

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

В данной работе исследуются спиральные волны на поверхности вязкой пленки жидкости, стекающей под действием силы тяжести по вертикальной трубе. Для этого рассматриваются некоторые специальные решения модельного уравнения, описывающего пространственные длинноволновые возмущения на такой пленке в случае малых расходов.

Возмущения на поверхности цилиндрической пленки исследовались и ранее, но, как правило, при этом изучался только случай аксиально-симметричных возмущений.

Рассмотрим течение пленки вязкой жидкости по внешней поверхности цилиндра радиуса R . При любых расходах уравнения Навье—Стокса имеют решения с толщиной пленки $h_0 = \text{const}$. Мы ограничимся случаем больших цилиндров, для которых справедливо соотношение $h_0/R \ll 1$. Чтобы это допущение было удобно применять, при записи уравнений движения в цилиндрической системе координат вместо радиальной координаты r будем использовать новую переменную (рис. 1)

$$(1) \quad r' = r - R.$$

В дальнейшем штрих опускаем.

Пусть V_0 — характерная скорость при безволновом режиме течения пленки с толщиной h_0 , L — характерный продольный размер возмущения.

Используя h_0/V_0 , V_0 , ρgh_0 как масштабы времени, скорости и давления, а h_0 и L — как масштабы длины в направлениях r и x соответственно, запишем уравнения движения для пленки в безразмерном виде

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V}\mathbf{V})u = \frac{1}{\text{Fr}} - \frac{1}{\text{Fr}}\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{V}\mathbf{V})v - \frac{\delta}{1 + \delta r}w^2 = -\frac{1}{\text{Fr}}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}}\left[\Delta v - \frac{\delta^2}{(1 + \delta r)^2}v - \frac{2\delta^2}{(1 + \delta r)^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right],$$

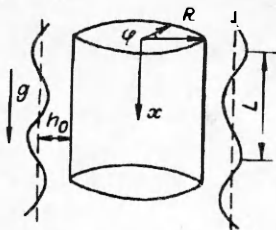
$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{V}\mathbf{V})w + \frac{\delta}{1 + \delta r}vw = -\frac{1}{\text{Fr}}\frac{\delta}{1 + \delta r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\text{Re}}\left[\Delta w - \frac{\delta^2 w}{(1 + \delta r)^2} + \frac{2\delta^2}{(1 + \delta r)^2}\frac{\partial v}{\partial r}\right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\delta}{1 + \delta r}v + \frac{\delta}{1 + \delta r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

где

$$\mathbf{V}\mathbf{V} = v\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\delta}{1 + \delta r}w\frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon u\frac{\partial}{\partial x};$$

$$\Delta = \frac{1}{1 + \delta r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\delta^2}{(1 + \delta r)^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\delta}{1 + \delta r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right).$$



Динамические граничные условия на твердой ($r = 0$) и свободной границе соответственно имеют вид

$$(3) \quad u = v = w = 0 \quad (r = 0);$$

$$(4) \quad [p - \delta \text{We}(K_1 + K_2)]\frac{n_i}{\text{Fr}} - \sigma_{ik}n_k = 0 \quad (r = h).$$

Рис. 1

В (4) n_i — компоненты вектора единичной нормали к свободной поверхности:

$$(n_r, n_\varphi, n_x) \equiv \left(1, -\frac{\delta}{1+\delta h} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}\right) / \left(1 + \frac{\delta^2}{(1+\delta h)^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2};$$

K_i — безразмерные главные кривизны:

$$K_1 + K_2 = \left\{ (1+\delta h)^2 (1+\varepsilon^2 h_x^2) - \frac{\varepsilon^2}{\delta} (1+\delta h)^3 h_{xx} - \delta(1+\delta h) h_{\varphi\varphi} + \right. \\ \left. + 2\delta^2 h_\varphi^2 - \delta\varepsilon^2(1+\delta h) [h_{xx} h_\varphi^2 - 2h_{\varphi x} h_\varphi h_x + h_{\varphi\varphi} h_x^2] \right\} / \\ / ((1+\delta h)^2 (1+\varepsilon^2 h_x^2) + \delta^2 h_\varphi^2)^{3/2}$$

(здесь и ниже индекс у h означает дифференцирование по соответствующей переменной); σ_{ik} — компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\delta}{1+\delta r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\delta}{1+\delta r} w \right], \\ \sigma_{xr} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\delta}{1+\delta r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\delta}{1+\delta r} v \right], \\ \sigma_{\varphi x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\delta}{1+\delta r} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xx} = \frac{2}{\text{Re}} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}.$$

На свободной границе выполняется также кинематическое условие

$$(5) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\delta}{1+\delta h} w \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \varepsilon u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (r = h).$$

В (2)–(5) в качестве параметров входят: $\varepsilon = h_0/L$, $\delta = h_0/R$, число Рейнольдса $\text{Re} = h_0 V_0/\nu$, число Фруда $\text{Fr} = V_0^2/g h_0$, число Вебера $\text{We} = \sigma/\rho g h_0^2$. Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости; g — ускорение свободного падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости.

Ограничиваясь рассмотрением длинноволновых возмущений, будем полагать, что $\varepsilon \ll 1$, а порядок δ не больше ε , т.е.

$$(6) \quad \delta = S\varepsilon, \quad S \leq 1.$$

Ищем решение задачи (2)–(5) в виде рядов по ε :

$$(7) \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad v = \varepsilon v_1 + \dots, \\ w = \varepsilon w_1 + \dots, \quad p = \varepsilon p_1 + \dots$$

Подставляя (7) в исходную систему и приравнявая с учетом (6) коэффициенты при одинаковых степенях ε нулю, после громоздких вычислений нетрудно получить выражения для скоростей:

$$(8) \quad u_0 = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(rh - \frac{r^2}{2} \right), \\ u_1 = \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} h_x \left[\frac{r^4}{24} h - \frac{r}{6} h^4 \right] - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \text{We} \varepsilon^2 [S^2 h_x + \Delta h_x] \left(\frac{r^2}{2} - hr \right) + \\ + S \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(\frac{r^3}{6} - \frac{r^2}{2} h + \frac{h^2}{2} r \right) + \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} h_x \left(\frac{r^3}{6} - \frac{r}{2} h^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= -\frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{r^2}{2} h_x, \\
v_2 &= \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \text{We} \varepsilon^2 \left\{ \frac{r^3}{6} (S^2 \Delta h + \Delta^2 h) - \frac{r^2}{2} (S^2 h \Delta h + h \Delta^2 h + S^2 h_\varphi \Delta h_\varphi + \right. \\
&\quad \left. + h_x \Delta h_x + S^4 h_\varphi^2 + S^2 h_x^2) \right\} + S \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{2} h \right) h_x - \\
&\quad - \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} \left(h_x^2 \left(\frac{r^5}{120} - \frac{r^2}{3} h^3 \right) + h_{xx} \left(\frac{r^5}{120} h - \frac{r^2}{12} h^4 \right) \right) - \\
&\quad - \frac{\text{Re}^4}{\text{Fr}} \left(h_{xx} \left(\frac{r^4}{24} - \frac{r^2}{4} h^2 \right) - h_x h_x h \frac{r^2}{2} \right), \\
w_1 &= S \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \text{We} \varepsilon^2 (S^2 h_\varphi + \Delta h_\varphi) \left(rh - \frac{r^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. При этом полагалось, что справедливы соотношения

$$(9) \quad \text{We} \varepsilon^2 \sim 1, \text{Re} \leq 1.$$

Подставляя (8) в кинематическое условие (5) и ограничиваясь учетом членов до порядка ε^2 включительно, для возмущенной поверхности h имеем

$$\begin{aligned}
(10) \quad h_t + \varepsilon \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} h^2 h_x + \varepsilon^2 \left\{ S \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{h^3}{3} h_x + \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} \left[\frac{5}{6} h_x h_x h^3 - \frac{5}{2} h_{xx} h^4 \right] - \right. \\
\left. - \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} \left[\frac{9}{20} h_x^2 h^5 - \frac{3}{40} h^6 h_{xx} \right] + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \text{We} \varepsilon^2 [(S^2 h_x^2 + h_x \Delta h_x) h^2 + \right. \\
\left. + \frac{1}{3} (S^2 h^3 \Delta h + h^3 \Delta^2 h) + S^2 h^2 h_\varphi \Delta h_\varphi + S^4 h_\varphi^2 h^2] \right\} = 0.
\end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением слабонелинейных возмущений, поэтому функцию h представим в виде

$$(11) \quad h = 1 + \varepsilon H.$$

Используя метод разных временных масштабов, введем набор новых переменных:

$$(12) \quad t_n = \varepsilon^n t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отметим, что в качестве характерной скорости V_0 будем брать значение скорости u_0 на свободной поверхности при безволновом режиме течения. Отсюда следует

$$(13) \quad \text{Re}/\text{Fr} = 2.$$

Подставляя (11), (12) в (10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε нулю, с учетом (9), (13) из первого приближения получим

$$\frac{\partial H}{\partial t_1} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

т.е.

$$H = H(\xi), \quad \xi = x - 2t_1.$$

Рассмотрев второе приближение, для определения H приходим к нелинейному уравнению

$$(14) \quad \frac{\partial H}{\partial t_2} + \frac{2}{3} S \frac{\partial H}{\partial \xi} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{8}{15} \text{Re} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{2}{3} \text{We} \varepsilon^2 (\Delta H S^2 + \Delta^2 H) = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Теперь уместно уточнить, как выбирается продольный масштаб длины L . Если в (14) пренебречь нелинейным членом, то из линеаризованного уравнения следует, что тривиальное решение $H = 0$ неустойчиво к возмущениям вида

$$\exp(i\alpha(\xi - ct_2) + in\varphi)$$

с компонентами волнового вектора (α, n) , удовлетворяющими неравенству

$$(15) \quad \frac{8}{15} \operatorname{Re} \alpha^2 + \frac{2}{3} \operatorname{We} \varepsilon^2 \{S^2(\alpha^2 + S^2 n^2) - (\alpha^2 + S^2 n^2)^2\} > 0$$

(n — натуральные числа, α — вещественные).

Область существования затухающих возмущений ($c_i < 0$) определяется вместо (15) неравенством противоположного знака ($<$). Соответственно волновые числа нейтральных возмущений должны удовлетворять уравнению

$$(16) \quad \frac{8}{15} \operatorname{Re} \alpha^2 + \frac{2}{3} \operatorname{We} \varepsilon^2 \{S^2(\alpha^2 + S^2 n^2) - (\alpha^2 + S^2 n^2)^2\} = 0.$$

Определим характерный продольный масштаб длины L таким образом, чтобы нейтральное волновое число α_n аксиально-симметричных возмущений ($n = 0$) было равно единице:

$$(17) \quad \alpha_n = 1.$$

Тогда из (16) с учетом (6) следует

$$(18) \quad \varepsilon = \frac{h_0}{L} = \delta(1 + 0,8 \operatorname{Re} / \operatorname{We} \delta^2)^{1/2}$$

и соответственно

$$S = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{L}{R} = 1 / (1 + 0,8 \operatorname{Re} / \operatorname{We} \delta^2)^{1/2} < 1.$$

Нормировка (17) достаточно удобна.

Введем новую координату

$$\xi_1 = \xi - \frac{2}{3} S t_2$$

и сделаем замену:

$$(19) \quad \tau = \frac{2}{3} \operatorname{We} \varepsilon^2 t_2, \quad H = \frac{2}{3} \operatorname{We} \varepsilon^2 H_1.$$

Тогда уравнение (14), учитывая соотношение (19), можно переписать (индекс у H_1 опускаем):

$$(20) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + S^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H = 0.$$

Уравнение (14) впервые получено, по-видимому, в работе [1]. Правда, при его выводе и дальнейшем анализе там были использованы другие характерные масштабы и соответственно другие параметры. Для наших целей запись (20) более удобна.

Таким образом, исследование возмущений на пленке, стекающей по поверхности вертикального цилиндра, в рамках используемых ограничений сводится к анализу решений уравнения (20). В случае аксиально-симметричных решений ($H = H(\tau, \xi)$) оно переходит в хорошо известное уравнение, которое часто называют уравнением Курамото—Сивашинского:

$$(21) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0$$

(строго говоря, между уравнением Курамото—Сивашинского и (21) есть отличие в нелинейном члене).

При предельном переходе от цилиндрической к плоской поверхности $S \rightarrow 0$. Вводя в этом случае вместо координаты φ новую координату $z = R\varphi/L$, от уравнения (20) перейдем к

$$(22) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 H = 0.$$

Уравнение (22) получено в [2] при исследовании пространственных возмущений на вертикальной плоской пленке.

В данной работе ограничимся поиском решений спирального типа для уравнения (20), т.е. таких, для которых справедливо

$$(23) \quad H = H(\tau, \eta), \quad \eta = \xi + \gamma\varphi.$$

Так как φ — угловая координата, то любое решение уравнения (20) должно быть периодическим по φ с периодом, укладывающимся на интервале $0 - 2\pi$ целое число раз ($n \geq 1$). Поэтому ясно, что если решения типа (23) для уравнения (20) существуют, то они должны быть периодическими и по переменной η .

Пусть решение (23) существует и имеет период λ . Ясно, что период по переменной ξ также будет λ . При этом, как уже отмечалось, период по переменной φ должен быть равен $2\pi/n$. Легко понять, что, чтобы это было возможно, значение γ в (23) должно быть не произвольно, а удовлетворять соотношению

$$(24) \quad \lambda = 2\pi\gamma/n, \quad \text{или } n/\gamma = \alpha$$

(α — волновое число).

Для нахождения у уравнения (20) решений спирального типа (23) используем замену:

$$(25) \quad H(\tau, \eta) = AH_1(\tau_1, \eta_1), \\ \tau_1 = \kappa\tau, \quad \eta_1 = p\eta,$$

$$p = (1 + S^4\gamma^2)^{1/2}/(1 + S^2\gamma^2), \quad \kappa = p^2(1 + S^4\gamma^2), \quad A = \kappa/p.$$

Тогда для H_1 уравнение (20) переписется следующим образом:

$$(26) \quad \frac{\partial H_1}{\partial \tau_1} + 4H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \eta_1} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^4 H_1}{\partial \eta_1^4} = 0$$

(т.е. для функции H_1 имеем уравнение (21)).

Уравнение (26) к настоящему времени стало классическим. К нему часто приходят при описании волновых процессов в различных активно-диссипативных средах. Известно, что среди его решений существуют и стационарно бегущие периодические решения. Если для некоторого периодического решения H_1 можно удовлетворить соотношениям (24), (25), то тогда связанное с ним решение H из (23) и будет соответствующим спиральным решением уравнения (20).

Пусть α_x — волновое число для решения H , а α_ξ — волновое число для решения H_1 . Легко показать, что, чтобы выполнялись соотношения (24), (25), эти волновые числа должны удовлетворять уравнению

$$(27) \quad \alpha_\xi^2(\alpha_x^2 + S^4n^2) = (\alpha_x^2 + S^2n^2)^2.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению по формуле (27) для известного решения H_1 с волновым числом α_ξ неизвестного волнового числа α_x . Соответствующее решение H определяется потом по формулам (23), (25).

Так как в (27) n присутствует только в четных степенях, то ясно, что если уравнение (27) имеет решение α_x , то оно одно и то же для $\pm n$. Это значит, что если существует спиральное решение с левой закруткой (при движении по уровню постоянной фазы в сторону возрастания координаты ξ поворот по координате φ осуществляется против часовой стрелки), то есть и симметричное ему решение с правой закруткой. Поэтому в дальнейшем не будем упоминать о решениях с $n < 0$.

Хорошо известно (см., например, [3—6]), что уравнение (26) имеет стационарно бегущие решения вида

$$(28) \quad H_1 = H_1(\eta_1 - c\tau_1).$$

Среди решений (28) есть счетное множество периодических и солитонных решений. Как легко видеть из (27), спиральных решений, соответствующих солитонным решениям H_1 , не существует.

Волновые числа α_x всего множества периодических решений (28) лежат в интервале $0 < \alpha_x < 1$. Это множество разбивается на два класса. К первому относятся решения со значениями фазовой скорости $c = 0$. Все они антисимметричны. Среди них существует одно семейство решений, традиционно называемое первым семейством, которое ответвляется с бесконечно малой амплитудой от тривиального решения при $\alpha_x = 1$ и продолжается до волнового числа $\alpha_x = 0,4979$. Для волн этого семейства есть интервал волновых чисел $(0,77 < \alpha_x < 0,84)$, устойчивых ко всем возмущениям. Волновые числа других антисимметричных семейств меньше 0,42.

Для решений второго типа значения фазовой скорости $c \neq 0$ (и в силу симметрии уравнения (26) достаточно упоминать только о решениях с $c > 0$). Волновые числа этих волн лежат в интервале $0 < \alpha_x < 0,554$. В пределе, когда волновое число стремится к нулю, эти периодические решения переходят в уединенные волны.

Для решений (25), соответствующих антисимметричным решениям, поверхность пленки представляет собой спиральные жгуты, в которых возвышения подобны впадинам. Для решений с $c > 0$ такого подобия нет. Возможное число жгутов n и шаг такой спиральной волны $\lambda = 2\pi/\alpha_x$ зависят от значений параметра S . Действительно, выпишем явно корни квадратного уравнения (27):

$$(29) \quad \alpha_{x_{1,2}}^2 = \{ \alpha_x^2 - 2S^2n^2 \pm [(\alpha_x^2 - 2S^2n^2)^2 - 4S^4n^2(n^2 - \alpha_x^2)]^{1/2} \} / 2.$$

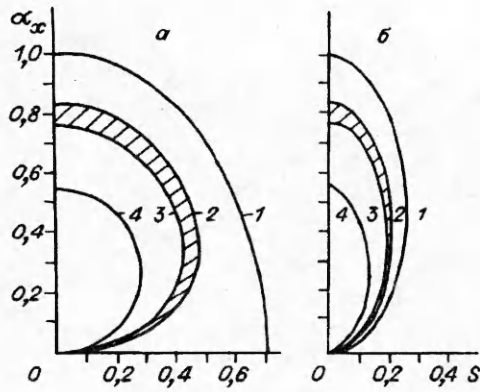
Так как нужные нам значения α_x удовлетворяют неравенству

$$0 \leq \alpha_x \leq 1,$$

ясно, что если эти корни вещественны, то они либо оба отрицательны, либо оба положительны. В последнем случае имеем два различных волновых числа α_x , отвечающих одному и тому же α_x , т.е. одно «плоское» решение (26) «порождает» два стационарно бегущих спиральных решения (23) (с одним и тем же $n > 0$), отличающихся длинами волн и наклоном спиралей. Для θ (угол между осью продольной координаты ξ и линиями постоянной фазы $\eta_1 = \text{const}$) справедливо соотношение

$$\text{tg}\theta = \alpha_x/n.$$

Из (29) легко видеть, что при фиксированных значениях n и S значение α_{x_1} будет наибольшим, а α_{x_2} — наименьшим при $\alpha_x = 1$. На плоскости (α_x, S) эти значения очерчивают область существования спиральных решений с соответствующим азимутальным числом n . На рис. 2 эта область находится внутри кривой 1. Здесь $a, б$ отвечают $n = 1$ и 2. Как видно из (29) и рис. 2, a , для $n = 1$ минимально возможное волновое число спиральной волны $\alpha_x = 0$, т.е. для любого S , при котором такие решения существуют, можно построить спиральное решение со сколь угодно большим шагом по продольной координате. Для любого $n \geq 2$ и любого допустимого S спи-



Р и с. 2

ральное решение не может иметь угол θ меньше, чем некоторый конечный угол.

Интервал допустимых значений S для этих решений определяется неравенством

$$(30) S^2 \leq S_*^2 = [n - (n^2 - 1)^{1/2}] / 2n.$$

Для S_* при $\alpha_{\xi} = 1$ имеем

$$\alpha_{x_1} = \alpha_{x_2} = [(1 - S_*^2 n^2) / 2]^{1/2}.$$

Из (30) следует, что для достаточно больших значений S ($S > S_1 = 1/\sqrt{2}$) запрещены все спиральные волновые режимы. Как видно из (6), (18), это случай достаточно «малых» цилиндров. Для значений $S > S_2 = S_1(1 - \sqrt{3}/2)^{1/2}$ запрещены режимы с числом жгутов $n > 1$ (т.е. для «умеренно» больших цилиндров разрешены спиральные режимы только с периодом 2π по угловой координате) и т.д. С уменьшением S растут как интервал возможных волновых чисел для таких режимов, так и разрешенное число их жгутов.

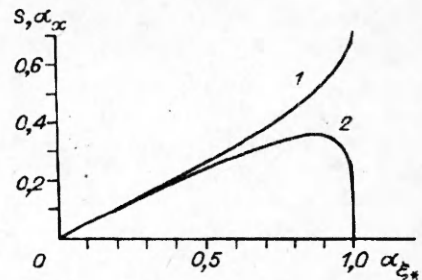
Если для данного значения S есть конечный интервал допустимых волновых чисел α_x , то, как легко понять из (29), существует $\alpha_{\xi} < 1$, для которого $\alpha_{x_1} = \alpha_{x_2}$. Это означает, что волновые числа соответствующих плоских решений (26) лежат в интервале $\alpha_{\xi} \leq \alpha_x \leq 1$. Сказанное поясняют кривые на рис. 2. Все они представляют собой линии $\alpha_{\xi} = \text{const}$, а именно: кривые 1—4 отвечают $\alpha_{\xi} = 1; 0,84; 0,77; 0,554$.

Зная зависимость $S = S(\alpha_{\xi})$, можно определить, в частности, семейства какого типа из всех возможных решений (26) могут порождать соответствующие спиральные решения (23). Так, на рис. 3 кривой 1 представлена такая зависимость для $n = 1$, кривой 2 показана зависимость $\alpha_x = \alpha_x(S(\alpha_{\xi}), \alpha_{\xi})$. Из этих данных легко понять, например, когда только первое семейство решений (26) будет давать спиральные решения (это будет при тех значениях S , для которых $\alpha_{\xi} \geq 0,554$), при каких значениях S возможны устойчивые спиральные режимы ($0,77 \leq \alpha_{\xi} \leq 0,84$) и т.п.

На рис. 2 область устойчивости показана штриховкой. Видно, что для значений $S < S_* = S(\alpha_{\xi} = 0,77)$ существуют две области устойчивых ко всем спиральным возмущениям волновых чисел α_x . Эти области для $S \geq S_*$ сливаются в одну.

Область существования спиральных решений, имеющих фазовую скорость, большую, чем скорость бесконечно малых возмущений (решения, которым отвечают решения (26) с $c > 0$), существенно уже. Она показана на рис. 2 кривыми 4.

Таким образом, используя соотношения (23) — (27), удастся получить достаточно много информации по спиральным волновым режимам на поверхности вертикальных цилиндров. Учитывая, что параметр S представляет собой,



Р и с. 3

согласно (6), (18), комбинацию геометрических и динамических факторов, в рамках этой модели получаем, в частности, качественно разумный результат — при фиксированных значениях числа Рейнольдса волновая картина возможных спиральных волн тем богаче, чем большие цилиндры рассматриваются (S уменьшается с ростом радиуса цилиндра R). Такой же вывод справедлив, если для фиксированного цилиндра увеличивать расход жидкости.

Автор выражает благодарность фонду Сороса за поддержку этой работы, которая является также частью проекта № 94-01-00767-а, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shlang T., Sivashinsky G.I. Irregular flow of a liquid film down a vertical column // J. de phys. — 1982. — V. 43. — P. 459—466.
2. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений // Гидродинамика: Сб. науч. тр. — Пермь, 1974. — Вып. 5. — С. 91—104.
3. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1974. — № 3. — С. 28—34.
4. Цвелодуб О.Ю. Стационарно бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. — № 4. — С. 142—146.
5. Демехин Е.А. Ветвление решения задачи о стационарно бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1983. — № 3. — С. 36—44.
6. Tselodub O.Yu., Trifonov Yu.Ya. On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. — 1989. — V. 39. — P. 336—351.

г. Новосибирск

Поступила 10/XII 1993 г.,
в окончательном варианте — 20/I 1994 г.

УДК 532.529:621.928.6

С.В. Долгушев, В.М. Фомин

КОНДЕНСАЦИОННЫЙ ЭФФЕКТ ПРИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ РАЗДЕЛЕНИИ СМЕСЕЙ

Повышение эффективности работы установок, предназначенных для разделения газовых смесей, остается одной из актуальных проблем химического, нефтяного, газового производства, атомной энергетики и других высокотехнологичных производств. Одним из перспективных способов разделения, опыт промышленного использования которых уже имеется, является газодинамический (см., например, [1—5]). Поскольку эффективность разделения в этом способе в основном обусловлена различием масс частиц, ее можно существенно увеличить, если обеспечить условия для конденсации тяжелого компонента. Появляющиеся при этом в потоке кластеры и капли конденсата имеют намного большую массу, чем масса одиночных молекул, следовательно, коэффициент разделения может существенно возрасти [6—8].

В этой связи представляет интерес изучение чисто конденсационного эффекта в общей схеме разделительного процесса, которая должна включать в себя охлаждение смеси при расширении в сверхзвуковом сопле до условий начала конденсации одного из компонентов, образование капель конденсата и отделение их от газовой фазы на выходе сопла. Эта схема может включать в себя дополнительные элементы, например: создание условий для интенсивной коалесценции капель [7] на выходе сопла, стимулирование конденсации отделяемого газа лазерным излучением [8] и др.