

УДК 532.59

МОДЕЛЬ ВОЛНОВОГО ТЕЧЕНИЯ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. П. Актершев, С. В. Алексеенко

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе, 630090 Новосибирск

E-mail: sergey-aktershev@mail.ru

Для описания длинноволновых возмущений в стекающей пленке вязкой жидкости разработана новая модель, основанная на интегральном подходе и разложении профиля скорости в ряд по линейно независимым базисным функциям краевой задачи. Проведен линейный анализ устойчивости пленочного течения и получены дисперсионные зависимости. Показано, что результаты расчетов по новой модели хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными о течении пленки жидкости по поверхности с малым углом наклона.

Ключевые слова: стекающая пленка жидкости, устойчивость течения, волны, интегральный подход, базисные функции.

Введение. Стекающие пленки вязкой жидкости представляют собой пример среды с диссипацией и подкачкой энергии, поэтому исследование волн в пленках занимает особое место в теории нелинейных волн. Специфика состоит в том, что на поверхности тонкой пленки развиваются в основном длинные волны, и для чисел Рейнольдса $Re \approx 100$ течение остается ламинарным. Даже в случае сильнонелинейных волн с амплитудой порядка толщины пленки в задаче имеется малый параметр — отношение толщины пленки к длине волны. Это позволяет построить упрощенные модели, описывающие нелинейные волны в тонких пленках. Теоретический подход к исследованию волн в пленках, предложенный в работе [1], был использован В. Я. Шкадовым [2] для выведения уточненных модельных уравнений расхода жидкости и толщины пленки. Модель [2], использующая погранслоное приближение и параболический профиль скорости, представляет собой систему двух дифференциальных уравнений гиперболического типа для расхода жидкости и толщины пленки. В отличие от модели Бенни [3] (LWE-модель) интегральная модель [2] (IBL-модель) сохраняет основные количественные характеристики исходной задачи. Количественные характеристики установившихся волн, полученные при умеренных числах Рейнольдса для интегральной модели, хорошо согласуются с экспериментальными данными, несмотря на то что критическому числу Рейнольдса пленки, стекающей по наклонной плоскости под углом θ к горизонту, соответствует значение $\text{ctg } \theta$ вместо $(5/6) \text{ctg } \theta$. Такое превышение примерно на 20 % не имеет значения, в случае если пленка стекает по вертикальной плоскости. В настоящее время интегральная модель Шкадова [2] является основой для изучения волновых течений пленки в условиях, когда тепломассоперенос и гидродинамика оказываются взаимосвязанными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00360-а).

© Актершев С. П., Алексеенко С. В., 2013

Теоретические модели волнового движения в свободно стекающих пленках жидкости и результаты экспериментальных исследований представлены в монографии [4]. Необходимость интенсификации процессов тепломассопереноса потребовала дальнейшего совершенствования и обобщения развитого в [1, 2] подхода, что привело к появлению в последнее время новых моделей (см., например, [5–7]). В работе [5] волновое течение пленки описано с помощью метода центрального многообразия. С использованием модифицированного уравнения Навье — Стокса и синусоидального профиля скорости получена система двух модельных уравнений типа модели Шкадова. При таком подходе инерция пленки учитывается как малая поправка, и уже при небольших значениях модифицированного числа Рейнольдса модель [5] приводит к нефизическим результатам. В работе [6] с использованием метода весовых остатков и разложения по малому параметру $\varepsilon_h = \partial h / \partial x$ получена система модельных уравнений, описывающих волновое течение пленки. Метод весовых остатков использует разложение скорости по системе тестовых функций, в качестве которых выбираются полиномы по безразмерной координате $\eta = y/h$. Модель первого порядка по ε_h , использующая полиномы до шестой степени и погранслоное приближение, сводится к двум дифференциальным уравнениям для расхода жидкости и толщины пленки. Модель второго порядка использует полиномы до 14-й степени и представляет собой систему четырех уравнений, каждое из которых состоит примерно из 20 членов. Несмотря на то что в упрощенном варианте модель второго порядка сводится к двум уравнениям, в ней не используется погранслоное приближение и требуется учет в граничных условиях нелинейных членов. Описанный в [6] способ построения моделей волнового пленочного течения на основе полиномиального разложения скорости представляется малоперспективным, вследствие того что с увеличением степени полиномов резко увеличивается количество уравнений, которые становятся очень громоздкими. Утрачивается преимущество упрощенной модели по сравнению с численным решением уравнений Навье — Стокса — простота и возможность аналитического исследования.

В работе [7] с использованием тензорного подхода получена дивергентная система уравнений, описывающая динамику длинноволновых возмущений в пленке жидкости, стекающей по вертикальной подложке. Эту систему уравнений можно свести к одному уравнению для функции тока с соответствующими граничными условиями. В отличие от других длинноволновых моделей в модели [7] течение рассматривается в области с заранее определенной границей, а дивергентная форма уравнений позволяет использовать для построения решений эффективные численные алгоритмы, разработанные для консервативных разностных схем.

В настоящей работе представлена модель волнового течения пленки, основанная на интегральном подходе и разложении скорости в ряд по системе базисных функций. В качестве базисных функций выбирается не конечное число полиномов, как это сделано в работе [6], а счетное множество функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи. В отличие от работы [2] в представленной модели не используется автомодельность профиля скорости, поэтому он обладает большей “степенью свободы”.

1. Уравнения нестационарного течения пленки. Рассмотрим двумерное течение пленки вязкой жидкости на плоской подложке, наклоненной к горизонту под углом θ . Введем декартову систему координат с осью Ox , направленной вдоль наклонной плоскости, и осью Oy , направленной по нормали к подложке. Возмущение поверхности пленки будем считать длинноволновым ($h/\lambda \ll 1$, где h — толщина пленки; λ — длина волны) и используем погранслоное приближение, полагая $\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial y^2$, $\partial h/\partial x \ll 1$. В первом приближении по параметру ε течение жидкости описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (1.1)$$

$$-g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

На подложке ($y = 0$) выполняются условия $u = 0$, $v = 0$, а на поверхности пленки ($y = h(x, t)$) — кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} = v_s \quad (1.4)$$

и динамические условия

$$p = p_g - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1.5)$$

где p_g — давление газа над поверхностью жидкости. Из выражения (1.2) с учетом (1.5) находим давление в жидкости:

$$p = p_g + \rho g \cos \theta (h - y) - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

Проинтегрировав соотношение (1.1) по толщине пленки, с учетом (1.3)–(1.6) получаем уравнение импульса в интегральной форме

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy = gh \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1.7)$$

($q = \int_0^h u dy$ — расход жидкости). Условие (1.4) приведем к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (1.8)$$

В случае если профиль скорости $u(x, t)$ задан, поток импульса $\int_0^h u^2 dy$ и касательное на-

пряжение на стенке $\mu(\partial u/\partial y)|_{y=0}$ можно выразить через расход q и получить замкнутую систему двух уравнений для q и h . Так, в предположении, что профиль является параболическим: $u/u_s = 2\eta - \eta^2$ ($\eta = y/h$), получается интегральная модель [2], в которой уравнение импульса имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 1,2 \frac{\partial (q^2/h)}{\partial x} = gh \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{3\nu q}{h^2}. \quad (1.9)$$

2. Разложение скорости в ряд по базисным функциям. На интервале $0 < \eta < 1$ введем следующие линейно независимые базисные функции (гармоники) $f_j(\eta)$:

$$f_j(\eta) = \sin \omega_j \eta, \quad \omega_j = (2j - 1)\pi/2, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

Гармоники $f_j(\eta)$ удовлетворяют условиям $f_j(0) = (df_j/d\eta)|_{\eta=1} = 0$, $f_j(1) = (-1)^{j-1}$ и

ортогональны друг другу, т. е. $\int_0^1 f_j f_i d\eta = \delta_{ij}/2$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Скорость жидкости u представим в виде разложения в ряд по гармоникам

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x, t) f_j(\eta). \quad (2.2)$$

Для скорости граничные условия на стенке и на поверхности пленки выполняются автоматически, поскольку каждый член бесконечного ряда (2.2) удовлетворяет этим условиям. С использованием (2.2) выражение для расхода жидкости также можно представить в виде ряда

$$q = h \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^1 \sin \omega_j \eta d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h a_j}{\omega_j} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j. \quad (2.3)$$

Здесь $q_j(x, t) = h a_j(x, t)/\omega_j$ — вклад j -й гармоники в общий расход. Выражение для потока импульса также представим в виде разложения в ряд. С учетом ортогональности гармоник получаем

$$\int_0^h u^2 dy = h \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \int_0^1 f_j^2 d\eta = \frac{1}{2} h \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_j^2 q_j^2}{2h}. \quad (2.4)$$

Касательное напряжение на стенке также разложим в ряд

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\nu}{h} \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a_j \cos(\omega_j \eta) \Big|_{\eta=0} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu \omega_j^2 q_j}{h^2}. \quad (2.5)$$

Слагаемые в скобках в правой части уравнения (1.7) с помощью тождества $1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_j^2}$ (см. подп. 2.2) представим в виде ряда

$$gh \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.3)–(2.6) в (1.7), уравнение импульса запишем в виде ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \frac{\partial (q_j^2/h)}{\partial x} + \frac{\nu \omega_j^2 q_j}{h^2} - \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right) = 0. \quad (2.7)$$

Поскольку вследствие линейной независимости гармоник каждое слагаемое ряда (2.7) равно нулю, для $q_j(x, t)$ имеем

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \frac{\partial (q_j^2/h)}{\partial x} = \frac{2gh}{\omega_j^2} \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{\nu \omega_j^2 q_j}{h^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

При этом уравнение (1.8) принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial q_j}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

2.1. Сравнение предлагаемой модели с другими моделями. Уравнения (2.8) и уравнение импульса в модели [2] имеют одну и ту же структуру, однако различаются числовыми коэффициентами. В частности, для первой гармоники ($\omega_1 = \pi/2 \approx 1,5708$) уравнение (2.8) имеет вид

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + 1,234 \frac{\partial (q_1^2/h)}{\partial x} = 0,8106gh \left(\sin \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{2,467\nu q_1}{h^2}. \quad (2.10)$$

Видно, что различие числовых коэффициентов уравнений (1.9), (2.10) не очень существенно. Заметим, что в предлагаемой модели профиль скорости зависит от x и t . Таким образом, данная модель в некотором роде является обобщением модели [2], но в отличие от нее обладает большей “степенью свободы” для формы профиля скорости.

Сравним уравнение (2.10) и уравнение импульса модели [6] первого порядка, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{17q}{7h} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{9q^2}{7h^2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{5}{6} \left(h - h \frac{\partial h}{\partial x} \operatorname{ctg} \theta + \Gamma h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{5q}{2h^2},$$

где $\Gamma = \sigma/(\rho^4 \nu^4 g \sin \theta)^{1/3}$. Записав числовые коэффициенты этого уравнения в виде десятичных дробей, получаем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2,428 \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} + 1,286 \frac{q^2}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} = 0,833 \left(h - h \frac{\partial h}{\partial x} \operatorname{ctg} \theta + \Gamma h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{2,5q}{h^2}. \quad (2.11)$$

В этих безразмерных переменных уравнение (2.10) принимает вид

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + 2,468 \frac{q_1}{h} \frac{\partial q_1}{\partial x} + 1,234 \frac{q_1^2}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} = 0,8106 \left(h - h \frac{\partial h}{\partial x} \operatorname{ctg} \theta + \Gamma h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{2,467q_1}{h^2}. \quad (2.12)$$

Видно, что числовые коэффициенты уравнений (2.11), (2.12) различаются только во втором десятичном знаке. Поскольку первая гармоника дает основной вклад в общий расход, можно предположить, что рассматриваемая модель близка к модели [6] первого порядка.

Рассмотрим невозмущенное течение пленки при $h(x, t) = h_0$, $q_j(x, t) = q_{0j}$. Приравнивая правую часть уравнения (2.8) к нулю, находим $q_{0j} = 2gh_0^3 \sin \theta / (\nu \omega_j^4)$, $j = 1, 2, 3, \dots$. С увеличением номера гармоники j компоненты q_{0j} быстро убывают (обратно пропорционально четвертой степени нечетных чисел). Складывая q_{0j} и используя тождество

$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^4} = \frac{1}{6}$ (см. подп. 2.2), получаем общий расход

$$q_0 = \sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} = \frac{2gh_0^3 \sin \theta}{\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^4} = \frac{gh_0^3 \sin \theta}{3\nu}.$$

2.2. *Вывод числовых тождеств с помощью разложения в ряд по гармоникам.* Любую непрерывную функцию $F(\eta)$, определенную на интервале $0 < \eta < 1$, можно представить в виде ряда $F(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin \omega_j \eta$, где коэффициенты a_j определяются формулой

$a_j = 2 \int_0^1 F(\eta) \sin \omega_j \eta d\eta$. Для вычисления интегралов вида $\int_0^1 \eta^m \sin \omega_j \eta d\eta$ используем рекуррентную формулу

$$\int_0^1 \eta^m \sin \omega_j \eta d\eta = \frac{m(-1)^{j-1}}{\omega_j^2} - \frac{m(m-1)}{\omega_j^2} \int_0^1 \eta^{m-2} \sin \omega_j \eta d\eta.$$

Таким образом, находим

$$\int_0^1 \eta \sin \omega_j \eta d\eta = \frac{(-1)^{j-1}}{\omega_j^2}, \quad \int_0^1 \frac{\eta^2}{2} \sin \omega_j \eta d\eta = \frac{(-1)^{j-1}}{\omega_j^2} - \frac{1}{\omega_j^3},$$

$$\int_0^1 \frac{\eta^3}{3} \sin \omega_j \eta \, d\eta = \frac{(-1)^{j-1}}{\omega_j^2} - \frac{2(-1)^{j-1}}{\omega_j^4}.$$

Комбинируя эти три равенства, получаем

$$\int_0^1 \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) \sin \omega_j \eta \, d\eta = \frac{1}{\omega_j^3}, \quad \int_0^1 \left(\eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \sin \omega_j \eta \, d\eta = \frac{2(-1)^{j-1}}{\omega_j^4}.$$

Таким образом, имеем разложения в ряд следующих функций:

$$\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{j-1}}{\omega_j^2} \sin \omega_j \eta; \quad (2.13)$$

$$\eta - \frac{\eta^2}{2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_j^3} \sin \omega_j \eta; \quad (2.14)$$

$$\eta - \frac{\eta^3}{3} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{j-1}}{\omega_j^4} \sin \omega_j \eta. \quad (2.15)$$

Подставляя $\eta = 1$ в равенства (2.13), (2.15), получаем тождества

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^4} = \frac{1}{6}.$$

Равенство (2.14) возведем в квадрат и проинтегрируем по η от 0 до 1. В результате имеем

$$\int_0^1 \left(\eta^2 - \eta^3 + \frac{\eta^4}{4} \right) d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_j^6}. \quad \text{Вычислив интеграл } \int_0^1 \left(\eta^2 - \eta^3 + \frac{\eta^4}{4} \right) d\eta = \frac{2}{15}, \text{ получаем}$$

$$\text{тождество } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^6} = \frac{1}{15}.$$

Равенство (2.15) возведем в квадрат и проинтегрируем по η от 0 до 1. В результате

$$\text{имеем } \int_0^1 \left(\eta^2 - \frac{2\eta^4}{3} + \frac{\eta^6}{9} \right) d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8}{\omega_j^8}. \quad \text{Вычислив интеграл } \int_0^1 \left(\eta^2 - \frac{2\eta^4}{3} + \frac{\eta^6}{9} \right) d\eta = \frac{68}{315},$$

$$\text{получаем тождество } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^8} = \frac{17}{630}.$$

3. Анализ устойчивости невозмущенного течения. Выберем в качестве масштаба расстояния толщину невозмущенной пленки h_0 и введем масштабы скорости $u_m = gh_0^2/(3\nu)$, времени $t_m = h_0/u_m$, расхода $q_m = gh_0^3/(3\nu)$. Сохранив буквенные обозначения, перейдем к безразмерным переменным x/h_0 , h/h_0 , q_j/q_m , t/t_m . Уравнения (2.8), (2.9) в безразмерных переменных принимают вид

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2} \frac{\partial (q_j^2/h)}{\partial x} = \frac{3}{\text{Re}_m} \left(2h \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\omega_j^2 q_j}{3h^2} \right) + \frac{2h \text{We}}{\omega_j^2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \quad (3.1)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial q_j}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $We = (3 Fi / Re_m^5)^{1/3}$ — число Вебера; критерий $Re_m = gh_0^3 / (3\nu^2)$ связан с числом Рейнольдса пленки соотношением $Re = Re_m \sin \theta$. Невозмущенному течению соответствует тривиальное решение $h = 1$, $q_{0j} = 6 \sin \theta / \omega_j^4$. Для анализа устойчивости течения положим $h = 1 + H$, $q_j = 6 \sin \theta / \omega_j^4 + Q_j$ и линеаризуем уравнения (3.1), (3.2) относительно малых возмущений H , Q_j :

$$\frac{\partial Q_j}{\partial t} + \frac{6 \sin \theta}{\omega_j^2} \frac{\partial Q_j}{\partial x} + \frac{\omega_j^2 Q_j}{Re_m} = \frac{18H \sin \theta}{\omega_j^2 Re_m} + \left(\frac{18 \sin^2 \theta}{\omega_j^6} - \frac{6 \cos \theta}{\omega_j^2 Re_m} \right) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{2 We}{\omega_j^2} \frac{\partial^3 H}{\partial x^3}; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial Q_j}{\partial x} = 0. \quad (3.4)$$

3.1. *Дисперсионное уравнение в асимптотике $k Re_m \ll 1$.* Представив в (3.3), (3.4) возмущения H , Q_j в виде $H = H_a \exp(ik(x - ct) + \beta t)$, $Q_j = Q_{ja} \exp(ik(x - ct) + \beta t)$, из (3.3) получаем отношение амплитуд возмущений H_a и Q_{ja}

$$\frac{Q_{ja}}{H_a} = \frac{2}{\omega_j^4} \frac{9 \sin \theta + ik Re_m D_j}{1 + \beta Re_m / \omega_j^2 + ik Re_m (E_j - c) / \omega_j^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.5)$$

где k , c , β — вещественные волновое число, фазовая скорость, временной инкремент волны; $E_j = 6 \sin \theta / \omega_j^2$; $D_j = 9 \sin^2 \theta / \omega_j^4 - (3 \cos \theta / Re_m + We k^2)$.

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем дисперсионное уравнение

$$\beta - ikc + ik \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_j^4} \frac{9 \sin \theta + ik Re_m D_j}{1 + \beta Re_m / \omega_j^2 + ik Re_m (E_j - c) / \omega_j^2} = 0. \quad (3.6)$$

Полагая $\beta Re_m \ll 1$, опустим эту малую величину в знаменателе и используем приближение

$$\frac{1}{1 + ik Re_m (E_j - c) / \omega_j^2} \approx 1 - \frac{ik Re_m (E_j - c)}{\omega_j^2}.$$

Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$\beta - ikc + ik \sum_{j=1}^{\infty} (M_j + ik Re_m N_j) = 0, \quad (3.7)$$

где $M_j = 18 \sin \theta / \omega_j^4$; $N_j = 2D_j / \omega_j^4 - (E_j - c) 18 \sin \theta / \omega_j^6$. Член второго порядка малости $k^2 Re_m^2 / \omega_j^6$ также отбрасывается. Разделяя в (3.7) вещественную и мнимую части, получаем фазовую скорость волны $c = 18 \sin \theta \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^4} = 3 \sin \theta$ и инкремент

$$\beta = k^2 Re_m \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2D_j}{\omega_j^4} - 18 \sin \theta \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_j - c}{\omega_j^6} \right). \quad (3.8)$$

Подставляя в соотношение (3.8) фазовую скорость волны, выражения для D_j , E_j , а также значения сумм $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^8} = \frac{17}{630}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^6} = \frac{1}{15}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^4} = \frac{1}{6}$ (см. подп. 2.1), последовательно находим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2D_j}{\omega_j^4} = 18 \sin^2 \theta \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^8} - 2 \left(\frac{3 \cos \theta}{Re_m} + We k^2 \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^4} = \frac{17}{35} \sin^2 \theta - \left(\frac{\cos \theta}{Re_m} + \frac{We k^2}{3} \right),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_j - c}{\omega_j^6} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{6 \sin \theta}{\omega_j^8} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3 \sin \theta}{\omega_j^6} = -\frac{4 \sin \theta}{105}.$$

В результате получаем

$$\beta = k^2 \operatorname{Re}_m \left(\frac{41}{35} \sin^2 \theta - \frac{\cos \theta}{\operatorname{Re}_m} - \frac{\operatorname{We} k^2}{3} \right). \quad (3.9)$$

В работе [8] из уравнения Орра — Зоммерфельда в асимптотике $k \ll 1$ получено выражение для мнимой части фазовой скорости

$$c_I = 6k \operatorname{Re} / 5 - k(3 \operatorname{ctg} \theta + k^2 SR) / 3, \quad (3.10)$$

где $S = \sigma / (\rho h_m u_m^2 \sin^2 \theta)$. С учетом введенных нормировок из формулы (3.10) получаем

$$\beta = k^2 \operatorname{Re}_m ((6/5) \sin^2 \theta - \cos \theta / \operatorname{Re}_m - \operatorname{We} k^2 / 3). \quad (3.11)$$

Уравнения (3.9), (3.11) различаются лишь коэффициентом (6/5 вместо 41/35). При $k \rightarrow 0$ из (3.9) получаем критическое число Рейнольдса $\operatorname{Re}_* = (35/41) \operatorname{ctg} \theta$, достаточно близкое к значению $\operatorname{Re}_* = (5/6) \operatorname{ctg} \theta$, полученному из уравнения Орра — Зоммерфельда (различие составляет 2,5 %).

3.2. Алгоритм решения дисперсионного уравнения. Учитывая N гармоник, дисперсионное уравнение (3.6) преобразуем следующим образом. Выделим из суммы первую гармонику, дающую основной вклад, затем умножим уравнение на $\operatorname{Re}_m / \omega_1^2$ и запишем в виде

$$\frac{\beta \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} - c \frac{ik \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} + \frac{ik \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} \frac{(18 \sin \theta + 2D_1 ik \operatorname{Re}_m) / \omega_1^4}{1 + \beta \operatorname{Re}_m / \omega_1^2 + ik \operatorname{Re}_m (E_1 - c) / \omega_1^2} + \frac{ik \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} F = 0. \quad (3.12)$$

Здесь F — вклад остальных гармоник:

$$F = \sum_{j=2}^N \frac{2}{\omega_j^4} \frac{9 \sin \theta + ik \operatorname{Re}_m D_j}{1 + \beta \operatorname{Re}_m / \omega_j^2 + ik \operatorname{Re}_m (E_j - c) / \omega_j^2}.$$

Умножив уравнение (3.12) на $1 + \beta \operatorname{Re}_m / \omega_1^2 + ik \operatorname{Re}_m (E_1 - c) / \omega_1^2$, преобразуем его к виду

$$\frac{\beta \operatorname{Re}_m - ikc \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} \left(1 + \frac{\beta \operatorname{Re}_m + (E_1 - c) ik \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} \right) + \frac{ik \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} \frac{18 \sin \theta + 2D_1 ik \operatorname{Re}_m}{\omega_1^4} + \frac{ik \operatorname{Re}_m G}{\omega_1^2} = 0,$$

где $G = (1 + \beta \operatorname{Re}_m / \omega_1^2 + ik \operatorname{Re}_m (E_1 - c) / \omega_1^2) F$. Разделив действительную и мнимую части и проведя преобразования, для β и c получаем

$$\left(\frac{\beta \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \xi \left(\left(c - \frac{3 \sin \theta}{\omega_1^2} \right)^2 - B + G_I \right) + \frac{1}{4}; \quad (3.13)$$

$$\frac{\beta \operatorname{Re}_m}{\omega_1^2} + \frac{1}{2} = \frac{A + G_R}{2(c - 3 \sin \theta / \omega_1^2)}. \quad (3.14)$$

Здесь $G = G_R + G_I ik \operatorname{Re}_m / \omega_1^2$ — комплексное число; $A = 3 \sin \theta (6 / \omega_1^4 - 1 / \omega_1^2)$; $B = 9 \sin^2 \theta / \omega_1^4 - 2D_1 / \omega_1^2$; $\xi = (k \operatorname{Re}_m / \omega_1^2)^2$.

Уравнения (3.13), (3.14) сводятся к одному уравнению относительно неизвестной величины $Z = (\beta \operatorname{Re}_m / \omega_1^2 + 1/2)^2$:

$$Z^2 - Z(0,25 + \xi(G_I - B)) - 0,25\xi(A + G_R / \omega_1^2)^2 = 0.$$

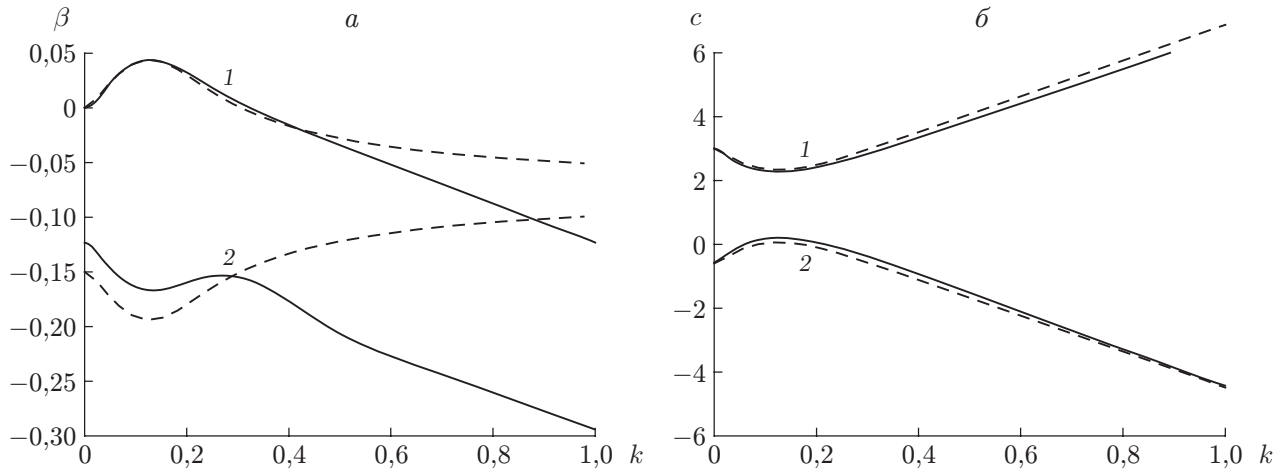


Рис. 1. Дисперсионные зависимости инкремента (а) и фазовой скорости (б) для вертикальной пленки воды при $Re = 20$: сплошные линии — модель, рассмотренная в данной работе, штриховые — модель [2]; 1 — неустойчивая мода, 2 — устойчивая мода

Решая это уравнение как квадратное уравнение, находим

$$Z = 0,5(0,25 + \xi(G_I - B) + \sqrt{(0,25 + \xi(G_I - B))^2 + \xi(A + G_R/\omega_1^2)^2}),$$

$$\beta = (-0,5 \pm \sqrt{Z})\omega_1^2 / Re_m, \quad c = 3 \sin \theta / \omega_1^2 \pm (A + G_R Re_m / \omega_1^2) / 2\sqrt{Z}. \quad (3.15)$$

В (3.15) знаки “+” и “-” соответствуют двум различным модам. Первая мода (знак “+”) описывает неустойчивость, а вторая — затухающие возмущения. Поскольку G_R , G_I зависят от β и c , уравнения (3.15) решались численно методом итераций.

4. Результаты расчетов. На рис. 1 показаны расчетные дисперсионные зависимости временного инкремента $\beta(k)$ и фазовой скорости волны $c(k)$ для пленки воды, стекающей по вертикальной поверхности. На рис. 1,а видно, что для первой моды результаты расчета, выполненного в настоящей работе, незначительно отличаются от результатов расчета по модели [2] при положительном значении инкремента. Однако в области устойчивости, когда значения инкремента отрицательные, при увеличении волнового числа рассматриваемая модель дает более значительное уменьшение инкремента, чем модель [2]. Для затухающей моды различие более существенное. В рассматриваемой модели кривые $\beta(k)$ значительно ближе к кривым, полученным в работе [9] по уравнению Орра — Зоммерфельда, чем к кривым, полученным по модели [2]. Для кривых $c(k)$ (см. рис. 1,б) отличие от модели [2] менее существенное.

На рис. 2 приведены расчетные зависимости пространственного инкремента $\delta(k)$ и фазовой скорости $c(k)$ волны. Пространственный инкремент вычислялся по соотношению Гастера $\delta = \beta / (c + k dc/dk)$. Видно, что расчетные значения инкремента и фазовой скорости хорошо согласуются с экспериментальными данными [10].

На рис. 3 показана зависимость частоты нейтральных волн f_C от числа Рейнольдса $Re = gh_0^3 \sin \theta / (2\nu^2)$. Расчеты выполнены по рассматриваемой модели и по модели [2] для условий экспериментов [10]. На рис. 3 видно, что данные, полученные в настоящей работе, хорошо согласуются с экспериментальными данными, а модель [2] дает больший наклон кривой $f_C(Re)$. Те же зависимости $f_C(Re)$, рассчитанные по различным моделям, приведены на рис. 4 в сравнении с экспериментальными данными [11]. Модель [6] первого порядка дает завышенные значения частоты нейтральных волн. Данные расчета, выполненного

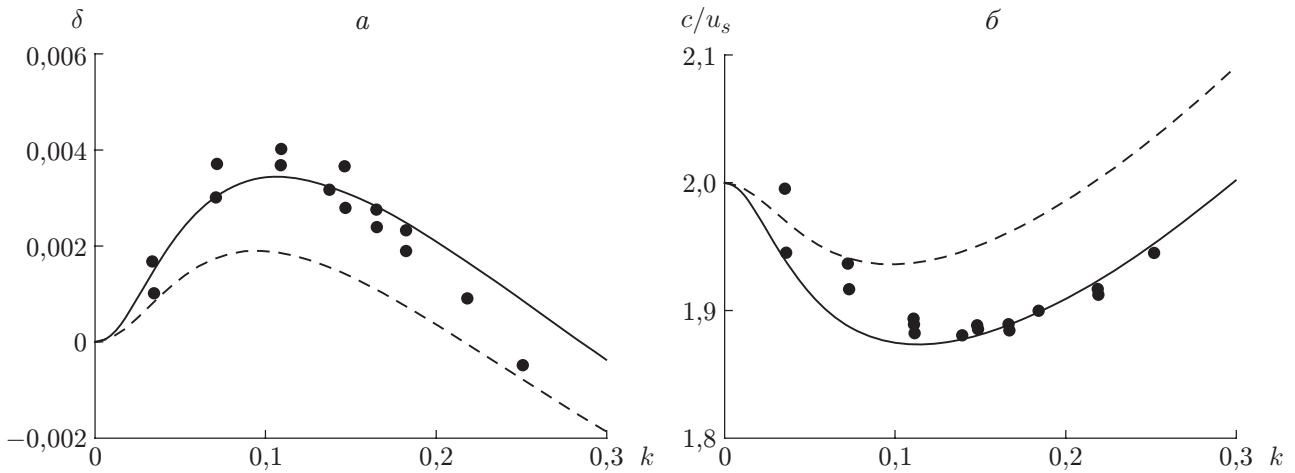


Рис. 2. Зависимости пространственного инкремента (а) и фазовой скорости (б) возбужденных волн при $\theta = 4,6^\circ$, $Re = 23$:
сплошные линии — расчет по рассматриваемой модели, штриховые — расчет по модели [2], точки — данные эксперимента [10] (водолицериновый раствор)

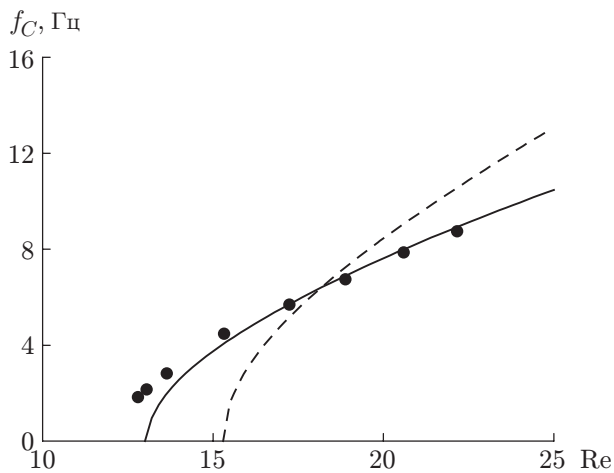


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость частоты нейтральных волн f_C от числа Рейнольдса Re при $\theta = 5,6^\circ$:
точки — данные эксперимента [10] (водолицериновый раствор); штриховая линия — расчет по модели [2], сплошная линия — расчет по рассматриваемой модели

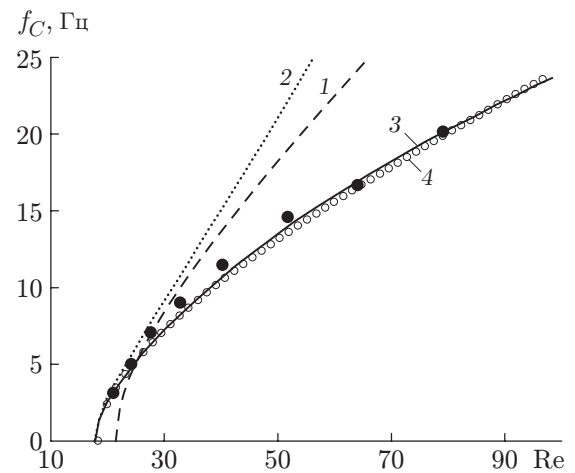


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость частоты нейтральных волн f_C от числа Рейнольдса Re при $\theta = 4^\circ$:
точки — данные эксперимента [11] (водолицериновый раствор); 1 — расчет по модели [2]; 2 — расчет по модели [6] первого порядка; 3 — расчет по упрощенной модели [6] второго порядка; 4 — расчет по рассматриваемой модели

в настоящей работе, хорошо согласуются с данными [10], а также с данными, полученными по упрощенной модели [6] второго порядка.

Таким образом, рассматриваемая модель первого порядка по ε хорошо описывает линейные волны. В частности, она позволяет определить границу области устойчивости так же точно, как упрощенная модель второго порядка [6]. Это достигается за счет удачного выбора системы базисных функций (гармоник), по которым проводится разложение профиля скорости. Тестовые расчеты показали, что для волновых чисел, принадлежащих области неустойчивости, достаточно учитывать 5–6 гармоник. При увеличении количества гармоник до 20 значения β и c изменяются лишь в четвертом десятичном знаке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, № 1. С. 3–28.
2. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
3. Benney D. J. Long waves on liquid films // J. Math. Phys. 1966. V. 45. P. 150–155.
4. Алексеенко С. В. Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
5. Roberts A. J. Low-dimensional models of thin film fluid dynamics // Phys. Lett. A. 1996. V. 212. P. 63–71.
6. Ruyer-Quil C., Manneville P. Improved modeling of flows down inclined planes // Eur. Phys. J. B. 2000. V. 15. P. 357–369.
7. Алексеенко С. В., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю. Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 1. С. 1–4.
8. Yih C. S. Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6, N 3. P. 321–334.
9. Aktershev S. P., Alekseenko S. V. Interfacial instabilities in an annular two-phase flow // Russ. J. Engng Thermophys. 1996. V. 6, N 4. P. 307–320.
10. Liu J., Paul J. D., Gollub J. P. Measurements of the primary instabilities of film flow // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 69–101.
11. Liu J., Schneider B., Gollub J. P. Three-dimensional instabilities of film flows // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 1. P. 55–63.

*Поступила в редакцию 2/V 2012 г.,
в окончательном варианте — 16/VIII 2012 г.*