УДК 629.7.023:539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск
E-mail: lev@wsr.ru

Рассматривается конечно-элементный метод решения задач нелинейного деформирования и устойчивости неравномерно дискретно подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек. Разработан эффективный компьютерный алгоритм исследования оболочек. Изучена устойчивость стрингерной цилиндрической оболочки с эллиптическим контуром поперечного сечения при поперечном изгибе. Определено влияние на устойчивость оболочки эллиптичности, нелинейности деформирования оболочки на докритической стадии, дискретности и неоднородности подкреплений.

Ключевые слова: эллиптические цилиндрические оболочки, изгиб поперечной силой, нелинейное деформирование, устойчивость, метод конечных элементов.

Рассматривается дискретно подкрепленная продольным набором ребер (стрингерами) некруговая цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием поперечной силы Q (рис. 1). Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на m частей, а по направляющей на n частей. Таким образом, представим оболочку в виде набора $m \times n$ криволинейных прямоугольных конечных элементов (КЭ).

Алгоритм решения задачи. КЭ для неподкрепленных оболочек разработаны в [1], для стрингеров — в [2]. Используя эти элементы, решаем задачу вариационным методом

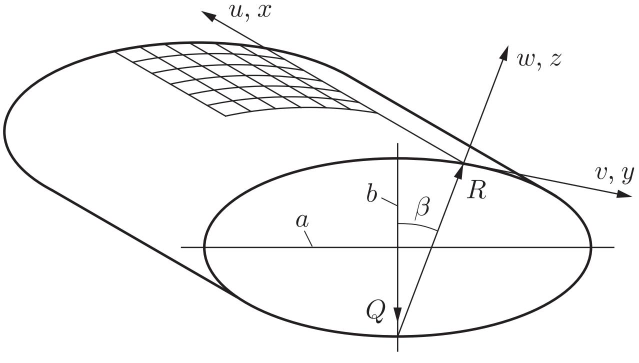

Рис. 1. Схема оболочки

конечных элементов в перемещениях. Запишем вариационное уравнение Лагранжа для элемента подкрепленной оболочки

$$\delta\Pi = \delta W + \delta W_p - \delta V = 0,$$

где V — работа внешних сил; δ — знак вариации; W — потенциальная энергия деформации неподкрепленной оболочки [1]; $W_p = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{l_p} \boldsymbol{T}_p^{\text{т}} \boldsymbol{e}_p \, dl_p$ — потенциальная энергия деформации подкреплений; $\boldsymbol{T}_p = \{T_p, M_{px}, M_{pz}, M_{py}\}^{\text{т}}$ — вектор внутренних усилий и моментов; $\boldsymbol{e}_p = \{\varepsilon_p, \chi_{px}, \chi_{pz}, \chi_p\}^{\text{т}}$ — вектор деформаций и изменений кривизн элементов подкреплений [2].

Варьируя по узловым перемещениям КЭ, имеем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений КЭ. Учитывая условия совместности узловых перемещений элементов и граничные условия, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений всех конечных элементов оболочки

$$K\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{Q} = 0, \tag{1}$$

где K — матрица жесткости оболочки, элементы которой получаются суммированием элементов матриц жесткостей отдельных КЭ с использованием матрицы индексов [3]; $\boldsymbol{Q}$ — вектор обобщенных узловых сил оболочки; $\boldsymbol{u}'$ — вектор узловых перемещений оболочки. Система (1) решается с использованием метода Ньютона — Канторовича [4], уравнение которого можно записать в виде

$$H(\boldsymbol{u}'_n)\Delta = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{G}, \qquad \boldsymbol{u}'_{n+1} = \boldsymbol{u}'_n + \Delta, \tag{2}$$

где H — гессиан оболочки, элементами которого являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации подкрепленной оболочки; $\boldsymbol{G}$ — градиент потенциальной энергии деформации. Решение системы (2) получаем шаговым методом по нагрузке с использованием разложения матрицы Гессе $L^{\text{т}}DL$ на диагональную и две треугольные матрицы.

Определив узловые перемещения, найдем все компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки по формулам, полученным в работе [5]. Критическая нагрузка определяется либо как предельная по расходимости итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки, либо как бифуркационная с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво при $\delta^2\Pi > 0$. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы гессиан H был положителен или были положительны все диагональные элементы матрицы D в разложении матрицы Гессе $L^{\text{т}}DL$.

Результаты исследований. Рассмотрим консольно защемленную ($v = w = dw/dx = 0$) неравномерно дискретно подкрепленную набором стрингеров эллиптическую цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием вертикальной поперечной силы Q, приложенной к свободному краю этой оболочки. С нагруженной стороны оболочка подкреплена шпангоутом с большой жесткостью на изгиб в своей плоскости. Действие поперечной силы заменим статически эквивалентными ей касательными усилиями $T_{xy} = QS/J$, где S — статический момент отсеченной части поперечного сечения; J — момент инерции поперечного сечения оболочки относительно оси a. С учетом симметрии оболочки и нагрузки рассматривалась половина оболочки, которая разбивалась конечно-элементной сеткой размером $m \times n = 14 \times 160$, что обеспечивало сходимость решения по числу конечных элементов.

Уравнение эллипса и выражение для радиуса его кривизны имеют вид

$$z^2/b^2 + y^2/a^2 = 1, \qquad R = a^2b^2/d^3, \tag{3}$$

где $d^2 = a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta$.

Рассмотрим оболочку при заданных значениях отношений длин полуосей эллипса $\bar{b} = b/a$, $\bar{a} = a/b$ и эквипериметрического радиуса

$$R_0 = \frac{P}{2\pi} = \frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\bigl\{1 - [1 - (\bar{b})^2]\sin^2\psi\bigr\}^{1/2}\,d\psi = \frac{2a}{\pi}\,E\Bigl(\frac{\pi}{2},\bar{b}\Bigr) \approx \frac{a}{2}\Bigl[\frac{3}{2}\,(1+\bar{b}) - \sqrt{\bar{b}}\,\Bigr].$$

Здесь P — периметр поперечного сечения; a, b — длины полуосей эллипса; $E(\pi/2, \bar{b})$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Длина оболочки $L = 1000$ мм, толщина $h = 2$ мм, $R_0 = 1900$ мм, модуль упругости $E = 7\cdot10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Площадь поперечного сечения стрингеров при равномерном подкреплении $F_{\text{с}} = 100$ мм^2, собственный момент инерции $J_{\text{с}} = 3333$ мм^4, расстояние между стрингерами $d_{\text{с}} = 150$ мм, эксцентриситет $e_{\text{с}} = 11$ мм.

Равномерное подкрепление. Результаты компьютерного исследования эквипериметрических (с одинаковыми периметрами) оболочек представлены на рис. 2,*а*. Приняты следующие обозначения: $k_\tau = Q^*/Q_0$, Q^* — критические значения поперечной силы, $Q_0 = 3R_0S_b$ — критические значения поперечной силы для неподкрепленной круговой цилиндрической оболочки ($S_b = 0{,}74Eh/(1-\nu^2)^{5/8}(h/R_0)^{5/4}(R_0/L)^{1/2}$).

Учет дискретности расположения стрингеров приводит к значительному уменьшению критических нагрузок, поскольку в этом случае первые критические нагрузки соответствуют местной (панельной, между стрингерами) потере устойчивости. При этом стрингеры сохраняют прямолинейную форму. Общая (со стрингерами) потеря устойчивости получена с помощью метода редуцирования потерявшей устойчивость панели с использованием конструктивно-ортотропной схемы. Коэффициент редукции принимался равным 0,7. Редуцирование приводит к уменьшению критических нагрузок общей потери устойчивости по конструктивно-ортотропной теории в $1{,}2 \div 1{,}5$ раза. В отличие от круговых ($\bar{a} = 1$) эквипериметрических оболочек широкие ($\bar{b} < 1$) оболочки в весовом отношении невыгодны, поскольку их критические силы значительно (при $\bar{b} = 0{,}4$ — в 1,5 раза) меньше критических сил круговых оболочек. Узкие оболочки выгоднее круговых оболочек, поскольку

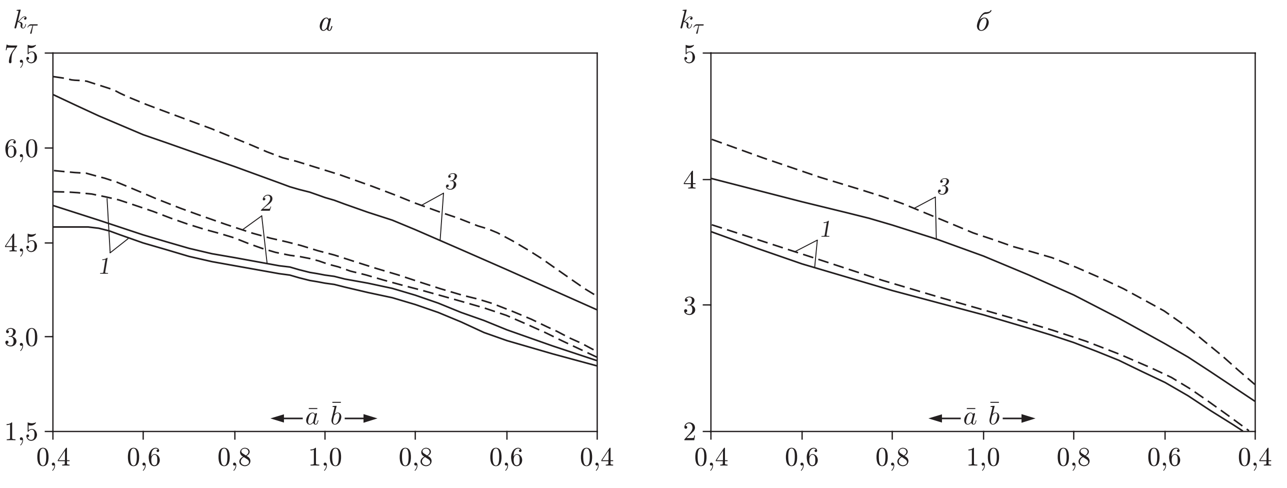

Рис. 2. Зависимость параметра k_τ от параметров $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в случае нелинейного (сплошные линии) и линейного (штриховые) напряженно-деформированных состояний:

1 — дискретно подкрепленная оболочка, *2* — редуцированная конструктивно-ортотропная оболочка, *3* — нередуцированная конструктивно-ортотропная оболочка

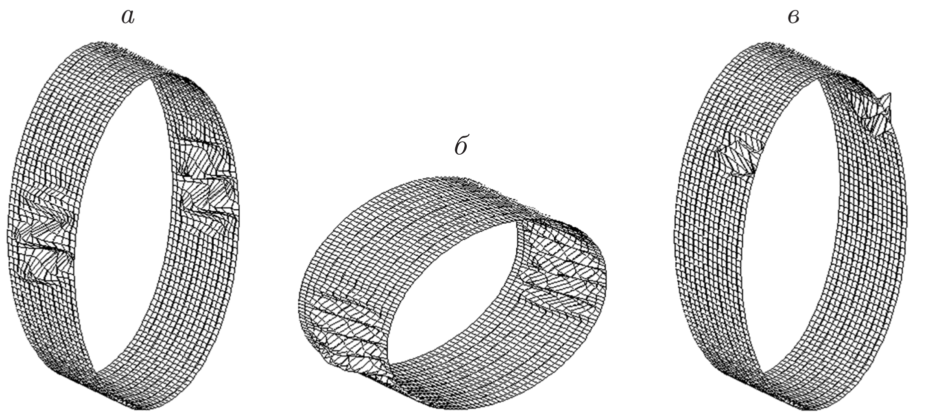

Рис. 3. Различные формы потери устойчивости оболочек:
а, б — равномерное подкрепление, *в* — неравномерное подкрепление

при $\bar{a} = 0{,}6$ их критические силы в 1,3 раза меньше критических сил круговых оболочек. Вследствие нелинейности деформирования критическая сила уменьшается.

Неравномерное подкрепление. Исследуем оболочку с неравномерным по направляющей расположением стрингеров различной жесткости. В верхней и нижней частях оболочки (се́ктора с углом 90°) расположены "сильные" стрингеры с $F_{\text{с}} = 150$ мм^2, $J_{\text{с}} = 5000$ мм^4, $e_{\text{с}} = 11$ мм. На боковых частях оболочки (се́ктора с углом 90°) расположены "слабые" стрингеры с $F_{\text{с}} = 50$ мм^2, $J_{\text{с}} = 1667$ мм^4, $e_{\text{с}} = 11$ мм. Общий вес стрингеров при однородном и неоднородном подкреплениях сохранен постоянным.

На рис. 2,*б* показаны зависимости k_τ от параметров эллиптичности оболочки $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Качественное различие этих зависимостей и зависимостей для однородно подкрепленных оболочек незначительно, а количественное их различие существенно. Различие критических значений поперечной силы при неоднородном и однородном распределениях стрингеров составляет $10 \div 25$ %.

На рис. 3 представлены типичные формы потери устойчивости оболочек. Наблюдаются как местные, так и общие формы потери устойчивости оболочек. При местной потере устойчивости образуются мелкие вмятины и выпучины, при общей — наблюдается ромбовидное волнообразование.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Железнов Л. П., Кабанов В. В.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 155–160.
2. **Мяченков В. И.** Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справ. / В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др. М.: Машиностроение, 1989.
3. **Постнов В. А.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. Л.: Судостроение, 1974.
4. **Канторович Л. В.** Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Физматгиз, 1959.
5. **Григолюк Э. И.** Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 20/V 2011 г.,
в окончательном варианте — 16/VIII 2011 г.