УДК 532.51

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

Ю. Я. Трифонов, О. Ю. Цвелодуб

(*Новосибирск*)

Из эксперимента известно [1, 2], что характер течения пленки жидкости по вертикальной плоскости является волновым уже при малых числах Рейнольдса. Это связано с тем, что течение пленки толщиной h с плоской свободной поверхностью, профиль скорости которого представляет собой полупараболу $u = 3u_0(y/h - y^2/2h^2)$, неустойчиво начиная с самых малых значений чисел Рейнольдса — бесконечно малые длинноволновые возмущения экспоненциально нарастают со временем [3, 4]. В результате действия нелинейных эффектов могут сформироваться установившиеся периодические и солитонные режимы течения. Рассмотрение такой задачи в полной постановке чрезвычайно сложно, поэтому для ее решения прибегают к различным упрощениям.

Так, при малых расходах (Re $\sim$ 1) задачу о волновых режимах удается свести к решению одного уравнения для толщины пленки [5]. Однако при таких расходах в эксперименте установившиеся бегущие волны практически не наблюдаются, и, хотя качественно форма полученных решений [6] этого уравнения хорошо согласуется с формой наблюдаемых в эксперименте волн, количественного согласия нет. Аналогична ситуация и с двухволновым уравнением [7], содержащим только квадратные нелинейные члены и поэтому описывающим поведение только слабонелинейных волн при умеренных расходах. При таких расходах (Re $\sim$ 10—100) в эксперименте наблюдаются нелинейные волны [2], амплитуда которых одного порядка со средней толщиной пленки, и для их описания учета только квадратичной нелинейности недостаточно.

В [7, 8] в предположении автомодельности профиля продольной скорости

$$u = 3U(x, t)(y/h(x, t) - y^2/2h^2(x, t)) \tag{1}$$

и длинноволновости выведена система уравнений, описывающая поведение возмущений на пленке при умеренных значениях Re

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 1{,}2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right) = -\frac{3\nu}{h^2}\,q + gh + \frac{\sigma h}{\rho}\,\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где q — мгновенный расход жидкости в сечении x; h — мгновенная толщина пленки; g — ускорение силы тяжести; σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Слабонелинейные периодические решения системы (2) найдены в [8, 9], отрицательные солитоны, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(h - h_\infty)\,dx < 0$ (h_∞ — толщина невозмущенной пленки),— в [10].

Цель данной работы — найти сильнонелинейные периодические стационарные волны в пределе (когда волновое число $\alpha \to 0$), переходящие в положительные солитонные решения $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(h - h_\infty)\,dx > 0\right)$, и сравнить их с экспериментом.

Для стационарной бегущей волны

$$h = h(\xi), \quad q = q(\xi), \quad \xi = x - ct \tag{3}$$

(c — фазовая скорость волны) из второго уравнения системы (2) получим

$$q = q_0[1 + (ch_0/q_0)(h/h_0 - 1)], \tag{4}$$

q_0 — значение расхода в сечении, где $h = h_0$.

Выбирая эти величины в качестве характерных и проведя по ним обезразмеривание из (2)—(4), получим (знак обезразмеривания опускаем)

$$-c^2h' + 2{,}4c(1 + c(h - 1))h'/h - 1{,}2(1 + c(h - 1))^2h'/h^2 = \tag{5}$$

$$= -3(1 + c(h - 1))/\mathrm{Re}\,h^2 + h/\mathrm{Fr} + \mathrm{We}\,hh''',$$

$$\mathrm{Re} = q_0/\nu, \quad \mathrm{Fr} = q_0^2/gh_0^3, \quad \mathrm{We} = \sigma h_0/\rho q_0^2.$$

Штрих означает дифференцирование по ξ.

Для периодических решений в качестве h_0 будем брать среднюю по длине волны λ толщину

$$h_0 \equiv \langle h \rangle = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} h\, d\xi.$$

В этом случае, как видно из (4), $q_0 \equiv \langle q \rangle$. Для солитонных решений за h_0 берется значение h на бесконечностях.

В безволновой пленке $h = 1$ и верно соотношение

$$q_0 = gh_0^3/3\nu \to \mathrm{Fr} = \mathrm{Re}/3.$$

При пренебрежении нелинейными членами из обезразмеренных уравнений (2) следует результат линейной теории — возмущения вида $\exp[i\alpha(x-ct)]$ неустойчивы для значений $\alpha < \alpha_H = \sqrt{3/\mathrm{We}}$. Если ввести новую координату $\xi_1 = \xi\sqrt{3/\mathrm{We}}$, то для $H = h - 1$ уравнение (5) перепишется в виде

$$(6)\qquad (cz - 3F)H + (0{,}2\, c^2 - 1{,}2(c-1)^2)H' - 3H''' = F - z +$$
$$+ 3F(H^2 + H^3/3) - 0{,}4c^2H'(H + H^2/2) + 9H'''(H + H^2 + H^3/3),$$

где

$$z = \sqrt{3\mathrm{We}/\mathrm{Re}^2};\quad F = \sqrt{\mathrm{We}/3\mathrm{Fr}^2}.$$

Проведенная замена нормирует интервал неустойчивых волновых чисел на единицу. Учитывая, что $\langle H \rangle = 0$, из (6) находим для периодических решений связь между параметрами F и z:

$$F = \frac{z - 9\langle H'''(H + H^2 + H^3/3)\rangle}{1 + 3\langle H^2 + H^3/3\rangle}.$$

Так как солитонные решения являются предельными для периодических при $\lambda \to \infty$, то для них $F = z$.

Таким образом, задача свелась к нахождению периодических и солитонных решений уравнения (6). Фазовая скорость c — собственное число, а z — параметр. Переход к экспериментально измеряемым величинам осуществляется по формулам

$$\mathrm{Re} = (81\sigma^3F/g\rho^3\nu^4z^7)^{1/11},\quad c^* = c(\sigma^2g^3\nu/3\rho^2F^3z)^{1/11},$$
$$\lambda^* = \frac{2\pi}{\alpha}(\sigma^4\nu^2F^5/9\rho^4g^5z^2)^{1/11},\quad A^* = A(243\sigma\nu^6F^4/\rho g^4z^6)^{1/11},$$

где c^*, λ^*, A^* — размерные фазовая скорость, длина и амплитуда волны.

Периодическую волну с волновым числом α ищем в виде ряда

$$(7)\qquad H = \sum_{-\infty}^{\infty} H_n \exp[i\alpha n\xi_1].$$

Так как H — действительная функция, то $H_n = \overline{H}_{-n}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Оставляя в (7) первые $N/2$ гармоник и подставляя их в уравнение (6), получим систему $N + 1$ уравнений для $N + 3$ неизвестных (F, c, H_0, $H_{\pm 1}, \ldots, H_{\pm N/2}$):

$$(8)\qquad H_n = \frac{3F\varphi_n - 0{,}4c^2\psi_n + 9\chi_n}{cz - 3F + i\alpha n(0{,}2c^2 - 1{,}2(c-1)^2) + 3i\alpha^3n^3},$$
$$n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N/2.$$

Здесь $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ — соответственно фурье-гармоники функций

$$\varphi = H^2 + H^3/3,\quad \psi = H'(H + H^2/2),\quad \chi = H'''(H + H^2 + H^3/3).$$

В силу нормировки функции H $H_0 = \langle H \rangle = 0$. Кроме того, выбором начала отсчета координаты ξ_1 всегда можно добиться, чтобы, например, $\mathrm{Im}\,(H_1) = 0$.

Таким образом, в системе (8) имеем $N + 1$ нелинейных уравнений с $N + 1$ неизвестными. При фиксированном значении α счет начинался для больших значений z, а в качестве начального приближения использовались результаты [11, 12]. Продвижение в сторону меньших значений параметра z осуществлялось по непрерывности. Для каждого значения α существует такое критическое значение z_*, что решение для $z < z_*$ найти, по крайней мере данным методом, не удается. При выполнении прямого и обратного фурьирования функций использовались процедуры быстрого фурье-преобразования [13]. При обрывании ряда (7) число гармоник бралось таким образом, чтобы выполнялось соотношение.

$$|H_{N/2}| \Big/ \sup_{n \leqslant N/2} |H_n| < 10^{-3}.$$

В зависимости от значений α и z число N менялось в пределах 16—128.

На фиг. 1 для нескольких значений волновых чисел даны зависимости фазовой скорости и амплитуды волн от z (кривые *1—3* соответствуют $\alpha = 0{,}2$; 0,35; 0,5, кривые *4* — солитонным решениям). Точками для сравнения нанесены данные по солитонным решениям двухволнового уравнения с квадратичной нелинейностью [7], полученные в [11, 12]. Как видно из графика, для больших значений z волны слабонелинейные и результаты хорошо согласуются.

На фиг. 2, 3 показано сравнение расчетных (линия) профилей сильнонелинейных волн для водоглицериновой пленки ($\nu = 4{,}9 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\sigma/\rho = 59 \cdot 10^{-6}$ м³/с², $\mathrm{Re} = 7{,}2$) с экспериментальными (точки) из [14]. На фиг. 2 $\lambda = 34{,}3$ мм, $c_э = 320$ мм/с, $c_р = 318$ мм/с; на фиг. 3 $\lambda = 18{,}5$ мм, $c_р = 262$ мм/с, $c_э = 270$ мм/с. Видно, что имеется хорошее количественное согласие.

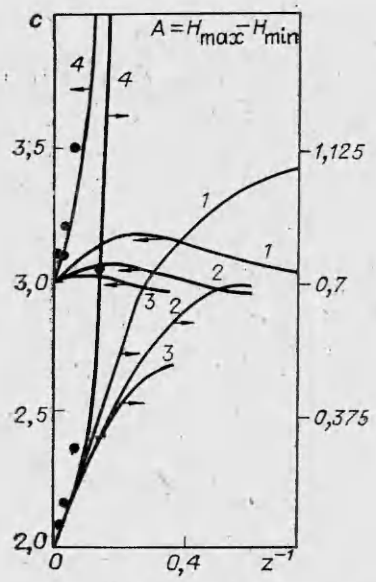
Аналогичное сравнение для воды ($\nu = 1{,}03 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\sigma/\rho = 72{,}9 \times \times 10^{-6}$ м³/с², $\mathrm{Re} = 9{,}8$) дано на фиг. 4, где $\lambda = 36{,}8$ мм, $c_р = 260$ мм/с, $c_э = 232$ мм/с (эксперимент из [2]). Согласие несколько хуже, но вполне удовлетворительное.

Как видно из фиг. 2—4, наибольшие расхождения между расчетами с экспериментом приходятся на осциллирующий передний фронт волны. По-видимому, это связано с тем, что предположение (1) достаточно грубо для детального описания тонкой структуры.

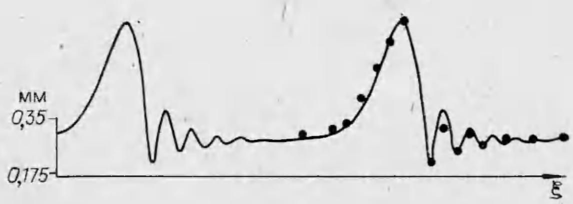
На фиг. 5 показаны обобщенные экспериментальные зависимости скоростей волн от их амплитуды (данные из [2, 15]) для воды ($\nu = 1{,}03 \times \times 10^{-6}$ м/с, $\sigma/\rho = 72{,}9 \cdot 10^{-6}$ м³/с² — кривая *1*) и водоглицериновых растворов (кривая *2* — $\nu = 2{,}06 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\sigma/\rho = 40{,}3 \cdot 10^{-6}$ м³/с², кривая *3* — $\nu = 11{,}2 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\sigma/\rho = 55{,}9 \cdot 10^{-6}$ м³/с²). Соответствующими точками *1—3* показаны расчетные результаты. Хотя при расчетах для данного вещества менялись параметр z и значение α, видно, что расчетные точки практически действительно ложатся на прямые линии.

В расчетах найдены решения, для которых в некоторых сечениях скорости жидкости получались отрицательными — возвратное течение, а также режимы, у которых на гребнях волн скорость жидкости больше фазовой — сверхкритический режим течения. Как видно из (1) и (4), эти ситуации реализуются соответственно для сечений, в которых отклонения от среднего уровня удовлетворяют неравенствам $h < h_{\min} = -1/c$, $h > h_{\max} = (2c - 3)/c$.

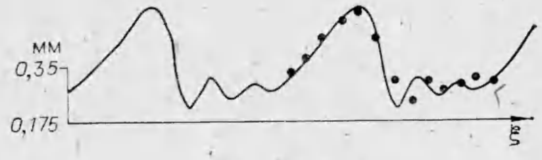
Надо отметить, что при переходе от нормальных волновых режимов к режимам с возвратными течениями во впадинах и к сверхкритическим изменений зависимости амплитуд волн от скорости не происходит. Так, на фиг. 5 для воды этим режимам соответствуют расчетные точки с амплитудой $a \approx 1$.



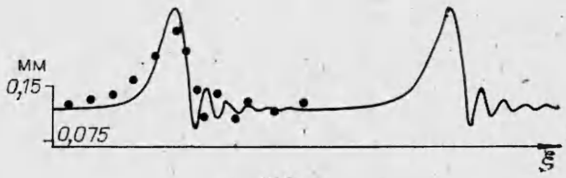
Фиг. 1



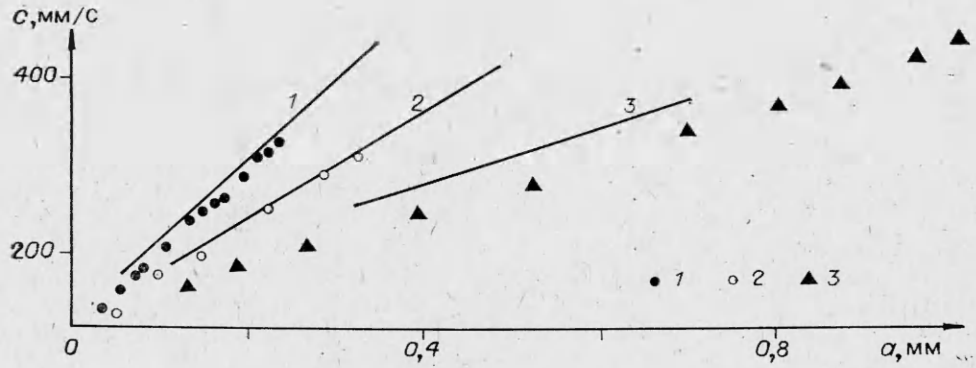
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В эксперименте такие режимы пока не обнаружены. Возможно, это связано с тем, что сверхкритические и возвратные зоны занимают узкие участки на длине волны и их трудно зафиксировать, а возможно, что появление их в расчетах является следствием сделанного упрощающего предположения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Капица П. Л.** Волновые течения тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
2. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Препринт 36—79. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1979.
3. **Benjamin T. B.** Wave formation in laminar flow down on inclined plane.— J. Fluid Mech., 1957, v. 2, pt 4.
4. **Chia-Shun Yih.** Stability of liquid flow down on inclined plane.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, N 3.
5. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3.
6. **Цвелодуб О. Ю.** Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.

7. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке.— ПМТФ, 1979, № 6.
8. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
9. **Шкадов В. Я.** Уединенные волны в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
10. **Шкадов В. Я.** К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 2.
11. **Цвелодуб О. Ю.** Стационарные бегущие волны на вертикальной пленке жидкости.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
12. **Цвелодуб О. Ю.** Солитоны на стекающей пленке при умеренных расходах жидкости.— ПМТФ, 1980, № 3.
13. **Гапонов В. А.** Пакет подпрограмм быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов. Препринт 14—76. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1976.
14. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В.** Десорбция слаборастворимого газа из стекающих волновых пленок жидкости.— В кн.: Расчет тепломассообмена в энергохимических процессах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
15. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В.** Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости.— ИФЖ, 1976, т. 30, № 5.

Поступила 25/VI 1984 г.

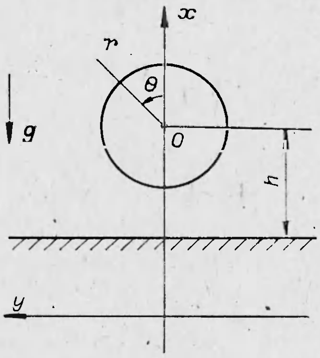
УДК 532.582

О ДВИЖЕНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ВИБРИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

(Новосибирск)

В [1] изложены качественные результаты экспериментов с вибрирующими жидкостями и твердыми телами. В частности, указано, что тело, помещенное в цилиндрический сосуд с жидкостью, плотность которой больше, чем плотность тела, может тонуть, если сосуд совершает колебания вдоль своей оси. В связи с этим в данной работе рассматривается плоская задача о движении в поле силы тяжести кругового цилиндра, находящегося в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью колеблющейся стенки (см. фигуру). Первоначально жидкость и цилиндр покоятся. В последующие моменты времени течение жидкости потенциально и симметрично относительно оси x, цилиндр движется поступательно. Найдены условия, при выполнении которых цилиндр, плотность которого меньше, чем плотность окружающей его жидкости, не всплывает, а тонет.



1. Пусть x, y — инерциальная система прямоугольных координат в плоскости течения; **i** и **j** — единичные векторы, направления которых совпадают соответственно с направлениями осей x и y; t—время; a—радиус цилиндра; $O(L, 0)$ — точка пересечения плоскости течения с осью цилиндра; h — расстояние от точки O до линии пересечения плоскости течения с поверхностью стенки ($h > a$); h_0 — значение h при $t = 0$; $H = L - h$; $\hat{x} = x - H$; $r = \sqrt{(\hat{x} - h)^2 + y^2}$; θ — угол с вершиной в точке O между векторами **i** и $(\hat{x} - h)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $\rho_ц$ — плотность цилиндра; $\rho_ж$ — плотность жидкости; f — произвольная функция от t; $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}$ — ускорение свободного падения.

Будем рассматривать течение жидкости и движение цилиндра относительно системы координат $\hat{x}$, y, связанной со стенкой. Потенциал Φ скорости течения, давление p и расстояние h удовлетворяют следующим уравнениям и условиям:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{x}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{p}{\rho_ж} + \left(g + \frac{d^2H}{dt^2}\right)\hat{x} = f; \tag{1.1}$$