

УДК 532.542.2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ СТРУИ СО СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

К. Н. Волков, В. Н. Емельянов, М. С. Яковчук

Балтийский государственный технический университет "Военмех"
им. Д. Ф. Устинова, 190005 Санкт-Петербург, Россия
E-mails: dsci@mail.ru, vlademeyanov@gmail.com, mihailyakovchuk@gmail.com

Проведено численное моделирование течения, формирующегося при поперечном вдуве струи в сверхзвуковой поток через щелевое сопло, при различных значениях давления в инжектируемой струе и основном потоке. Для расчетов на сетках с различной разрешающей способностью используются модель турбулентности Спаларта — Альмараса, реализуемая модель $k-\varepsilon$, модель $k-\omega$ и модель SST. На основе сравнения расчетных и экспериментальных данных о распределении давления на стенке, длине рециркуляционной области и глубине проникания струи в сверхзвуковой поток сделаны выводы о точности результатов расчетов по различным моделям турбулентности и применимости этих моделей при решении подобных задач.

Ключевые слова: сверхзвуковой поток, струя, вдув, турбулентность, ударная волна, численное моделирование.

DOI: 10.15372/PMTF20150505

Введение. Исследование поперечного вдува струи в сверхзвуковой поток представляет интерес при проектировании систем смешения топлива и окислителя в прямоточных воздушно-реактивных двигателях, в которых используется сверхзвуковое горение [1]. Вдув струи в сверхзвуковой поток применяется также в системах управления вектором тяги ракетных твердотопливных двигателей [2].

Механизмы взаимодействия струй несжимаемой жидкости и сжимаемого газа с поперечным потоком рассматриваются в работах [3, 4]. Исследованию вихревой картины течения, возникающей при вдуве дозвуковых струй, посвящены работы [5–8]. Обзор вопросов и проблем, связанных с моделированием турбулентности в высокоскоростных потоках, приведен в [9].

Поперечный вдув струи в сверхзвуковой поток приводит к формированию сложной ударно-волновой вихревой картины потока, показанной на рис. 1 [10]. Ударно-волновая структура потока включает головной скачок уплотнения, взаимодействующий с пограничным слоем, две отрывные зоны, находящиеся слева и справа от отверстия вдува, два висячих скачка уплотнения, диск Маха и скачок уплотнения, обусловленный повторным сжатием потока. В рециркуляционной зоне перед щелевым соплом возникают вихри, вращающиеся в противоположных направлениях.

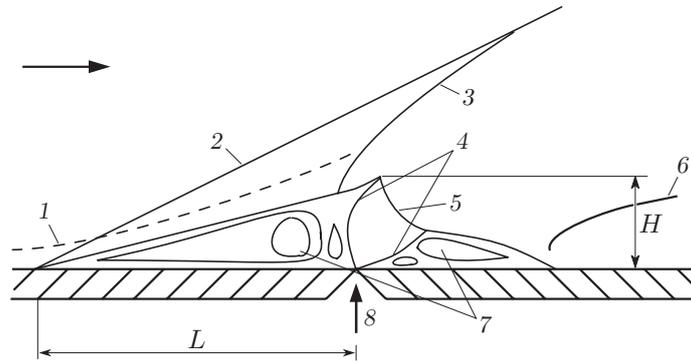


Рис. 1. Картина течения, возникающая при поперечном вдуве струи в сверхзвуковой поток [10]:

1 — турбулентный пограничный слой; 2 — скачок уплотнения, вызванный отрывом, 3 — головной скачок уплотнения, 4 — висячие скачки уплотнения, 5 — диск Маха, 6 — скачок уплотнения, возникающий при повторном сжатии, 7 — рециркуляционные зоны, 8 — зона вдува

Область проникания струи в основной поток ограничивается висячими скачками уплотнения и диском Маха. Угол поворота струи зависит от скорости основного потока и отношения давлений в инжектируемой струе p_j и основном потоке p_∞ [11, 12]. Ниже по течению от головного скачка уплотнения формируется пара вихрей, вращающихся в противоположных направлениях [6]. Размеры вихревых структур определяются видом инжектируемого газа и формой выходного сечения сопла [13]. Отрыв пограничного слоя и формирование рециркуляционной зоны перед отверстием вдува приводят к образованию подковообразного вихря, огибающего инжектируемую струю [12]. Размеры и количество вихревых образований, возникающих в области отрыва потока, зависят от перепада давления p_j/p_∞ [14]. Например, при больших перепадах давления наблюдается четыре вихревые структуры [15].

Интенсивность возникающих ударных волн и вихрей определяется отношением давлений во вдуваемой струе и основном потоке, числом Маха основного потока, формой отверстия вдува, положением вдуваемой струи, а также рядом других параметров [3, 4, 13]. Эффективность смешения зависит от длины отрывной зоны L , возникающей перед отверстием вдува, и глубины проникания струи в основной поток H , которая определяется положением верхнего края диска Маха.

Использование инженерных методов расчета позволяет построить упрощенную модель течения и определить основные управляющие параметры [10, 16, 17]. Многие факторы (нестационарность, турбулентность, тепловые нагрузки, сепарация частиц конденсированной фазы), определяющие степень смешения потоков, не учитываются в инженерных методах расчета. Для этого необходимо применять методы вычислительной газовой динамики с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса (Reynolds-averaged Navier — Stokes (RANS)).

Обзор различных подходов к моделированию турбулентности, таких как моделирование крупных вихрей (large eddy simulation (LES)), моделирование свободных вихрей (detached eddy simulation (DES)) и комбинированные подходы (LES/RANS), приведен в работе [1]. Результаты физических экспериментов, проведенных в широких диапазонах значений чисел Маха и Рейнольдса ($M_\infty = 2 \div 13$, $Re = 7,5 \cdot 10^6 \div 5,5 \cdot 10^8$), а также значений отношения давлений в струе вдуваемого газа и основном сверхзвуковом потоке, представлены в работах [18, 19].

Влияние выбора модели турбулентности и ширины щелевого отверстия, через которое происходит вдув струи, на результаты расчетов обсуждается в работах [20–22]. Результаты расчетов, полученные в работе [23] на основе SST-модели турбулентности, хорошо согласуются с экспериментальными данными [14, 24]. Аналогичные результаты, полученные в работе [2], сравнивались с данными [18, 19]. Модель переноса рейнольдсовых напряжений позволяет получить более точные результаты по сравнению со стандартной ($k-\varepsilon$)-моделью турбулентности и ее модификациями [25]. Топология трехмерного течения, возникающего при нормальном вдуве недорасширенной струи в до- и сверхзвуковой поток, изучается в работе [12].

Подходы к моделированию взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым потоком, используемые в работах [1, 26–30], позволяют с высокой степенью детализации исследовать эволюцию ударно-волновой и вихревой структур потока во времени [1]. В расчетах используются области, имеющие большую протяженность, и достаточно подробные сетки. В частности, в работах [26, 27] расчеты методом LES проводятся в области, имеющей относительные размеры $10,0 \times 3,3 \times 4,0$ (в качестве характерной длины используется диаметр отверстия вдува), на сетке, содержащей $38 \cdot 10^6$ ячеек. В работе [29] для расчетов методом DES используется сетка, содержащая $13,8 \cdot 10^6$ ячеек, при этом относительные размеры расчетной области равны $35 \times 16 \times 8$.

Взаимодействие косоугольного скачка уплотнения, формирующегося в результате обтекания сверхзвуковым потоком в канале наклонного выступа, с инжектируемой струей исследовано в работе [31]. Вдув струи осуществлялся через щелевое отверстие в нижней стенке канала, а выступ располагался на верхней стенке перед отверстием. В численных расчетах варьировались положение выступа в канале, размер выступа и угол его наклона к основному потоку. Геометрическая модель соответствовала модели, используемой в работе [18], а расчеты проводились при $p_j/p_\infty = 8,75; 63,50$ с помощью различных моделей турбулентности при малых (модель RNG $k-\varepsilon$) и больших (модель SST) перепадах давления в струе и основном потоке [22]. Взаимодействие наклонной ударной волны со струей, вдуваемой в сверхзвуковой поток, а также возникающая трехмерная структура потока, механизмы смешения и горения рассматриваются в работе [32] на основе результатов физического и численного экспериментов. В работе [33] проводятся расчеты с использованием SST-модели турбулентности при больших значениях полной температуры потока.

При проведении параметрических исследований и выборе оптимальных параметров задачи, как правило, используется подход, основанный на решении уравнений RANS. Несмотря на большой объем имеющихся данных о взаимодействии поперечной струи со сверхзвуковым потоком, необходимо выполнить анализ применимости различных моделей турбулентности. В настоящей работе с использованием данных численного и физического экспериментов проводится сравнение точности результатов, полученных с помощью различных моделей турбулентности (модели Спаларта — Альмараса, реализуемой модели $k-\varepsilon$, модели $k-\omega$, модели SST), и анализируется возможность их применения. Для повышения точности расчетов и обоснованной постановки граничных условий в сечении, через которое осуществляется вдув струи, щелевое сопло включается в расчетную область.

1. Геометрия и граничные условия. Рассмотрим взаимодействие струи, вдуваемой через плоскую щель в пластине со скоростью U_j , с невозмущенным сверхзвуковым потоком газа, движущимся параллельно пластине и имеющим скорость U_∞ . Картина течения характеризуется отношением динамических давлений во вдуваемой струе и основном потоке [10]. Для идеального газа это отношение записывается в виде

$$J = \frac{\rho_j U_j^2}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{\gamma_j p_j M_j^2}{\gamma_\infty p_\infty M_\infty^2}.$$

Индексы j и ∞ соответствуют вдуваемому потоку и основному течению в канале.

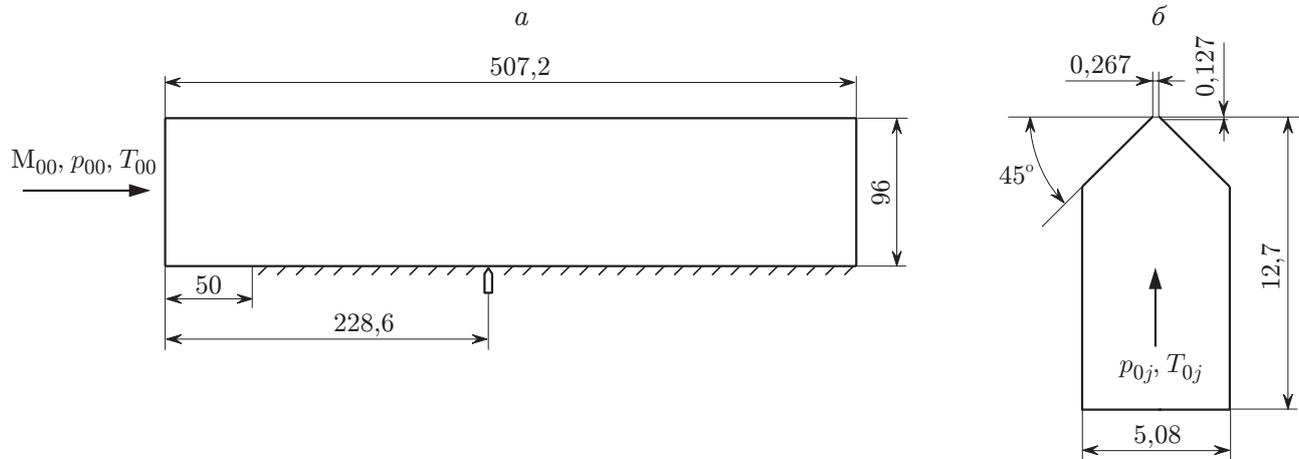


Рис. 2. Геометрия расчетной области (а) и щелевого сопла (б)

Схема расчетной области, включающей основной канал и щелевое сопло, показана на рис. 2. Длина пластины составляет 507,2 мм, высота расчетной области — 96 мм. Расстояние от передней кромки пластины до линии симметрии щелевого сопла равно 228,6 мм. Вдув струи с поверхности плоской пластины по нормали к невозмущенному потоку осуществляется через плоское щелевое сопло шириной 0,267 мм и длиной 152,4 мм, по бокам которого параллельно основному потоку устанавливаются боковые пластины, формирующие плоское течение. Начало декартовой системы координат расположено в центре щелевого отверстия вдува. Отсчет координаты x ведется в направлении распространения потока.

На границе, через которую основной поток входит в расчетную область, задаются число Маха M_∞ , статическое давление p_∞ , статическая температура T_∞ , а также характеристики турбулентности (интенсивность турбулентности составляет 1 %, характерный масштаб турбулентности равен 0,1 мм). В качестве граничных условий на входной границе щелевого сопла задаются полное давление p_{0j} , полная температура T_{0j} и характеристики турбулентности (интенсивность турбулентности равна 0,1 %, гидравлический диаметр — 0,532 мм). На поверхности пластины и стенках щелевого сопла ставятся граничные условия прилипания и непротекания для тангенциальной и нормальной составляющих скорости, а на верхней границе и участке расчетной области перед пластиной — условия скольжения (невязкая стенка). Поверхность пластины и стенки щелевого сопла считаются теплоизолированными. Характеристики турбулентности на стенке определяются с помощью метода пристенных функций. В выходном сечении характеристики потока находятся путем экстраполяции их значений из внутренних узлов сетки (условия свободного вытекания).

В рамках численного эксперимента проводится ряд расчетов, соответствующих пяти режимам продувок. Для удобства сравнения результатов численного моделирования и экспериментальных данных использовались обозначения вариантов расчета и контрольных точек, принятые в работе [18]. Параметры физического и вычислительного экспериментов приведены в табл. 1 (число Маха, полное давление и полная температура основного потока и вдуваемого газа).

В качестве рабочих сред используются воздух (основной поток) и азот (инжектируемая среда). Теплофизические характеристики сред справочные.

2. Расчетные сетки. Расчеты проводятся на четырех блочно-структурированных сетках с различной разрешающей способностью, характеристики которых приведены в

Таблица 1

Параметры потока и струи во входных сечениях расчетной области					
Номер эксперимента	M_∞	$p_{0\infty}$, Па	$T_{0\infty}$, К	p_{0j} , Па	T_{0j} , К
2	2,61	133 758	317,8	159 269	297,8
3	2,61	132 035	317,8	299 922	294,4
4	2,61	133 069	317,8	572 955	291,1
5	2,61	133 758	318,3	1 044 556	288,3
13	3,50	240 627	314,4	379 901	291,7

Таблица 2

Характеристики различных расчетных сеток				
Сетка	N_1	N_2	N_3	N
1	61	117	61	194 880
2	133	229	133	633 600
3	269	229	133	125 376
4	537	457	265	501 504

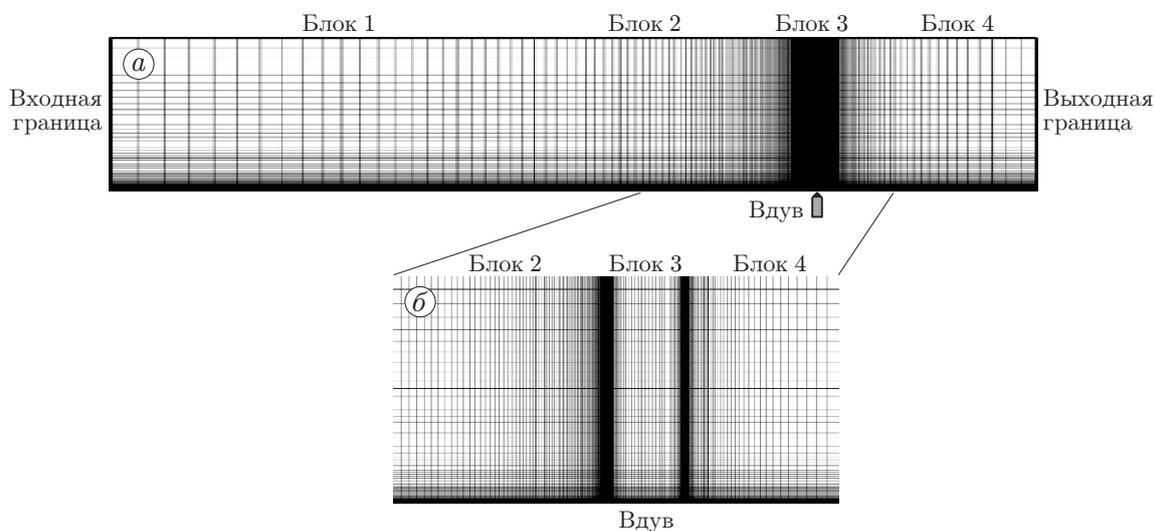


Рис. 3. Расчетная сетка 1 (а) и ее фрагмент (б)

табл. 2 (N_1 — число узлов сетки во входном сечении расчетной области, N_2 — число узлов на пластине перед отверстием, N_3 — число узлов на пластине за отверстием, N — число узлов).

На рис. 3 показана используемая в расчетах сетка 1. Сетка состоит из четырех блоков, соответствующих невозмущенному потоку перед пластиной (блок 1), потоку перед отверстием вдува (блок 2), щелевому соплу (блок 3) и потоку за отверстием вдува (блок 4). В пределах каждого блока используется неравномерный шаг сетки по координате x (начальный шаг сетки изменяется от блока к блоку). По координате y проводится сгущение узлов сетки к поверхности пластины (во всех блоках узлы сетки в направлении y распределяются одинаково). Щелевое сопло содержит 45 узлов по ширине и 77 узлов по высоте.

Сетки 1–3 имеют один и тот же пристенный шаг, равный 10^{-6} м. Сетка 4 получается путем добавления узлов к сетке 3 и измельчения всех ее ячеек. На сетке 4 первый слой узлов располагается на расстоянии $5 \cdot 10^{-7}$ м от поверхности пластины. Для сеток 1–3 пристенная координата y^+ изменяется в диапазоне $0,008 \div 2,660$, для сетки 4 — в диапазоне $0,003 \div 1,700$, причем максимальные значения координата y^+ принимает вблизи передней кромки пластины. При увеличении перепада давления во вдуваемой струе и основном потоке имеет место некоторое увеличение максимального значения координаты y^+ . В частности, при переходе от сетки 2 к сетке 4 максимальное значение пристенной координаты увеличивается приблизительно на 25 %.

В расчетах ламинарно-турбулентный переход не моделируется. Данные физического эксперимента [18] показывают, что при всех режимах вдува струи в поток область перехода располагается перед щелевым соплом. Ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое происходит на расстоянии от передней кромки пластины, равном $50,8 \div 76,2$ мм.

3. Вычислительная процедура. Расчеты проводятся с использованием пакета Ansys Fluent на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса, для замыкания которых применяются различные дифференциальные модели турбулентности (модель Спаларта — Альмараса, реализуемая модель $k-\varepsilon$, модель $k-\omega$, модель SST). Для учета смешения потоков разнородных газов решается уравнение конвекции и диффузии для каждого газа.

Дискретизация основных уравнений осуществляется с помощью метода конечных объемов и метода поправки давления SIMPLE. Для дискретизации конвективных и диффузионных потоков используются противопоточные и центрированные разностные схемы второго порядка точности с расщеплением вектора потока методом Рое, а для дискретизации по времени — неявная схема второго порядка точности. Система разностных уравнений решается методом LUSGS (lower-upper symmetric Gauss — Seidel) [34]. Число Куранта варьируется в диапазоне $Ku = 2 \div 7$.

Для контроля сходимости итерационного процесса проверяются уровень невязки искомых функций и выполнение интегрального уравнения неразрывности. Расчеты прекращаются в тот момент, когда уровень невязки всех искомых функций уменьшается на три порядка, а различие массовых расходов на входных и выходных границах расчетной области становится меньше 10^{-3} кг/с.

4. Структура течения. Результаты численного моделирования, соответствующие установившемуся режиму течения, показаны на рис. 4 (эксперимент 4). Качественно картина течения соответствует картине, полученной в расчетах на основе других моделей турбулентности [22] и приведенной на рис. 1.

Перед вдуваемой струей, служащей преградой для основного потока, поток замедляется, в результате чего возникает положительный градиент давления (область повышенного давления формируется перед отверстием вдува, а область пониженного давления — за ним), вызывающий отрыв пограничного слоя в точке S . При этом образуются передняя застойная зона 1 и головной скачок уплотнения 2. Линии тока основного потока разворачиваются, проходя через головную ударную волну и скачок уплотнения 3 над отверстием

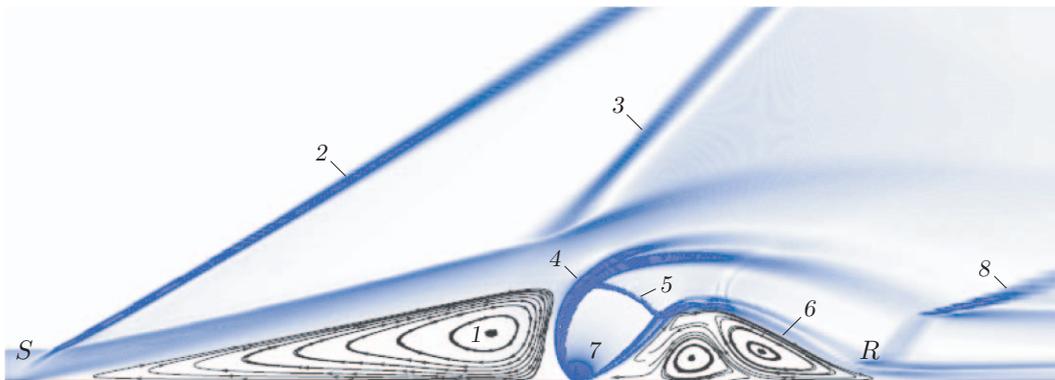


Рис. 4. Результаты численного моделирования истечения струи в установившемся режиме:

1 — передняя застойная зона, 2 — головной скачок уплотнения, 3 — скачок уплотнения над отверстием вдува, 4, 8 — висячие скачки уплотнения, 5 — диск Маха, 6 — застойная зона с пониженным давлением, 7 — область проникновения струи в сверхзвуковой поток

вдува. Вдуваемая струя искривляется под действием основного потока (вблизи поверхности пластины линии тока в струе разворачиваются на большой угол) и на некотором расстоянии от щели вниз по потоку соприкасается с обтекаемой поверхностью в точке R , при этом возникает застойная зона b с пониженным давлением. За точкой R образуется скачок уплотнения δ , что обусловлено повторным сжатием потока. Область 7 (область проникания струи в сверхзвуковой поток) ограничена двумя висячими скачками уплотнения 4 и диском Маха 5 .

Толщина пограничного слоя существенно больше ширины щелевого отверстия, поэтому расширение струи происходит в области отрыва потока. В этом случае взаимодействие потока со стенкой определяется вязкостью. Вдув струи приводит к отрыву турбулентного пограничного слоя и перераспределению давления на пластине. Возможен расчет длин отрывных зон на основе полуэмпирической модели [16, 17].

5. Сравнение моделей турбулентности. На рис. 5 приведены распределения статического давления вдоль поверхности пластины, рассчитанные на сетках с различной разрешающей способностью с использованием различных моделей турбулентности, а также данные физического эксперимента [18]. Расчеты проведены для входных параметров

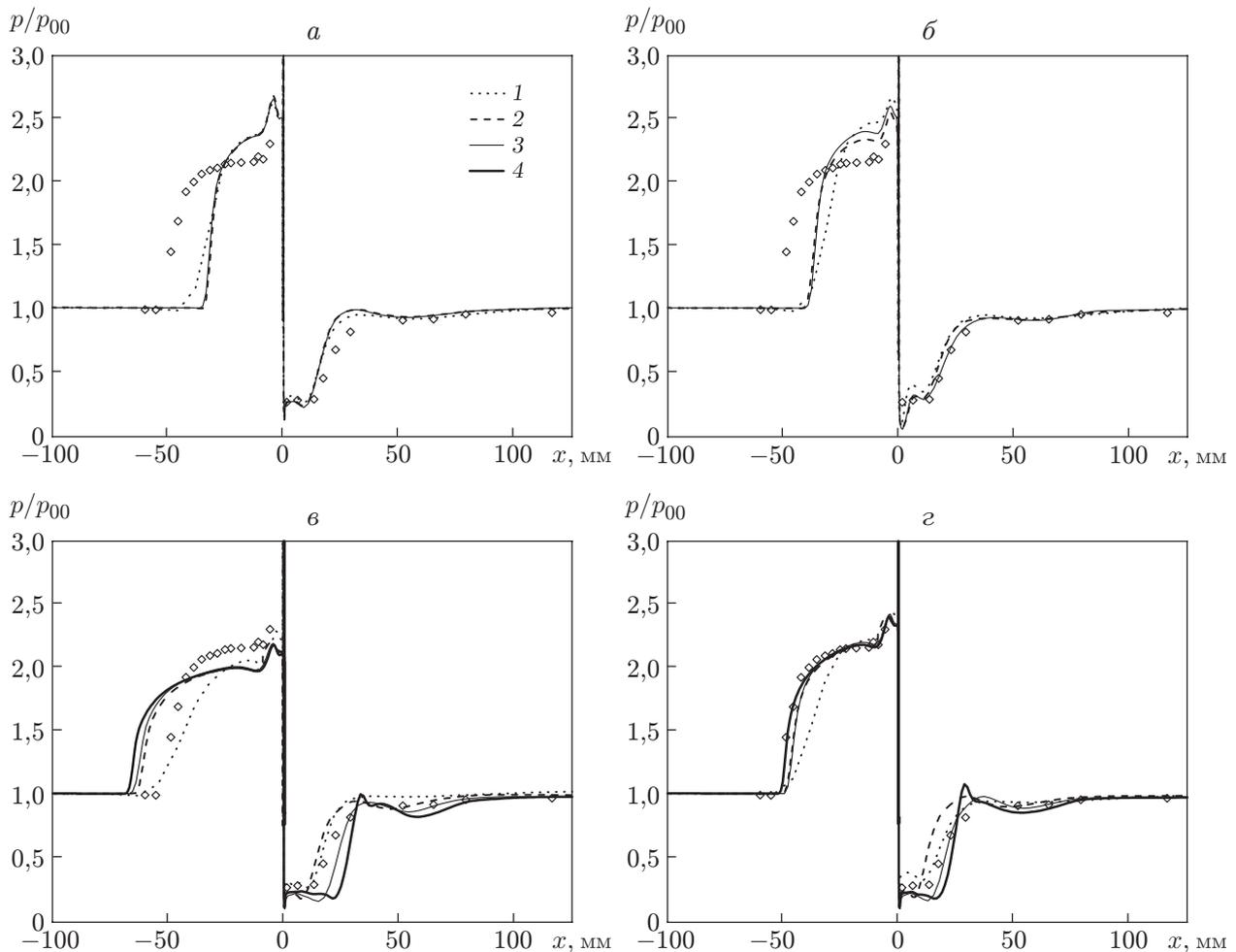


Рис. 5. Распределение давления на стенке, полученное с использованием различных моделей турбулентности на различных сетках:
 а — модель Спаларта — Альмараса, б — реализуемая ($k-\varepsilon$)-модель, в — модель $k-\omega$, г — модель SST; точки — экспериментальные данные [18]; 1 — расчет на сетке 1, 2 — расчет на сетке 2, 3 — расчет на сетке 3, 4 — расчет на сетке 4

течения, соответствующих эксперименту 4 (см. табл. 1). Расчеты на сетке 4 с помощью моделей Спаларта — Альмараса и реализуемой $(k-\varepsilon)$ -модели не проводились.

Результаты расчетов, полученные с помощью различных моделей турбулентности, имеют общую закономерность: для сеток 2–4 распределение давления на поверхности пластины практически не зависит от разрешающей способности сетки. В расчетах на грубой сетке (сетка 1) во всех случаях получено одно и то же положение точки отрыва, а максимальные значения давления соответствуют значениям, вычисленным на более подробных сетках (сетки 2–4). При этом наполненность профиля давления на стенке, соответствующего сетке 1 и сеткам 2–4, различается. На сетке 1 профиль давления менее наполнен, чем на сетках 2–4. Подобные результаты получены в работе [22].

Наиболее существенные различия результатов, полученных на грубой и подробных сетках, имеют место при использовании стандартной модели $k-\omega$ (см. рис. 5, в). В этом случае профиль давления, полученный на сетке 1, является менее наполненным, чем профиль давления, полученный на сетках 2–4, а значения давления являются заниженными по сравнению с соответствующими значениями, вычисленными по другим моделям турбулентности. Область плато, полученная в эксперименте и воспроизводимая при использовании подробных сеток, отсутствует в расчетах на сетке 1.

Модель Спаларта — Альмараса (см. рис. 5, а) некорректно определяет положение точки отрыва пограничного слоя. При этом отрыв пограничного слоя происходит позднее, чем в расчетах по другим моделям турбулентности (точка отрыва смещается вниз по потоку), профиль давления оказывается менее наполненным, а область плато отсутствует.

Расчеты по реализуемой $(k-\varepsilon)$ -модели (см. рис. 5, б) дают результаты, близкие к результатам, полученным с помощью модели Спаларта — Альмараса (за исключением области плато).

Наилучшее соответствие результатов расчетов данным физического эксперимента имеет место при использовании SST-модели турбулентности (см. рис. 5, г). При этом распределение давления, рассчитанное на грубой сетке (сетка 1), с достаточной степенью точности согласуется с экспериментальными данными [18]. Дальнейшие расчеты проводились с помощью SST-модели турбулентности.

Важными характеристиками смешения топлива и окислителя и горения смеси в сверхзвуковом потоке являются длина рециркуляционной зоны и глубина проникания струи [30]. Длина рециркуляционной зоны, образующейся перед отверстием вдува, и глубина проникания струи в сверхзвуковой поток, рассчитанные с помощью различных моделей турбулентности, показаны на рис. 6. Увеличение перепада давления приводит к увеличению длины рециркуляционной области и глубины проникания струи в поток. При этом влияние моделей турбулентности на глубину проникания струи является менее существенным по сравнению с их влиянием на размер рециркуляционной зоны.

Модель SST позволяет не только получить распределения давления, согласующиеся с данными физического эксперимента, но и определить с достаточной точностью длину рециркуляционной области, расположенной перед отверстием вдува. Модель Спаларта — Альмараса и реализуемая $(k-\varepsilon)$ -модель дают завышенные оценки передней рециркуляционной зоны, а стандартная $(k-\omega)$ -модель занижает длину рециркуляционной области (разрешение расчетной сетки оказывает незначительное влияние). Аналогичные результаты получены в работе [22].

Распределение давления на стенке и длина рециркуляционной области, полученные с помощью модели SST, слабо зависят от разрешения сетки. Распределение давления на стенке, соответствующее рециркуляционной области за отверстием вдува, более существенно зависит от разрешения сетки. При использовании SST-модели и сетки 4 решение с высокой степенью точности согласуется с экспериментальными данными [18].

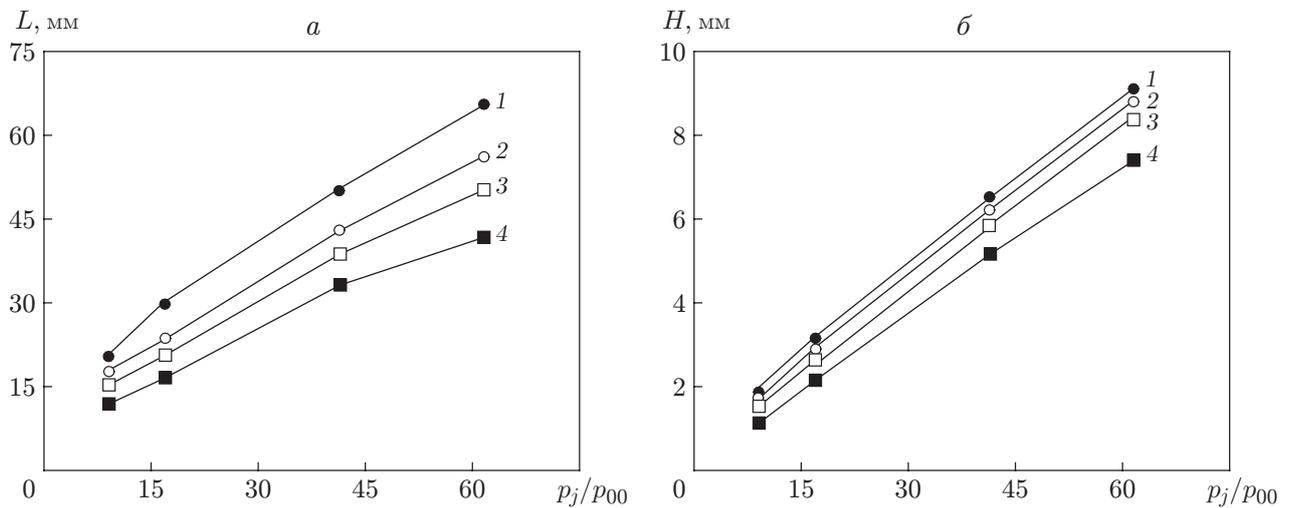


Рис. 6. Длина передней рециркуляционной зоны (а) и глубина проникания струи в поток (б), рассчитанные по различным моделям турбулентности: 1 — модель SST, 2 — реализуемая (k - ϵ)-модель, 3 — модель Спаларта — Альмараса, 4 — модель k - ω

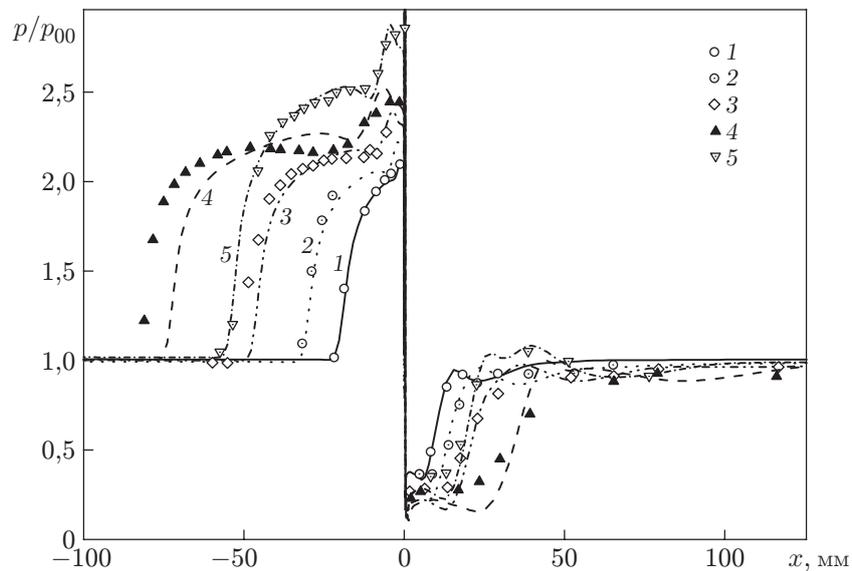


Рис. 7. Результаты численного моделирования (линии) и данные физического эксперимента [18] (точки), полученные при вдуве струи в сверхзвуковой поток: 1 — режим 2, 2 — режим 3, 3 — режим 4, 4 — режим 5, 5 — режим 13

6. Сравнение вариантов расчета. С помощью SST-модели турбулентности проведены расчеты, соответствующие различным вариантам граничных условий (см. табл. 1). На рис. 7 показаны распределения статического давления на поверхности пластины, полученные при различных режимах вдува струи в сверхзвуковой поток (линии). С увеличением интенсивности вдува точка отрыва пограничного слоя смещается вверх по потоку (влево от отверстия вдува). При этом профиль давления становится более наполненным, а область плато — более четко выраженной. Максимальные значения давления на стенке меняются незначительно.

Результаты численного моделирования достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными при всех режимах вдува, что подтверждает целесообразность использования SST-модели турбулентности при решении подобных задач в широком диапазоне параметров основного потока и вдуваемой струи. Некоторое различие результатов, соответствующих режиму 5, объясняется тем, что в эксперименте при данном режиме отрыв пограничного слоя происходит перед кромками боковых пластин, установленных по бокам щелевого сопла. Оторвавшийся пограничный слой взаимодействует с пластинами, что приводит к возникновению ударных волн, в результате чего течение приобретает существенно трехмерный характер. Для учета этих особенностей необходимо решить трехмерную задачу.

Заключение. В работе проведено численное моделирование течения, формирующегося при вдуве струи через щелевое сопло в сверхзвуковой поток. В расчетах варьируется перепад статического давления в инжектируемой струе и основном потоке. Для расчетов на сетке с различной разрешающей способностью используются модель турбулентности Спаларта — Альмараса, реализуемая $(k-\varepsilon)$ -модель, модель $k-\omega$ и модель SST.

На основе сравнения расчетных и экспериментальных данных о распределении давления на стенке, длине рециркуляционной области и глубине проникания струи в сверхзвуковой поток сделаны выводы о применимости различных моделей турбулентности и точности расчетов, выполненных по ним. Модель SST позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся с данными физического эксперимента в широком диапазоне параметров, характеризующих вдув струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hassan E., Boles J., Hikaru A., et al.** Supersonic jet and crossflow interaction: computational modeling // *Progr. Aerospace Sci.* 2013. V. 57, N 1. P. 1–24.
2. **Яковчук М. С.** Численное моделирование динамических процессов вдува струй в сверхзвуковую часть сопла // *Вестн. Самар. гос. аэрокосм. ун-та.* 2012. № 3. С. 359–367.
3. **Karagozian A. R.** Transverse jets and their control // *Progr. Energy Combust. Sci.* 2010. V. 36, N 5. P. 531–553.
4. **Mahesh K.** The interaction of jets with crossflow // *Annual Rev. Fluid Mech.* 2013. V. 45. P. 379–407.
5. **Sykes R. I., Lewellen W. S., Parker S. F.** On the vorticity dynamics of a turbulent jet in a crossflow // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 168. P. 393–413.
6. **Fric T. F., Roshko A.** Vortical structure in the wake of a transverse jet // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 279. P. 1–47.
7. **Johari H., Pacheco-Tougas M., Hermanson J. C.** Penetration and mixing of fully modulated turbulent jets in crossflow // *AIAA J.* 1999. V. 37, N 7. P. 842–850.
8. **Lim T. T., New T. H., Luo S. C.** On the development of large-scale structures of a jet normal to a crossflow // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13, N 3. P. 770–776.

9. **Roy C. J., Blottner F. G.** Review and assessment of turbulence models for hypersonic flows // *Progr. Aerospace Sci.* 2006. V. 42, N 7/8. P. 469–530.
10. **Schetz J. A., Billig F. S.** Penetration of gaseous jets injected into a supersonic stream // *J. Spacecraft Rockets.* 1966. V. 3, N 11. P. 1658–1665.
11. **Ben-Yakar A., Mungal M. G., Hanson R. K.** Time evolution and mixing characteristics of hydrogen and ethylene transverse jets in supersonic crossflows // *Phys. Fluids.* 2006. V. 18, N 2. 026101.
12. **Dickmann D. A., Lu F. K.** Shock/boundary layer interaction effects on transverse jets in crossflow over a flat plate. Seattle, 2008. (Paper /AIAA; N 2008-3723).
13. **Gruber M. R., Nejad A. S., Chen T. H., Dutton J. C.** Large structure convection velocity measurements in compressible transverse injection flow-fields // *Experiments Fluids.* 1997. V. 22, N 5. P. 397–407.
14. **Stahl B., Emunds H., Gülhan A.** Experimental investigation of hot and cold side jet interaction with a supersonic cross-flow // *Aerospace Sci. Technol.* 2009. V. 13, N 8. P. 488–496.
15. **Qin N., Redlich A.** Massively separated flows due to transverse sonic jet in laminar hypersonic stream // *Shock Waves.* 1999. V. 9, N 2. P. 87–93.
16. **Теверовский А. М.** Приближенный расчет плоского взаимодействия боковой струи со сверхзвуковым потоком // *Тр. Центр. ин-та авиац. моторостроения.* 1971. № 482. С. 4–12.
17. **Глотов Г. Ф., Колесников О. М.** Приближенный расчет двухмерного взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым потоком при горении в передней точке отрыва // *Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та.* 1976. № 1736. С. 3–14.
18. **Spaid F. W., Zukoski E. E.** A study of the interaction of gaseous jets from transverse slots with supersonic external flows // *AIAA J.* 1968. V. 6, N 2. P. 205–212.
19. **Spaid F. W.** Two-dimensional jet interaction studies at large values of Reynolds and Mach numbers // *AIAA J.* 1975. V. 13, N 11. P. 1430–1434.
20. **Dhinakaran R., Bose T. K.** Numerical simulation of two-dimensional transverse gas injection into supersonic external flows // *AIAA J.* 1998. V. 36, N 3. P. 486–488.
21. **Sriram A. T., Mathew J.** Improved prediction of plane transverse jets in supersonic crossflows // *AIAA J.* 2006. V. 44, N 2. P. 405–407.
22. **Huang W., Liu W. D., Li S. B., et al.** Influences of the turbulence model and the slot width on the transverse slot injection flow field in supersonic flows // *Acta Astronaut.* 2012. V. 73. P. 1–9.
23. **Aswin G., Chakraborty D.** Numerical simulation of transverse side jet interaction with supersonic free stream // *Aerospace Sci. Technol.* 2010. V. 14, N 5. P. 295–301.
24. **Stahl B., Esch H., Gülhan A.** Experimental investigation of side jet interaction with a supersonic cross flow // *Aerospace Sci. Technol.* 2008. V. 12, N 4. P. 269–275.
25. **Chenault C. F., Beran P. S., Bowersox R. D. W.** Numerical investigation of supersonic injection using a Reynolds-stress turbulence model // *AIAA J.* 1999. V. 37, N 10. P. 1257–1269.
26. **Kawai S., Lele S. K.** Mechanisms of jet mixing in a supersonic crossflow: a study using large-eddy simulation. Reston, 2008. (Paper / AIAA; N 2008-4575).
27. **Kawai S., Lele S. K.** Large-eddy simulation of jet mixing in supersonic crossflows // *AIAA J.* 2010. V. 48, N 9. P. 2063–2083.
28. **Won S. H., Jeung I. S., Parent B., Choi J. Y.** Numerical investigation of transverse hydrogen jet into supersonic crossflow using detached-eddy simulation // *AIAA J.* 2010. V. 48, N 6. P. 1047–1058.
29. **Peterson D., Candler G.** Simulations of mixing for normal and low-angled injection into a supersonic crossflow // *AIAA J.* 2011. V. 49, N 12. P. 2792–2804.

30. **Rana Z. A., Thornber B., Drikakis D.** Transverse jet injection into a supersonic turbulent cross-flow // *Phys. Fluids*. 2011. V. 23, N 4. 046103.
31. **Huang W., Wang Z.-G., Wu J.-P., Li S.-B.** Numerical prediction on the interaction between the incident shock wave and the transverse slot injection in supersonic flows // *Aerospace Sci. Technol.* 2013. V. 28, N 1. P. 91–99.
32. **Mai T., Sakimitsu Y., Nakamura H., et al.** Effect of the incident shock wave interacting with transversal jet flow on the mixing and combustion // *Proc. Combust. Inst.* 2011. V. 33, N 2. P. 2335–2342.
33. **Федорова Н. Н., Федорченко И. А., Федоров А. В.** Математическое моделирование взаимодействия струй со сверхзвуковым высокоэнтальпийным потоком в расширяющемся канале // *ПМТФ*. 2013. Т. 54, № 2. С. 32–45.
34. **Jameson A., Yoon S.** Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations // *AIAA J.* 1987. V. 25. P. 929–935.

*Поступила в редакцию 13/II 2015 г.,
в окончательном варианте — 13/V 2015 г.*
