ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Мищенко Л. Д., Дьяченко С. С., Тарабанова В. П.** Исследование изменений структуры и характера разрушения стали 15Х1М1Ф в процессе ползучести.— Изв. высш. учеб. заведений. Черн. металлургия, 1978, № 2.
3. **Локощенко А. М., Шестериков С. А.** Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении.— ПМТФ, 1980, № 3.

УДК 539.30

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБОЛОЧКИ С НЕДЕФОРМИРУЕМЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

При произвольных поворотах и деформациях, подчиненных условию нерастяжимости поперечных волокон, трехмерная нелинейная задача деформирования оболочки сведена к двумерной задаче деформирования ее базисной поверхности.

Сформулированная двумерная задача требует постановки пяти контурных граничных условий. Описываемая ею нелинейная модель деформируемой поверхности отличается от модели Коссера отсутствием поперечных компонент у тензора внутренних моментов.

При изложении материала сохранены обозначения, принятые в [1]. Прописные латинские индексы принимают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2.

1. Оболочка как трехмерный безмоментный континуум. Пусть континуум, образующий оболочку, является безмоментным и в начальный момент времени (до деформации) занимает трехмерную область (объем) B с границей (поверхностью) C. Эта область параметризуется лагранжевыми координатами t_N с базисом $\mathbf{A}_{(M)}(t_N)$.

При деформации оболочки происходит непрерывное преобразование начального базиса в мгновенный базис $\mathbf{A}_{\{M\}}(t_N)$ (возможная зависимость от времени предполагается, но явно не указывается). Из этого полного преобразования выделяется жесткий поворот начального базиса, преобразующий его в повернутый базис $\mathbf{A}_{[M]}(t_N)$.

Преобразование жесткого поворота выражается через векторное поле поворотов $\mathbf{V}(t_N)$ взаимно обратными формулами Родрига

$$\mathbf{A}_{[N]} = \mathbf{A}_{(N)} + (1/F)\mathbf{V}\times(\mathbf{A}_{(N)} + (1/2)\mathbf{V}\times\mathbf{A}_{(N)}), \tag{1.1}$$
$$\mathbf{A}_{(N)} = \mathbf{A}_{[N]} - (1/F)\mathbf{V}\times(\mathbf{A}_{[N]} - (1/2)\mathbf{V}\times\mathbf{A}_{[N]}),\ F = 1+(1/4)\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}$$

(соответствующие формулы в [1] по вине автора содержат описку).

Поле поворотов сохраняет начальную метрику оболочки, производя лишь изгибания погруженных в нее линий и поверхностей. Мерой этих изгибаний служит тензорное поле $\mathbf{V}_{[M]} = (1/F)(\nabla_M \mathbf{V} + (1/2)\mathbf{V}\times\nabla_M\mathbf{V}) = \mathbf{V}_{[MN]}\,\mathbf{A}^{[N]}$ (∇_M — оператор частного дифференцирования по t_M).

Через тензор изгибаний определяются ковариантные производные от векторов повернутого базиса: $\nabla_{(M)}\mathbf{A}_{[N]} = \mathbf{V}_{[M]}\times\mathbf{A}_{[N]}$ ($\nabla_{(M)}$ — оператор ковариантного дифференцирования по t_M в начальном базисе).

Преобразование повернутого базиса в мгновенный порождает тензорное поле деформаций

$$\mathbf{U}_{[M]} = \mathbf{A}_{\{M\}} - \mathbf{A}_{[M]} = U_{[MN]}\,\mathbf{A}^{[N]}. \tag{1.2}$$

Если $\mathbf{U}(t_N)$ — векторное поле перемещений, то по определению справедливо равенство

$$\mathbf{A}_{\{M\}} = \mathbf{A}_{(M)} + \nabla_M\mathbf{U} \tag{1.3}$$

и из (1.2) следует уравнение

$$\mathbf{U}_{[M]} = \nabla_M\mathbf{U} + \mathbf{A}_{(M)} - \mathbf{A}_{[M]}, \tag{1.4}$$

которое в совокупности с (1.1) определяет поле деформаций через поля перемещений и поворотов.

Имеют место следующие правила варьирования кинематических полей оболочки (∇_0 — оператор варьирования):

$$\nabla_0\mathbf{A}_{[M]} = \mathbf{V}_0\times\mathbf{A}_{[M]},\ \ \nabla_M\mathbf{V}_0 = \nabla_0 V_{[MN]}\,\mathbf{A}^{[N]},\ \ \nabla_M\mathbf{U}_0 - \mathbf{V}_0\times\mathbf{A}_{\{M\}} = \nabla_0 U_{[MN]}\mathbf{A}^{[N]},$$
$$\mathbf{V}_0 = (1/F)(\nabla_0\mathbf{V} + (1/2)\mathbf{V}\times\nabla_0\mathbf{V}),\ \ \mathbf{U}_0 = \nabla_0\mathbf{U}.$$

Определенные в области B и отнесенные к ее начальной метрике плотности полей объемных сил $\mathbf{F}(t_N)$ и напряжений $\mathbf{X}^{(M)}(t_N)$ подчиняются локальным (статическим или динамическим) уравнениям

(1.5) $$\nabla_{(M)}\,\mathbf{X}^{(M)}+\mathbf{F}=0,\quad \mathbf{A}_{\{M\}}\times\mathbf{X}^{(M)}=0.$$

Второе из этих уравнений обеспечивает симметричность двубазисного тензора напряжений $X^{(MN)}=\mathbf{X}^{(M)}\cdot\mathbf{A}^{\{N\}}$ и обнаруживает несимметричность двубазисного тензора $X^{(MN]}=\mathbf{X}^{(M)}\cdot\mathbf{A}^{[N]}$.

На границе области выполняется условие

(1.6) $$[(\mathbf{A}_{(\nu)}\cdot\mathbf{A}_{(M)})\mathbf{X}^{(M)}-\mathbf{P}]\cdot\mathbf{U}_0=0,$$

где $\mathbf{P}(t_N)$ — определенная на поверхности C и отнесенная к ее начальной метрике плотность поля поверхностных сил, $\mathbf{A}_{(\nu)}(t_N)$ — поле нормалей к поверхности C.

Плотность $W_0(t_N)$ виртуальной энергии деформации оболочки определяется любым из равенств $W_0=X^{(MN]}\,\nabla_0 U_{[MN]}=X^{(MN)}\,\nabla_0 U_{(MN)}$. Здесь $U_{(MN)}(t_N)$—симметрический тензор деформаций Грина, не зависящий от поля поворотов:

(1.7) $$2U_{(MN)}=\mathbf{A}_{\{M\}}\cdot\mathbf{A}_{\{N\}}-\mathbf{A}_{(M)}\cdot\mathbf{A}_{(N)}=\mathbf{A}_{(N)}\cdot\nabla_M\mathbf{U}+\mathbf{A}_{(M)}\cdot\nabla_N\mathbf{U}+\nabla_M\mathbf{U}\cdot\nabla_N\mathbf{U}=$$
$$=\mathbf{A}_{[N]}\cdot\mathbf{U}_{[M]}+\mathbf{A}_{[M]}\cdot\mathbf{U}_{[N]}+\mathbf{U}_{[M]}\cdot\mathbf{U}_{[N]}.$$

Возможность определения виртуальной энергии деформации через симметрические тензоры $X^{(MN)}$ и $U_{(MN)}$, не зависящие от жесткого поворота базиса, означает, что такой поворот в определении безмоментного континуума никак не участвует (является скрытым, по выражению Коссера). Поэтому для безмоментного континуума повернутый базис является произвольным базисом. Имеющийся произвол проявляется в том, что тензор $U_{[MN]}$ не является, вообще говоря, симметрическим. Любая фиксация повернутого базиса устанавливает три скалярных связи между компонентами тензора $U_{[MN]}$, а любые три независимые связи, навязанные тензору $U_{[MN]}$, фиксируют положение повернутого базиса. Наиболее естественными связями являются условия симметричности этого тензора: $U_{[MN]}=U_{[NM]}$. Однако, как будет видно из дальнейшего, при построении моделей оболочки более эффективны другие условия фиксации повернутого базиса.

Для обратимых изотермических и адиабатических процессов деформирования оболочки может быть определена функция энергии деформации $W(U_{(MN)})$ такая, что $W_0=\nabla_0 W=X^{(MN)}\,\nabla_0 U_{(MN)}$. Отсюда следуют уравнения нелинейной упругой связи между симметрическими тензорами напряжений и деформаций (определяющие уравнения):

(1.8) $$X^{(MN)}=\partial W/\partial U_{(MN)}.$$

Как следствие этих основных уравнений могут быть получены уравнения связи между несимметрическими тензорами $X^{(MN]}$ и $U_{[MN]}$. Наиболее простой способ состоит в использовании следующих из разложений $\mathbf{X}^{(M)}=X^{(ML]}\,\mathbf{A}_{[L]}=X^{(MN)}\mathbf{A}_{\{N\}}$ зависимостей $X^{(ML]}=X^{(MN)}\,\mathbf{A}_{\{N\}}\cdot\mathbf{A}^{[L]}$, которые в совокупности с (1.8) приводят к уравнениям связи

(1.9) $$X^{(ML]}=\mathbf{A}_{\{N\}}\cdot\mathbf{A}^{[L]}\,\partial W/\partial U_{(MN)}.$$

Производные от потенциальной функции предполагаются здесь выраженными с помощью (1.7) через компоненты несимметрического тензора $U_{[MN]}$.

Определяющие уравнения (1.9) замыкают сформулированную систему кинематических и силовых уравнений оболочки как трехмерного безмоментного континуума.

2. Оболочка как двумерный моментный континуум. Распределение массы оболочки по точкам образующей ее (базисной) поверхности придает последней смысл двумерного континуума. Для того чтобы деформация такого континуума могла моделировать деформацию оболочки, его следует считать моментным. Теория нелинейного деформирования двумерного моментного континуума может быть получена как следствие теории трехмерного моментного континуума [1].

Пусть начальный пространственный базис $\mathbf{A}_{(M)}$ определен на поверхности b с границей (контуром) c. Так как поверхность параметризуется двумя внутренними координатами t_1 и t_2, то $\mathbf{A}_{(M)}=\mathbf{a}_{(M)}(t_n)$. По определению $\mathbf{a}_{(m)}(t_n)$— базис внутренней системы координат, $\mathbf{a}_{(3)}(t_n)$ — нормальный к поверхности базисный вектор. Вследствие этого векторы двумерного начального базиса $\mathbf{a}_{(M)}$ связаны между собой условиями ортогональности

(2.1) $$\mathbf{a}_{(m)}\cdot\mathbf{a}_{(3)}=0.$$

Деформация поверхности производит преобразование начального базиса в мгновенный базис $\mathbf{a}_{\{M\}}(t_n)$ (возможная зависимость от времени предполагается, но явно не указывается). Из этого полного преобразования выделяется жесткий поворот начального базиса, переводящий его в повернутый базис $\mathbf{a}_{[M]}(t_n)$. Преобразование поворота выражается через векторное поле поворотов $\mathbf{v}(t_n)$ формулами

$$
\begin{gathered}
\mathbf{a}_{[N]} = \mathbf{a}_{(N)} + (1/f)\mathbf{v} \times (\mathbf{a}_{(N)} + (1/2)\mathbf{v} \times \mathbf{a}_{(N)}), \\
\mathbf{a}_{(N)} = \mathbf{a}_{[N]} - (1/f)\mathbf{v} \times (\mathbf{a}_{[N]} - (1/2)\mathbf{v} \times \mathbf{a}_{[N]}),\ f = 1 + (1/4)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

и подчиняется условиям

$$
\begin{gathered}
\mathbf{a}_{[M]}\cdot\mathbf{a}_{[N]} = \mathbf{a}_{(M)}\cdot\mathbf{a}_{(N)} = a_{MN}, \\
\mathbf{a}_{[L]}\cdot(\mathbf{a}_{[M]} \times \mathbf{a}_{[N]}) = \mathbf{a}_{(L)}\cdot(\mathbf{a}_{(M)} \times \mathbf{a}_{(N)}) = d_{LMN},
\end{gathered}
$$

так что a_{MN} — метрический, d_{LMN} — дискриминантный тензоры начального и повернутого базисов одновременно.

Подобно тому как трехмерные базисы $\mathbf{A}_{(M)}$, $\mathbf{A}_{[M]}$ и $\mathbf{A}_{\{M\}}$ вырождаются на поверхности b в двумерные базисы $\mathbf{a}_{(M)}$, $\mathbf{a}_{[M]}$ и $\mathbf{a}_{\{M\}}$, все введенные в [1] трехмерные поля вырождаются в двумерные поля, обозначаемые соответствующими строчными буквами: $\mathbf{u}(t_n)$ — поле перемещений, $\mathbf{v}(t_n)$ — поле поворотов, $\mathbf{u}_{[M]}(t_n)$ — поле метрических деформаций, $\mathbf{v}_{[M]}(t_n)$ — поле изгибаний, $\mathbf{x}^{(M)}(t_n)$ и $\mathbf{y}^{(M)}(t_n)$ — линейные плотности полей внутренних сил и моментов, $\mathbf{p}(t_n)$ и $\mathbf{q}(t_n)$ — линейные плотности полей контурных сил и моментов, $\mathbf{f}(t_n)$ и $\mathbf{g}(t_n)$ — плотности полей поверхностных (в том числе инерционных) сил и моментов.

Так как сечениями двумерного континуума являются линии, принадлежащие поверхности b (в частности, координатные линии), то внешние воздействия он может воспринимать только за счет внутренних деформаций и напряжений, определенных на этих линиях. Вследствие этого замкнутый в себе двумерный континуум должен быть подчинен дополнительным связям

$$
\mathbf{u}_{[3]} = 0,\ \mathbf{v}_{[3]} = 0,\ \mathbf{x}^{(3)} = 0,\ \mathbf{y}^{(3)} = 0. \tag{2.3}
$$

Следствием первой связи является равенство $\mathbf{a}_{\{3\}} = \mathbf{a}_{[3]}$, означающее, что в процессе деформации нормальный вектор совершает лишь жесткий поворот, оставаясь недеформируемым. Два остальных вектора мгновенного базиса в общем случае не совпадают с соответствующими векторами повернутого базиса. Более того, если векторы повернутого базиса подчинены условиям ортогональности вида (2.1), то для векторов мгновенного базиса эти условия в общем случае не выполняются. Из последовательной цепочки равенств $\mathbf{a}_{\{m\}}\cdot\mathbf{a}_{\{3\}} = (\mathbf{a}_{[m]} + \mathbf{u}_{[m]})\cdot\mathbf{a}_{[3]} = \mathbf{u}_{[m]}\cdot\mathbf{a}_{[3]}$ следует, что условия ортогональности вида (2.1) для мгновенного базиса выполняются лишь при отсутствии нормальных компонент у векторов $\mathbf{u}_{[m]}$.

Операции сокращения размерности и подчинения связям (2.3) уравнений трехмерного моментного континуума [1] приводят к замкнутой системе уравнений деформирования двумерного моментного континуума. Ее образуют следующие группы уравнений.

1. Кинематические уравнения, определяющие тензорные поля изгибаний и деформаций через независимые векторные поля перемещений и поворотов:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}_{[m]} = u_{[mN]}\,\mathbf{a}^{[N]} = \mathbf{a}_{\{m\}} - \mathbf{a}_{[m]} = \nabla_m\mathbf{u} - (1/f)\mathbf{v} \times (\mathbf{a}_{(m)} + (1/2)\mathbf{v} \times \mathbf{a}_{(m)}) = \\
= \nabla_m\mathbf{u} - (1/f)\mathbf{v} \times (\mathbf{a}_{[m]} - (1/2)\mathbf{v} \times \mathbf{a}_{[m]}),\ \mathbf{v}_{[m]} = v_{[mN]}\,\mathbf{a}^{[N]} = (1/f)(\nabla_m\mathbf{v} + \\
+ (1/2)\mathbf{v} \times \nabla_m\mathbf{v}).
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Следствием уравнений (2.4) являются условия сплошности (уравнения совместности деформаций) двумерного континуума

$$
d^{3mn}(\nabla_{(m)}\mathbf{v}_{[n]} - (1/2)\mathbf{v}_{[m]} \times \mathbf{v}_{[n]}) = 0,\quad d^{3mn}(\nabla_{(m)}\mathbf{u}_{[n]} + \mathbf{v}_{[m]} \times \mathbf{a}_{[n]}) = 0
$$

($\nabla_{(m)}$ — оператор ковариантного дифференцирования по t_m в начальном базисе $\mathbf{a}_{(M)}$).

Определяемые равенствами

$$
\begin{gathered}
\nabla_{(m)}\mathbf{a}_{[n]} = \nabla_m\mathbf{a}_{[n]} - c^{l}_{\cdot nm}\mathbf{a}_{[l]} + \\
+ b_{mn}\mathbf{a}_{[3]},\ \nabla_{(m)}\mathbf{a}_{[3]} = \nabla_m\mathbf{a}_{[3]} - b_{mn}\mathbf{a}^{[n]}
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

ковариантные производные от векторов повернутого базиса вычисляются по правилу $\nabla_{(m)}\mathbf{a}_{[N]} = \mathbf{v}_{[m]} \times \mathbf{a}_{[N]}$. В равенствах (2.5) $c^{l}_{\cdot mn}$ — кристофели 2-го рода внутренней системы координат поверхности, $b_{mn} = \mathbf{a}_{(n)}\cdot\nabla_m\mathbf{a}_{(3)}$ — тензор начальной кривизны поверхности.

2. Силовые (статические или динамические) уравнения, связывающие тензорные поля внутренних сил и моментов:

(2.6) $$\nabla_{(m)}\mathbf{x}^{(m)}+\mathbf{f}=0,\ \nabla_{(m)}\mathbf{y}^{(m)}+\mathbf{a}_{\{m\}}\times\mathbf{x}^{(m)}+\mathbf{g}=0.$$

3. Условия на граничном контуре c:

(2.7) $$[(\mathbf{a}_{(\nu)}\cdot\mathbf{a}_{(m)})\mathbf{x}^{(m)}-\mathbf{p}]\cdot\mathbf{u}_0=0,\ [(\mathbf{a}_{(\nu)}\cdot\mathbf{a}_{(m)})\mathbf{y}^{(m)}-\mathbf{q}]\cdot\mathbf{v}_0=0$$

($\mathbf{a}_{(\nu)}(t_n)$ — поле единичных нормалей к контуру, касающихся поверхности b, $\mathbf{u}(t_n)$ и $\mathbf{v}_0(t_n)$ — поля виртуальных перемещений и поворотов).

4. Выражение поверхностной плотности $w_0(t_n)$ виртуальной энергии деформации и определяющие уравнения для обратимых изотермических и адиабатических процессов деформирования двумерного континуума:

(2.8) $$w_0=x^{(mN]}\nabla_0 u_{[mN]}+y^{(mN]}\nabla_0 v_{[mN]},$$

$$w_0=\nabla_0 w,\ w=w(u_{[mN]},v_{[mN]}),\ x^{(mN]}=\partial w/\partial u_{[mN]},\ y^{(mN]}=\partial w/\partial v_{[mN]}.$$

Образуемая уравнениями (2.4), (2.6)—(2.8) нелинейная модель двумерного моментного континуума совпадает с моделью Коссера, приведенной в [2]. Описываемый этой моделью двумерный континуум называется поверхностью Коссера.

При таком формальном построении модели двумерного моментного континуума остается нераскрытым ее соответствие задаче деформирования оболочки как реального пространственного тела.

3. Оболочка как трехмерный безмоментный континуум с недеформируемыми волокнами. Специфика оболочки позволяет ввести пространственную систему координат t_N, связанную с погруженной в нее базисной поверхностью b. Параметры t_1 и t_2 определяются как внутренние координаты этой поверхности, а параметр t_3 — как нормальная к ней координата.

Введенной таким образом системе координат ставятся в соответствие два начальных базиса: трехмерный базис $\mathbf{A}_{(M)}(t_N)$, определенный во всем объеме оболочки, и двумерный базис $\mathbf{a}_{(M)}(t_n)$, определенный на базисной поверхности. По определению оболочки эти базисы связаны между собой равенствами

(3.1) $$\mathbf{A}_{(m)}=(a_{mn}+b_{mn}t_3)\mathbf{a}^{(n)},\ \mathbf{A}_{(3)}=\mathbf{a}_{(3)}.$$

Деформация оболочки преобразует начальные базисы в соответствующие мгновенные базисы $\mathbf{A}_{\{M\}}(t_N)$ и $\mathbf{a}_{\{M\}}(t_n)$. Из полного их преобразования выделяется жесткий поворот, порождающий повернутые базисы $\mathbf{A}_{[M]}(t_N)$ и $\mathbf{a}_{[M]}(t_n)$. Допустимый при этом произвол позволяет выразить поворот обоих базисов через двумерное поле поворотов $\mathbf{v}(t_n)$ формулами вида (1.1) и (2.2). Вследствие этого между повернутыми базисами сохраняются связи вида (3.1):

(3.2) $$\mathbf{A}_{[m]}=(a_{mn}+b_{mn}t_3)\mathbf{a}^{[n]},\ \mathbf{A}_{[3]}=\mathbf{a}_{[3]}.$$

Кроме того, метрические и дискриминантные тензоры повернутых базисов совпадают с соответствующими тензорами начальных базисов.

Для согласования с изложенной в предыдущем разделе теорией поверхности Коссера деформация оболочки подчиняется кинематической связи

(3.3) $$\mathbf{A}_{\{3\}}=\mathbf{a}_{[3]},$$

означающей, что поперечные волокна оболочки не деформируются, а лишь совершают жесткий поворот.

Следствием (3.2), (3.3) является цепочка равенств $\mathbf{A}_{\{3\}}=\mathbf{A}_{[3]}=\mathbf{a}_{\{3\}}=\mathbf{a}_{[3]}$.

В результате интегрирования следующего из (1.3), (3.1) и (3.3) уравнения $\nabla_3\mathbf{U}=\mathbf{a}_{[3]}-\mathbf{a}_{(3)}$ устанавливается линейное распределение по нормальной координате поля перемещений оболочки:

(3.4) $$\mathbf{U}=\mathbf{u}+(\mathbf{a}_{[3]}-\mathbf{a}_{(3)})t_3.$$

По формуле (1.4) определяется соответствующее распределению (3.4) поле деформаций оболочки:

(3.5) $$\mathbf{U}_{[3]}\equiv 0,\ \mathbf{U}_{[m]}=\mathbf{u}_{[m]}+\mathbf{v}_{[m]}\times\mathbf{a}_{[3]}t_3.$$

Здесь $\mathbf{u}_{[m]}$ и $\mathbf{v}_{[m]}$ — тензорные поля деформаций базисной поверхности, определяемые равенствами (2.4).

Вариационные равенства

(3.6) $$\int_B\left[\left(\nabla_{(M)}\mathbf{X}^{(M)}+\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{U}_0+\left(\mathbf{A}_{\{M\}}\times\mathbf{X}^{(M)}\right)\cdot\mathbf{V}_0\right]dB=$$

$$=\int_b\left[\left(\nabla_{(m)}\mathbf{x}^{(m)}+\mathbf{f}\right)\cdot\mathbf{u}_0+\left(\nabla_{(m)}\mathbf{y}^{(m)}+\mathbf{a}_{\{m\}}\times\mathbf{x}^{(m)}+\mathbf{g}\right)\cdot\mathbf{v}_0\right]db=\int_b(\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_0+\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}_0-$$

$$-w_0)\,db+\int_c(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_0+\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_0)\,dc=0,$$

имеющие смысл принципа виртуальных перемещений оболочки, дают определенные на базисной поверхности двумерные силовые уравнения вида (2.6), определенные на ее контуре граничные условия вида (2.7) и выражение для поверхностной плотности виртуальной энергии деформации вида

$$w_0 \equiv \int W_0 dt_3 = x^{(mN]} \nabla_0 u_{[mN]} + y^{(mn]} \nabla_0 v_{[mn]}. \tag{3.7}$$

Кроме того, равенства (3.6) раскрывают смысл двумерных силовых полей как осредненных по толщине оболочки трехмерных полей:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}^{(m)} = \frac{1}{j} \int \mathbf{X}^{(m)} J\, dt_3,\ \mathbf{y}^{(m)} = \mathbf{a}_{[3]} \times \\ \times \frac{1}{j} \int \mathbf{X}^{(m)} J t_3 dt_3,\ \mathbf{p} = \frac{1}{j} \int \mathbf{P} J dt_3, \\ \mathbf{q} = \mathbf{a}_{[3]} \times \frac{1}{j} \int \mathbf{P} J t_3 dt_3,\ \mathbf{f} = \frac{1}{j} \int \bigl[\mathbf{F} J + \\ + \nabla_3 (\mathbf{X}^{(3)} J)\bigr] dt_3,\ \mathbf{g} = \mathbf{a}_{[3]} \times \frac{1}{j} \int \bigl[\mathbf{F} J t_3 + \nabla_3 (\mathbf{X}^{(3)} J t_3)\bigr] dt_3\end{gathered} \tag{3.8}$$

($j = j(t_n)$ — якобиан базиса $\mathbf{a}_{(N)}$, $J = J(t_N)$ — якобиан базиса $\mathbf{A}_{(N)}$, пределы интегрирования по переменной t_3 для простоты опущены).

При известных уравнениях связи (1.9) между трехмерными полями напряжений $\mathbf{X}^{(M)}$ и деформаций $\mathbf{U}_{[M]}$ верхние из равенств (3.8) имеют также смысл определяющих уравнений двумерного континуума. В самом деле, равенства (3.5) выражают трехмерное поле деформаций $\mathbf{U}_{[M]}$ через двумерные поля $\mathbf{u}_{[M]}$ и $\mathbf{v}_{[M]}$. Посредством равенств (1.9), (3.8) через эти двумерные поля выражаются трехмерное поле напряжений $\mathbf{X}^{(M)}$ и двумерные силовые поля $\mathbf{x}^{(m)}$, $\mathbf{y}^{(m)}$.

Следующие из определения векторов $\mathbf{y}^{(m)}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{g}$ равенства

$$\mathbf{y}^{(m)} \cdot \mathbf{a}_{[3]} = 0,\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_{[3]} = 0,\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{a}_{[3]} = 0 \tag{3.9}$$

свидетельствуют о том, что в повернутом базисе векторные поля внутренних и внешних моментов являются двукомпонентными.

Равенства (3.9) являются дополнительными условиями, которые отличают замкнутую систему уравнений деформирования базисной поверхности, погруженной в трехмерный безмоментный континуум с кинематической связью (3.3), от модели деформируемой поверхности Коссера. В последней модели, помимо обычных «оболочечных» моментов, являющихся следствием осреднения напряжений по толщине оболочки, присутствуют еще нормальные моменты $y^{(m3]} = \mathbf{y}^{(m)} \cdot \mathbf{a}^{[3]}$, порождаемые локальной моментностью двумерного континуума. Эти моменты совершают работу на приращениях нормальных компонент $v_{[m3]} = \mathbf{v}_{[m]} \cdot \mathbf{a}_{[3]}$ тензора изгибаний.

Дифференциальный порядок сформулированной в предыдущем разделе системы уравнений деформируемой поверхности Коссера равен двенадцати, и граничные условия (2.7) формулируются для нее шестью скалярными уравнениями. Подчинение этой системы связям (3.9) понижает ее порядок до десятого и сокращает число скалярных граничных условий до пяти. Именно такое число результирующих силовых факторов возникает при приведении к базисной поверхности сил, распределенных по граничному сечению оболочки.

В итоге можно утверждать, что кинематика базисной поверхности в континууме-оболочке со связью (3.3) тождественна кинематике поверхности Коссера, а статика (динамика) отличается за счет дополнительных связей (3.9). Вместе с тем модель оболочки как трехмерного безмоментного континуума, подчиненного кинематической связи (3.3), включает в себя не только систему двумерных уравнений, описывающих деформацию базисной поверхности, но и трехмерные уравнения (3.5), (3.4), (1.9), (1.6), (1.5), позволяющие по решению двумерной задачи для поверхности строить решение трехмерной задачи для оболочки. Поэтому модель оболочки как трехмерного безмоментного континуума с недеформируемыми поперечными волокнами богаче по содержанию, чем модель двумерного моментного континуума.

Подчинение построенной здесь модели оболочки дополнительной кинематической связи $\mathbf{u}_{[m]} \cdot \mathbf{a}_{[3]} = 0$ превращает ее в нелинейную модель Кирхгофа [3].

Поступила 16 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шкутин Л. И.** Нелинейные модели деформируемых моментных сред.— ПМТФ, 1980, № 6.
2. **Кутилин Д. И.** Теория конечных деформаций. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.
3. **Шкутин Л. И.** Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек.— Прикладные проблемы прочности и пластичности, 1977, вып. 7; 1978, вып. 8; 1978, вып. 9.