!\,(8\xi)^2} + \ldots + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\ldots[4\nu^2 - (2s-3)^2]}{(s-1)!\,(8\xi)^{s-1}}\Big\} \qquad (3.8)$$

После некоторого преобразования последнего члена в ряде (единственного остающегося после умножения на ξ^ν и при $\xi \to 0$) получим

$$\gamma(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{(2s-2)!}{2^{s-1}(s-1)!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{(2\nu - 1)!}{(\nu - {}^1/_2)!\, 2^{\nu - {}^1/_2}} \qquad (3.9)$$

Подставляя (3.3) и (3.5) в (3.6), получаем

$$C\,[\omega^{-1}\gamma(\omega) - \varphi(\omega)] = -\lambda \qquad (3.10)$$

§ 4. Если $\varepsilon_2 = 0$, то более точное условие не $T_0 = T_w$, а граничное условие на температурный скачок (1.9). Таким образом, в выражениях (2.10) T_0 должно быть найдено из (3.7) или (3.6).

$$(1 - T_w) = (1 - T_0)\,[1 + \sqrt{(2\pi\omega)^{-1}}] \qquad (4.1)$$

При $\omega \to \infty$ температура газа вблизи тела $T_0 \to T_w$, а при $\omega \to 0$ скачок велик и $T_0 \to 1$.

Подставляя (2.10) в (3.6), получаем

$$T_0 = 1 - [4\sqrt{(2\pi\omega)^{-1}} + 1]^{-1} \qquad (4.2)$$

При $\omega \to 0$ температура $T_0 \to 1$ и $T_0 \to 1 - {}^1/_4$ при $\omega \to \infty$, причем последнее является результатом того, что при больших отклонениях T_0 от 1 линеаризация не справедлива.

Нелинейные уравнения (1.1), или (2.1), (2.2) можно решать численным способом, разработанным А. А. Милютиным и Г. Г. Виленской.

Таким образом, если ширина пограничного слоя при переносе тепла излучением (порядка $r\sqrt{\varepsilon_3}$) велика по сравнению с характерным пробегом излучения $r\lambda$, можно пользоваться приближением лучистой теплопроводности, учитывая лишь условие температурного скачка. Если $\sqrt{\omega} = {}^1/_2\, \lambda^{-1}\sqrt{\varepsilon_3} \to 0$, то температурный скачок велик.

Когда температурный пограничный слой велик, т. е. становится сравнимым с размерами тела ($\sqrt{\varepsilon_3} \approx 1$ или $\lambda \approx 1$), то становится необходимым решать двумерные уравнения газовой динамики с уравнениями лучистого переноса без учета вязкости. Для грубой оценки величины теплового потока на тело можно воспользоваться результатами численного расчета для набегающего на тело однородного потока с постоянным расходом (положить $\chi = \mathrm{const}$), приведенными в [3]. Несколько более точным является, оставаясь в рамках системы уравнений (1.1), положить в ней $\varepsilon_1 = 0$

$$u + \frac{d\chi}{d\psi} = 0, \qquad u^2 + \chi\frac{du}{d\psi} - \frac{T}{\mu(T)} = 0 \qquad (4.3)$$

При $T \approx 1$ порядок этой системы можно понизить

$$1 - u^2 + \chi u\frac{du}{d\psi} = 0 \quad \text{или} \quad 1 - u^2 = C\chi^2 \qquad (4.4)$$

Граничные условия $\chi = 0$ при $\psi = 0$ и $u = 1$ при $\psi \to \infty$ (или при любом конечном $\chi \neq 0$) приводят к значениям $c = 0$ и $u \equiv 1$, $\chi = -\psi$. Но если для уравнения (4.4) потребовать задание действительных условий на бесконечности при обтекании цилиндра идеальной жидкостью, т. е.

$u = 0$, $\chi = -{}^1/_2$, то решение имеет вид

$$1 - u^2 = 4\chi^2, \quad \chi = -\frac{1}{2}\sin 2\psi, \quad u = \cos 2\psi \tag{4.5}$$

Легко видеть, что вблизи цилиндра $\chi \approx -\psi$, но на конечном расстоянии от него при $\psi = \pi/4$ достигаются условия, имеющие место в действительности при $\psi \to \infty$. Ясно, что распределения скорости при обтекании цилиндра идеальной жидкостью и по выражению (4.5) несколько отличаются друг от друга, так как при выводе системы (1.1) пренебрегали перепадом давления. Видно, что можно пройти на расстояния порядка размеров цилиндра r (при движении в безграничной среде).

Таким образом, граничные условия системы (4.3) $u = 0$, $\chi = -{}^1/_2$, но точка, где они задаются, не фиксируется, а получается из решения.

Если газ нагревается до высокой температуры в отсоединенной ударной волне, находящейся от цилиндра на расстоянии δ порядка $r\,(2\gamma)^{-1}$, где γ — сжатие в ударной волне, то, когда толщина температурного слоя становится сравнимой с δ, граничными условиями в уравнении энергии и лучистого переноса системы (1.1) являются

$$\frac{\alpha}{8}(\theta_-^4 - 1) + \lambda\frac{dq}{d\psi} + q = 0 \tag{4.7}$$

где θ_- — заданная эффективная температура входящего потока излучения, а заданная температура на ударной волне $T_\infty = 1$. Когда газ перед фронтом волны не прогрет, $\theta_- = 0$.

Расстояние от ударной волны до тела можно взять из результатов расчетов обтекания цилиндра, приведенных в [6], согласно которым довольно хорошо соблюдается линейность распределения скорости χ вдоль оси y.

§ 5. Рассмотрим случай объемного высвечивания с учетом молекулярной теплопроводности (тонкий слой размером δ, много меньшим пробега излучения). Из двух последних уравнений (1.1) системы получим безразмерное уравнение

$$\chi(\psi)\frac{dT}{d\psi} + \omega\frac{T^4}{l(T)\rho} + \varepsilon_2\left[k(T)\rho\frac{dT}{d\psi}\right] = 0 \tag{5.1}$$

Рассмотрим вырожденное уравнение, т. е. положим $\varepsilon_2 = 0$ (индекс для удобства опустим) и будем считать, что пробег излучения степенным образом зависит от температуры ($l \sim T^n$), профиль скорости линейный ($\chi = -\psi$) и давление постоянно ($\rho T = 1$).

Тогда уравнение (5.2) интегрируется в конечном виде

$$T^{n-4} = \left[1 - \omega(4 - n)\ln\frac{\psi}{\delta}\right] \quad (n \neq 4), \qquad T = (\psi/\delta)^\omega \quad (n = 4) \tag{5.2}$$

При $n \leqslant 4$, когда $\psi \to 0$, $\ln\psi \to -\infty$ и, согласно (5.2), температура газа вблизи тела $T \to 0$. Так как время пребывания частицы вблизи тела весьма велико (скорость у критической точки тела мала), то температура вблизи тела вследствие высвечивания существенно бы уменьшилась, на что нам указал Г. И. Таганов. Однако при малом ω охлажденный слой достаточно узок, и следует учитывать влияние обычной теплопроводности и вязкости. При небольших изменениях температуры ограничимся линеаризованным уравнением (5.1), а распределение скорости можно получить из решения уравнения пограничного слоя или обтекания тела несжимаемой жидкостью, т. е. зададим $\chi(\psi)$

$$-\chi(\psi)\frac{dT}{d\psi} - \omega + \varepsilon\frac{d^2T}{d\psi^2} = 0 \tag{5.3}$$

Введем новую переменную $\varphi = dT / d\psi$ и понизим порядок уравнения

$$-\chi(\psi)\varphi - \omega + \varepsilon \frac{d\varphi}{d\psi} = 0 \tag{5.4}$$

Решение однородного уравнения имеет вид

$$\varphi = C \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\psi \chi(y)\, dy\right] \tag{5.5}$$

Решение неоднородного уравнения получается методом вариации произвольной постоянной

$$C = \frac{\omega}{\varepsilon}\int_0^\psi \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi \chi(y)\, dy\right] d\xi + \varphi(0) \tag{5.6}$$

Постоянная $\varphi(0)$ определяется путем интегрирования (5.5) с учетом (5.6) из условия заданной разности температуры на поверхности тела и в точке $\psi = \delta$. Если $\chi = -\psi$, то это приводит к

$$\Delta T = \varphi(0)\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_2}{2\delta^2}}\operatorname{erf}\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon_2}\right) + \frac{\omega}{\delta^2} W\left(\frac{\delta^2}{\varepsilon_2}\right) \tag{5.7}$$

$$W(x) = \int_0^x e^{-z^2/2}\left(\int_0^z e^{y^2/2}\, dy\right) dz = \int_0^x\left(\int_0^z e^{(y^2-z^2)/2}\, dy\right) dz$$

Интеграл $W(x)$ в (5.7) расходится при $x \to \infty$, однако характер его роста оценить довольно нетрудно. Ясно, что в подынтегральном выражении существенны лишь значения y, близкие к z, и можно положить

$$y^2 - z^2 = (y - z)(y + z) \approx (y - z)\, 2z$$

$$W(x) \approx \int_0^x \frac{1}{z}(1 - e^{-z^2})\, dz$$

При $x = \delta / \sqrt{\varepsilon_2} \gg 1$ интеграл $W(x) \approx \ln x$. При малых x значение $W(x)$ можно выразить в виде ряда

$$W(x) = x^2 - {}^1/_{12}\, x^4 + {}^1/_{75}\, x^6$$

Согласно (5.7), вследствие высвечивания $\varphi(0)$ уменьшается и, следовательно, молекулярный поток тепла несколько понижается.

Выражаем глубокую благодарность К. Е. Губкину, А. С. Компанейцу, А. Т. Онуфриеву, Г. И. Таганову, С. А. Христиановичу за проявленный интерес к работе и ценные дискуссии, А. А. Милютину и Г.Г. Виленской за оказанную большую помощь.

Поступила 16 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна. ИИЛ, 1948.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИИЛ, 1956.
3. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ИМТФ, 1960, № 1.
4. Грей Э. и Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИИЛ, 1949.
5. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания кругового цилиндра с отошедшей ударной волной. Сб. вычисл. матем., Изд-во АН СССР, 1958, № 3.