

## НЕСКОЛЬКО АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Э. В. Прозорова  
(Ленинград)

В работе [1] показано, что задачи нестационарного ламинарного пограничного слоя автомодельны для импульсивных и ускоряющихся по степенному закону движений несжимаемой жидкости. Некоторые результаты для сжимаемой жидкости представлены ниже.

1. Рассмотрим движение полубесконечной пластины в сжимаемой жидкости, импульсивно приведенной в движение. Система уравнений для этого случая [2] следующая:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) &= 0; \\ \rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \right); \\ u = U_e, v = 0 &\quad \text{при } y = 0, t = 0; \\ u = 0, v = 0 &\quad \text{при } y = 0, t > 0; \\ u = U_e, h = h_e, y &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Обозначения общеприняты; вязкость  $\mu$ , теплопроводность  $\lambda$  и уравнение состояния — произвольные функции температуры и плотности. Выберем

$$u = \Phi(\xi, \eta), v = V(\xi, \eta)/t^{1/2}, \xi = x/t, \eta = y/t^{1/2}, h = \bar{h}(\xi, \eta),$$

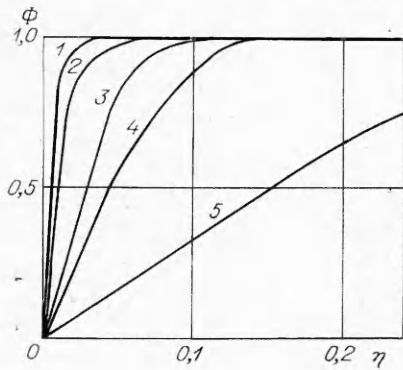
$\rho = \bar{\rho}(\xi, \eta)$ , т. е. перейдем к системе автомодельных переменных. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left[ -\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \bar{V} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \mu(\bar{T}, \bar{\rho}) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right]; \\ -\xi \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\rho} \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{\rho} \bar{V}) &= 0; \\ \bar{\rho} \left[ -\xi \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial \bar{h}}{\partial \xi} + \bar{V} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta} \right] &= \mu(\bar{T}, \bar{\rho}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \mu(\bar{T}, \bar{\rho}) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta} \right]. \end{aligned}$$

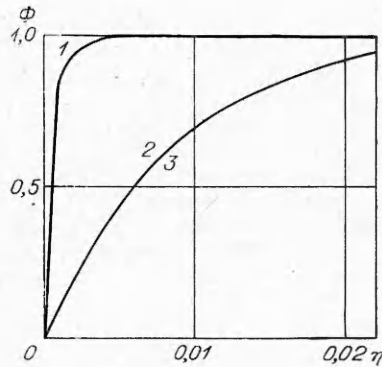
Граничные условия

$$\begin{aligned} \Phi = \bar{V} = 0, \bar{h} = h_w, \eta = 0, \xi > 0, \\ \Phi = U_e, \bar{h} = h_e, \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Здесь для простоты число Прандтля полагается постоянным. Возможность использования автомодельных переменных при произвольных функциях  $\mu$ ,  $\lambda$  и уравнении состояния связана с тем, что  $u$ ,  $h$ ,  $\rho$ , для которых заданы начальные и граничные условия, не равны нулю и не являются



Фиг. 1



Фиг. 2

явными функциями времени, как например,  $v$ . В разностном виде уравнения движения и энергии (черту над буквами опускаем,  $\bar{T} = (T - T_w)/(T_e - T_w)$ ,  $h = c_p T$ )

$$\frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^j}{\Delta \xi} = \frac{1}{(U_e \Phi_i^{j+1} - \xi_i)} \left\{ \frac{1}{\rho_i^{j+1}} \frac{1}{2\Delta \eta^2} [(\mu_{i+1}^{j+1} + \mu_i^{j+1}) \Phi_{i+1}^{j+1} - (\mu_{i+1}^{j+1} + 2\mu_i^{j+1} + \mu_{i-1}^{j+1}) \Phi_i^{j+1} + (\mu_i^{j+1} + \mu_{i-1}^{j+1}) \Phi_{i-1}^{j+1}] - \left( V_i^{j+1} - \frac{1}{2} \eta_i \right) \frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - \Phi_i^{j+1}}{\Delta \eta} \right\};$$

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta \xi} = \frac{1}{(U_e \Phi_i^{j+1} - \xi_i)} \left\{ \frac{\mu_i^{j+1}(T, \rho)}{c_p \rho_i^{j+1}} \frac{U_e^2}{T_e - T_w} \frac{\Phi_{i+1}^{(j+1)^2} - 2\Phi_i^{j+1} \Phi_{i+1}^{j+1} + \Phi_i^{(j+1)^2}}{\Delta \eta^2} + \frac{1}{\rho_i^{j+1} \sigma} \frac{1}{2\Delta \eta^2} [(\mu_{i+1}^{j+1} + \mu_i^{j+1}) T_{i+1}^{j+1} - (\mu_{i+1}^{j+1} + 2\mu_i^{j+1} + \mu_{i-1}^{j+1}) T_i^{j+1} + (\mu_i^{j+1} + \mu_{i-1}^{j+1}) T_{i-1}^{j+1}] - \left( V_i^{j+1} - \frac{1}{2} \eta_i \right) \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{\Delta \eta} \right\};$$

Нормальную составляющую скорости определяем из уравнения неразрывности через интеграл. Результаты расчета профиля скорости и сравнение с несжимаемой жидкостью, представлены на фиг. 1 для  $U_e = 2880$  см/с,  $T_w = 500$  К,  $T_e = 2400$  К,  $\sigma = 0,7$  ( $i - \xi = 0,025$  — сжимаемый газ; 2, 3 — несжимаемая жидкость,  $\xi = 0,05$ ,  $\xi = 7,55$ ,  $v = 0,15$ ; 4 —  $\xi = 8,525$  — сжимаемый газ,  $\xi = 21,275$  ложится на эту же кривую, 5 —  $\xi = 7,55$ ,  $v = 2,25$  — несжимаемая жидкость). Для температуры получается аналогичная картина.

2. Рассмотрим формирование пограничного слоя за проходящей ударной волной на тонкой полубесконечной пластине [2]. Обозначив через  $\theta$  скорость распространения ударной волны и через  $V$  скорость спутного потока газа за ударной волной, обратим движение так, чтобы ударная волна стала неподвижной. Область пограничного слоя ограничена  $x = \theta t$ . Система уравнений здесь такая же, как в предыдущей задаче, граничные условия

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad h = h_w, \quad y = 0, \quad x > 0, \\ u = U_e, \quad h = h_e, \quad y = \infty, \quad x < \theta t, \\ u = 0, \quad h = h_0, \quad y = \infty, \quad x > \theta t, \end{aligned}$$

где  $U_e = \theta - V$ .

Энтальпия, скорость и плотность на внешней границе определяются по соотношениям Гюгонио. Результаты расчета представлены на фиг. 2 для  $M_\infty = 3$ ,  $\sigma = 0,7$ ,  $\rho_\infty = 0,00129$  г/см<sup>3</sup> (1 —  $\xi = 0,05$ ; 2 —  $\xi = 24,5$ ; 3 —  $\xi = 30,3$ ; 2 и 3 совпадают). Такой же вид имеет зависимость безразмерного профиля температуры от  $\xi$ .

3. Рассмотрим импульсивно приведенную в движение полубесконечную пластину в проводящем газе при малых магнитных числах  $Re_H$ . Перпендикулярно направлению движения основного потока приложено магнитное поле индуктивностью  $B_{y,0}$ .

Уравнения записываются в виде [3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\sigma u}{\rho} B_{y,0}^2,$$

$$c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \sigma u^2 B_{y,0}^2.$$

Для простоты рассмотрим уравнение состояния идеального газа; для  $\mu$ ,  $\lambda$  выберем степенные зависимости от температуры;  $\sigma$ ,  $B_{y,0}$  постоянные. После введения

$$\rho = \bar{\rho}(\xi, \eta, t), \quad T = \bar{T}(\xi, \eta, t), \quad u = \Phi(\xi, \eta, t),$$

$$v = \bar{V}(\xi, \eta, t)/t^{1/2}, \quad \eta = y/t^{1/2}, \quad \xi = x/t, \quad \bar{T} = (T - T_w)/(T_e - T_w)$$

получим

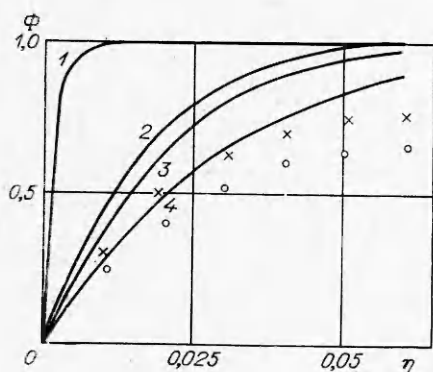
$$-\frac{1}{2} \eta \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0,$$

$$-\frac{1}{2} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \mu \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] - \frac{\sigma \Phi}{\rho} B_{y,0}^2 t,$$

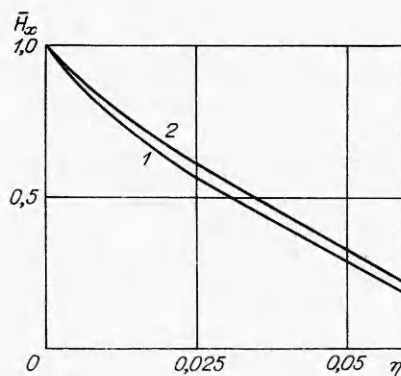
$$c_p \rho \left[ -\frac{1}{2} \eta \frac{\partial T}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} + V \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \mu \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \sigma \Phi^2 B_{y,0}^2 t.$$

Задача не полностью автомодельна, но использование автомодельных переменных позволяет получить от времени параметрическую зависимость, параметром фактически является величина  $\sigma B_{y,0}^2 t$ . Поэтому расчет при каком-то одном значении комплекса позволяет иметь решения для широкого набора  $B_{y,0}$ ,  $\sigma$ ,  $t$ . Результаты расчета скорости приведены на фиг. 3, где 1 —  $\xi = 0,0125$ ; 2 —  $\xi = 1,1375$ ; 3 —  $\xi = 1,7$ ; 4 —  $\xi = 4,5125$  для малых времен ( $t = 0,01$  с). Крестики соответствуют  $t = 0,5$ ,  $\xi = 1,1375$ , кружки —  $t = 0,7$ ,  $\xi = 1,1375$ . Вначале кривые совпадают. Наблюдается заметное снижение трения и теплового потока вдали от носика с включением магнитного поля. Малость вклада производных по времени проверяется после решения задачи.

4. Рассмотрим задачу, когда плоская пластина начинает внезапно двигаться в проводящем газе при больших магнитных числах  $Re_H$ . Внутри пластины перпендикулярно потоку протекает электрический ток (ток подключается в момент начала движения и изолирован от плазмы), индуцирующий в плазме магнитное поле. При большой проводимости плазмы набегающего потока магнитное поле, обусловленное токами внутри стенки, локализуется в области, близкой к поверхности стенки.



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Уравнения динамического, теплового и магнитного пограничного слоев имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0; \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} + u \frac{\partial H_x}{\partial x} + v \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x \frac{\partial v}{\partial y} - H_y \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_H \frac{\partial H_x}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} &= 0; \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu_e H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ p + \frac{1}{2} \mu_e H_x^2 &= p_0(x); \\ \rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu_H}{4\pi} \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь используется гауссова система единиц, обозначения общепринятые. По-прежнему решение ищем в виде

$$\begin{aligned} \rho = \bar{\rho}(\xi, \eta), \quad h = \bar{h}(\xi, \eta), \quad u = \Phi(\xi, \eta), \quad H_x = \bar{H}_x(\xi, \eta), \\ H_y = \bar{H}_y/t^{1/2}, \quad \text{где } \xi = x/t, \quad \eta = y/t^{1/2}. \end{aligned}$$

Черту над буквами опустим ( $h = c_p T$ ). После подстановки в уравнение получим

$$\begin{aligned} -\xi \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial \eta} &= 0; \\ -\xi \frac{\partial H_x}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial H_x}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial H_x}{\partial \xi} + V \frac{\partial H_x}{\partial \eta} + H_x \frac{\partial V}{\partial \eta} - H_y \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \nu_H \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right); \\ \frac{\partial H_x}{\partial \xi} + \frac{\partial H_y}{\partial \eta} &= 0; \\ p_0 = p + \frac{1}{2} \mu_e H_x^2 &= \text{const}; \\ \rho \left( -\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + V \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) - \mu_e H_y \frac{\partial H_x}{\partial \eta} - \mu_e H_x \frac{\partial H_x}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right); \end{aligned}$$

$$\rho \left( -\xi \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial h}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial h}{\partial \xi} + V \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = -\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} +$$

$$+ \Phi \frac{\partial p}{\partial \xi} + V \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \mu \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{v_H}{4\pi} \left( \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right)^2$$

или

$$\rho c_p \left( -\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} + V \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = -\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} -$$

$$- \frac{1}{2} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \Phi \frac{\partial p}{\partial \xi} + V \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \mu \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{v_H}{4\pi} \left( \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right)^2.$$

Для решения задачи используется неявная разностная схема. При расчете выделено два блока. В первом блоке одновременно решаются по методу матричной прогонки уравнения движения и энергии до полного завершения итерационного процесса. Во втором блоке отыскиваются профили напряженности магнитного поля. Процесс решения на слое  $\xi_i$  считается законченным после того, как все профили оказываются сосчитанными с заданной точностью. Точность приходится задавать высокую, поскольку иначе с ростом  $\xi$  происходит существенное накопление ошибок. Распределение напряженности магнитного поля  $H_x$  дано на фиг. 4. ( $1 - \xi = 0,0125$ ;  $2 - \xi = 4,137$ ,  $U_e = 0,2 \cdot 10^5$  см/с);  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $v_H$  рассматривались как степенные функции плотности и температуры.

Указанный алгоритм выбран в связи с возможностями машинной памяти М-222. Похоже, что использование матричной прогонки для одновременного счета всех искомым величин привело бы к более быстрому решению задачи. Следует заметить, что если в расчетах нестационарного пограничного слоя для несжимаемой жидкости точность роста вертикальной составляющей скорости неважна и результаты меняются лишь на несколько процентов при полном ее отсутствии, для сжимаемой жидкости требуется аккуратный учет этой составляющей.

Поступила 24 XII 1975

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прозорова Э. В. Об автомодельности движений нестационарного пограничного слоя. — ПМТФ, 1975, № 4, с. 122—125.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962, с. 357—360.
3. Бай-Шп-И. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., «Мир», 1964, с. 54.

УДК 534.533.6.011

## О ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСАХ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. В. Пономаренко

(Москва)

1. В теории колебаний систем, близких к линейным [1], внутренним резонансом называют пропорциональность нескольких собственных частот натуральным числам. В данной работе рассмотрены внутренние резонансы в гидродинамике.