

УДК 519.622.2

О построении обобщенно-периодических решений сложной структуры неавтономной системы дифференциальных уравнений*

А.Н. Пчелинцев

Тамбовский государственный технический университет, ул. Советская, 106, Тамбов, 392000
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Пчелинцев А.Н. О построении обобщенно-периодических решений сложной структуры неавтономной системы дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 1. — С. 63–70.

В работе рассмотрена численная схема построения приближенных обобщенно-периодических решений сложной структуры неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической правой частью на поверхности тора. Показано существование таких решений, а также сходимость метода последовательных приближений. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: обобщенно-периодическое решение, система обыкновенных дифференциальных уравнений, ряд Фурье, почти периодическое решение, иррациональная обмотка тора.

Pchelintsev A.N. On constructing the generally periodical solutions of a complicated structure of a non-autonomous system of differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 1. — P. 63–70.

In this paper, a numerical scheme of constructing approximate generally periodical solutions of a complicated structure of a non-autonomous system of ordinary differential equations with the periodical right-hand sides on the surface of a torus is considered. The existence of such solutions as well as convergence of the method of successive approximations are shown. There are given results of the computational experiment.

Key words: generally-periodical solution, system of ordinary differential equations, Fourier series, almost periodical solution, irrational winding of torus.

1. Введение

Рассмотрим неавтономную систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — векторная функция действительного переменного t , $f = (f_1, \dots, f_n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\partial f_k / \partial x_j$ ($k, j = \overline{1, n}$) на прямом произведении $\mathbb{R} \times \Gamma$ действительной оси \mathbb{R} и некоторого открытого подмножества Γ евклидова векторного пространства \mathbb{R}^n . Кроме того, предположим, что f — ω -периодическая по t функция.

Определение [1, с. 226]. Пусть решение $\xi(t)$ системы (1) определено и ограничено для всех $t \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что решение $\xi(t)$ является *обобщенно-периодическим*, если

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 10-07-00136 и № 11-07-00098).

для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N , что при $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|\xi(t) - \xi(t + N\omega)| < \varepsilon.$$

Примерами таких решений являются периодическое решение, иррациональная обмотка тора и почти периодическое решение [1, с. 162]. Заметим, что в работе [1, с. 221–225] приведена теорема, намечающая метод и алгоритм построения обобщенно-периодических решений нормальных систем дифференциальных уравнений в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений (некоторые примеры автономных систем были рассмотрены в книге [2]).

В данной работе исследуется неавтономная система дифференциальных уравнений, обобщенно-периодические решения которой отличны от почти периодических, т. е. имеют достаточно *сложную структуру*. В качестве примера физического процесса, где возникают вопросы построения и анализа решений такой структуры, стоит указать задачу С.А. Чаплыгина о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной шероховатой плоскости [3, с. 153–155]. Вообще, в интегрируемых задачах динамики твердого тела с неподвижной точкой часто исследуются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (например, задача Г.К. Сулова [3, с. 157–162], динамические системы с интегральным инвариантом на торе (общий случай) [4, с. 189–195] и др.). В данной работе приведен конкретный пример неавтономной системы с периодической правой частью, обладающей таким же свойством.

Заметим, что в указанных задачах механики твердого тела исследования систем ограничивались в основном качественным анализом автономных систем (проработка численных методов зачастую не проводилась). Всю описанную в статье технику можно перенести без особых изменений и на автономный случай, обратив в константу периодическое возмущение в правой части системы.

Цель работы — получить численную схему построения приближенных обобщенно-периодических решений сложной структуры неавтономной системы с периодической правой частью на поверхности тора.

Особенностью разработанной численной схемы является то, что при численном решении задачи Коши в силу свойств правой части системы не происходит накопление систематической ошибки от шага к шагу по времени. Это отличает описанную схему от традиционных численных методов, а также дает возможность распараллелить алгоритм решения поставленной задачи.

2. Неавтономная система дифференциальных уравнений

Рассмотрим неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\varphi} = \frac{2 + \cos t}{a_{00} + \Psi(\varphi, v)} \equiv \eta_1(t, \varphi, v), \quad \dot{v} = \frac{\mu(2 + \cos t)}{a_{00} + \Psi(\varphi, v)} \equiv \eta_2(t, \varphi, v), \quad (2)$$

заданную на поверхности тора

$$x_1 = (R + r \cos v) \cos \varphi, \quad x_2 = (R + r \cos v) \sin \varphi, \quad x_3 = r \sin v,$$

где период правой части системы по t равен $\omega = 2\pi$; r, R задаются, причем $r \in (0, R)$, μ — положительная константа (параметр системы), которую определим впоследствии, $\Psi(\varphi, v)$ — функция, разлагающаяся в равномерно сходящийся на всей плоскости \mathbb{R}^2 ряд Фурье:

$$\Psi(\varphi, v) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m| + |n| \neq 0}}^{\infty} a_{mn} e^{im\varphi} e^{inv}, \quad i - \text{мнимая единица и}$$

$$a_{mn} = \frac{1}{(|m| + 1)^2 (|n| + 1)^2} \quad \text{при } |m| + |n| \neq 0, \quad a_{00} = \left(\frac{\pi^2}{3} + 1\right)^2. \quad (3)$$

Как будет показано далее, при определенных значениях числа μ обобщенно-периодические решения системы (2) отличаются от почти периодических решений. Но сначала покажем выполнение условий теоремы существования и единственности решений этой системы, а также их нелокальную продолжаемость.

Для вычислений и анализа будем также использовать действительную форму ряда, описывающего функцию Ψ :

$$\Psi(\varphi, v) = 2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} \cos m\varphi + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos m\varphi \cos nv + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos nv \right). \quad (4)$$

Отметим, что

$$\sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m| + |n| \neq 0}}^{\infty} a_{mn} < \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ m \neq 0, n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Так как [5, с. 44]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

то

$$\sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m| + |n| \neq 0}}^{\infty} a_{mn} < \frac{\pi^4}{9} + 2 \frac{\pi^2}{3} < a_{00}. \quad (5)$$

Таким образом, знаменатели дробей, составляющих правую часть системы (2), всегда положительны.

Поскольку ряд (4) непрерывных функций равномерно сходится в любой открытой области Γ пространства \mathbb{R}^2 , то функция Ψ непрерывна в Γ [5, с. 17]. Заметим, что, исходя из формул (3) и (4), вид частных производных $\partial\Psi/\partial\varphi$ и $\partial\Psi/\partial v$, полученных почленным дифференцированием ряда (4), одинаков. Правые части уравнений системы (2) отличаются постоянным множителем μ . Поэтому достаточно исследовать только одну частную производную, например

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial\varphi} = \frac{2(2 + \cos t)}{(a_{00} + \Psi(\varphi, v))^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} m \sin m\varphi + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} m \sin m\varphi \cos nv \right).$$

Сходимость тригонометрических рядов в данном выражении определяет ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\varphi, \quad b_m = \frac{m}{(m+1)^2}. \quad (6)$$

Поскольку числа b_m положительны и последовательность b_1, b_2, \dots монотонно сходится к нулю, то ряд (6) равномерно сходится на любом отрезке, не содержащем числа, кратные 2π [6, с. 95]. Как было отмечено выше, из равномерной сходимости следует непрерывность.

Таким образом, найдется такая открытая область Γ пространства \mathbb{R}^2 , что на множестве $\mathbb{R} \times \Gamma$ будет определена и непрерывна правая часть системы (2) вместе со своими частными производными $\partial\eta_k/\partial\varphi$ и $\partial\eta_k/\partial v$ ($k = \overline{1,2}$). Отметим также, что эти производные определены и при $\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ или $v \equiv 0 \pmod{2\pi}$, однако, скорее всего, не являются непрерывными в этих точках, но частные суммы ряда (6) ограничены в совокупности на всей оси [6, с. 98]. В данной работе покажем, что решения системы (2) единственны и в случае кратности φ или v 2π .

Далее заметим, что найдется такое положительное число M :

$$|\eta_k(t, \varphi, v)| \leq M$$

для всех значений t , φ и v в силу непрерывности и периодичности правой части системы (2) по каждой переменной. Следовательно,

$$\eta_k(t, \varphi, v) = o(|\varphi| + |v|)$$

при $|\varphi| + |v| \rightarrow \infty$ равномерно по t . Тогда по следствию, приведенному в книге [7, с. 18], решения системы (2) могут быть продолжены на всю ось t .

3. Построение решений неавтономной системы

Решения системы (2) определяются из дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{d\varphi} = \mu. \quad (7)$$

Откуда

$$v = v_0 + \mu(\varphi - \varphi_0). \quad (8)$$

Время t на интегральной кривой, начинающейся в точке $\varphi = \varphi_0$, $v = v_0$ при $t_0 = 0$ (начальный момент времени), находится из формулы

$$2t + \sin t = a_{00}(\varphi - \varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \Psi(\tau, \mu(\tau - \varphi_0) + v_0) d\tau \equiv w(\varphi), \quad (9)$$

используя разделение переменных (в силу положительности каждого множителя, составляющего правую часть системы (2)).

Поскольку функция Ψ непрерывна, то она интегрируема на любом отрезке $[\varphi_0, \varphi]$. Следовательно, для нахождения значения интеграла, стоящего в правой части равенства (9), при фиксированном значении φ можно применять численные методы интегрирования (далее покажем, что почленное интегрирование тригонометрических рядов здесь не всегда возможно). Однако подынтегральная функция Ψ не является достаточно гладкой и, значит, не допускает хорошего приближения многочленами, т. е. оценки погрешности точности вычисления определенного интеграла для многих квадратурных формул не применимы (этот факт и ухудшает сходимость численного метода; пример недостаточно гладкой подынтегральной функции приведен в работе [8, с. 93]).

Поэтому оправдано применение таких формул интегрирования как формула средних [8, с. 89, 90] и обобщенная формула трапеций [8, с. 87], так как эти формулы являются интегральными суммами, и, следовательно, они должны сходиться к точному значению интеграла при стремлении шага сетки к нулю в силу непрерывности подынтегральной функции.

Таким образом, мы можем определить для любого φ значение функции $g(\varphi)$ в заданный момент времени t :

$$g(\varphi) = \varphi_0 + \frac{2t + \sin t - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \Psi(\tau, \mu(\tau - \varphi_0) + v_0) d\tau}{a_{00}}. \quad (10)$$

Получаем из (9) алгебраическое уравнение

$$\varphi = g(\varphi). \quad (11)$$

По свойствам определенного интеграла

$$w(\varphi) > 0 \quad \text{при } \varphi > \varphi_0, \quad w(\varphi) < 0 \quad \text{при } \varphi < \varphi_0, \quad w(\varphi_0) = 0$$

функция $w(\varphi)$ является непрерывной, возрастающей и неограниченной на всей области определения, так как

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} w'(\varphi) = a_{00} + \min_{\varphi \in \mathbb{R}} \Psi(\varphi, \mu(\varphi - \varphi_0) + v_0) > 0$$

в силу (5). Тогда решение уравнения (9) в любой фиксированный момент времени t существует и единственно. Следовательно, существует и единственно решение уравнения (11).

Из (5) и (10) имеем

$$|g'(\varphi)| = \frac{|\Psi(\varphi, \mu(\varphi - \varphi_0) + v_0)|}{a_{00}} < 1$$

при всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем, что для решения уравнения (11) можно применять метод последовательных приближений для нахождения координаты φ в заданный момент времени.

Чтобы итерационный процесс быстрее сходился, начальное приближение лучше выбирать равным t , так как с ростом значения t растет значение координаты φ . По найденному значению φ из соотношения (8) определяется угловая координата v .

Итак, мы показали не только существование и единственность решений системы (2) при любых начальных условиях, но и численную схему построения приближений к ним.

4. Определение значения параметра системы

Правая часть системы (2) периодична по t . Этот факт дает нам возможность построить дискретную динамическую систему вдоль решений системы (2) и перенести понятия минимального множества и обобщенно-периодического решения с автономного случая на неавтономный [1, с. 211–230].

Нас будет интересовать случай, когда число μ иррационально. Тогда из уравнения (7) следует, что геометрически решения системы (2) лежат на кривых, покрывающих всюду плотно тор [7, с. 36–38]. При этом на поверхности тора нет точек покоя, поскольку правые части уравнений системы (2) положительны (нет и периодических решений в силу иррациональности числа μ). Тогда поверхность тора является минимальным множеством [1, с. 118]. Следовательно, каждая кривая на торе описывается обобщенно-периодическим решением [1, с. 227].

Определим значение параметра μ так, чтобы обобщенно-периодические решения системы (2) были бы отличны от почти периодических.

Заметим, что под интегралом в правой части формулы (9) стоит почти периодическая функция от τ , поскольку, если рассматривать комплексную форму ряда функции

Ψ , то его сумму по m можно представить как последовательность сумм почти периодических функций, сходящуюся равномерно для всех τ к функции Ψ [9, с. 46–48]. Будем использовать следующий факт из теории почти периодических функций: если неопределенный интеграл почти периодической функции не почти периодичен, то ряд, являющийся суммой квадратов модулей коэффициентов ряда Фурье, полученного почленным интегрированием ряда функции Ψ , должен расходиться [9, с. 71].

Для простоты дальнейшей записи положим $\varphi_0 = 0$. Подставляя в подынтегральное выражение (9) ряд функции Ψ в комплексной форме и интегрируя его почленно, получим ряд

$$\sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m| + |n| \neq 0}}^{\infty} \frac{a_{mn}}{i(m + n\mu)} e^{i((m+n\mu)\varphi + nv_0)}. \quad (12)$$

Сумма квадратов модулей коэффициентов ряда, стоящего в правой части (12), равна

$$\sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m| + |n| \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{a_{mn}}{m + n\mu} \right)^2. \quad (13)$$

Выберем число $\mu > 0$, при котором ряд (13) расходится. Для этого достаточно определить его так, чтобы нашлись такие последовательности p_n и q_n , что

$$|p_n - q_n\mu| < a_{p_n q_n}, \quad p_n \in \mathbb{N}, \quad q_n \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty,$$

где \mathbb{N} — множество натуральных чисел [5, с. 37–40]. Покажем осуществимость такого выбора.

Зададим μ бесконечной цепной дробью

$$\mu = \left[0; \frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; \frac{1}{a_3}; \dots \right],$$

где $a_n \geq 2$. Обозначим n -ю подходящую через p_n/q_n , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \mu. \quad (14)$$

Имеем известные [10, с. 58, 64] соотношения:

$$\left| \mu - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \\ p_0 = a_0 = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_0 = 1, \quad q_{-1} = 0,$$

откуда (так как $q_{n-2} \geq 0$) $q_{n+1} > a_{n+1} q_n$ и $|p_n - q_n\mu| < \frac{1}{q_n a_{n+1}}$. Определим $a_n = (q_{n-1} + 1)^3$.

Тогда

$$|p_n - q_n\mu| < \frac{1}{q_n (q_n + 1) (q_n + 1)^2}. \quad (15)$$

Из предела (14) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n} \right) = \mu, \quad (16)$$

поскольку в знаменателе подходящей дроби $q_n \rightarrow \infty$.

С учетом того, что по теореме Принсгейма [10, с. 68] $0 < \mu < 1$ (равенство единице по доказательству этой теоремы можно опустить), из предела (16) следует, что найдется такое натуральное число n_1 , что для всех $n > n_1$:

$$0 < \frac{p_n + 1}{q_n} < \mu + \varepsilon,$$

где величину положительного числа ε выберем так, чтобы $\mu + \varepsilon < 1$. Тогда для всех $n > n_1$:

$$0 < \frac{p_n + 1}{q_n} < 1.$$

Откуда $p_n + 1 < q_n$.

Из неравенства (15) имеем

$$|p_n - q_n \mu| < \frac{1}{(p_n + 1)(p_n + 2)(q_n + 1)^2} < \frac{1}{(p_n + 1)^2(q_n + 1)^2} = a_{p_n q_n}. \quad \square$$

Таким образом, мы построили решение, отличное от почти периодического. При вычислениях приходится оперировать ограниченным количеством знаков после запятой в числе μ . Тогда оно становится рациональным, и, следовательно, через достаточно большое количество витков интегральная кривая замкнется на торе. Поэтому, чем точнее вычислить число μ , тем лучше будет описывать полученная при вычислениях кривая искомое решение. Рассчитывая это число с точностью 10^{-8} , получим приближенное значение $\mu \approx 0,12497857$.

5. Вычислительный эксперимент

Заметим, что для разных значений t процедуры поиска значений φ не зависимы друг от друга. Это позволяет реализовать описанный способ построения решения неавтономной системы в распределенной компьютерной среде следующим образом. Задается длина T отрезка времени $[0, T]$, на котором будем строить интегральную кривую, описываемую решением, отличным от почти периодического с некоторой точностью, а также количество L частей, на которое разобьем этот отрезок.

Далее вычисляем с заданной точностью число μ и шаг Δt по времени как $\Delta t = T/L$. Момент времени $t_0 = 0$ соответствует начальному условию. В моменты $t_k = k\Delta t$ ($k = \overline{1, L}$) будем вычислять соответствующие координаты φ_k по описанной схеме, причем k -ю координату будет рассчитывать k -й процесс в распределенной компьютерной среде (рис. 1). Полученный набор точек (φ_k, v_k) переводится в координаты (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) .

После того, как известны координаты точек (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) , описывающих кривую на торе, можно произвести их интерполяцию кубическими сплайнами для графического построения.

Заметим, что на ошибку вычисления приближенного значения φ_k влияют точности вычисления значения функции Ψ по формуле (4), интеграла в формуле (10), а также точность метода последовательных приближений.

Таким образом, при параллельном расчете точек на интегральной кривой, соответствующих разным моментам времени, накопление систематической ошибки по времени сводится к минимуму.

При вычислениях также удобно использовать свойство определенного интеграла

$$\int_0^\varphi = \int_0^a + \int_a^\varphi,$$

позволяющее ускорить вычисление значения интеграла за счет того, что на каждой итерации k -й процесс в распределенной компьютерной среде записывает в сетевую базу

данных уже вычисленное значение определенного интеграла и значение числа φ . Когда требуется вычислить интеграл, из базы извлекается значение того интеграла, для которого число a наиболее близко к значению числа φ .

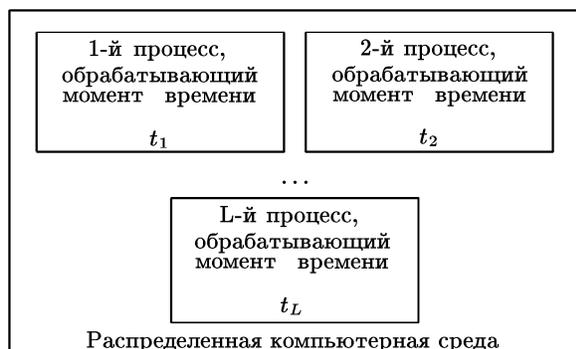


Рис. 1. Схема работы параллельных процессов в распределенной компьютерной среде

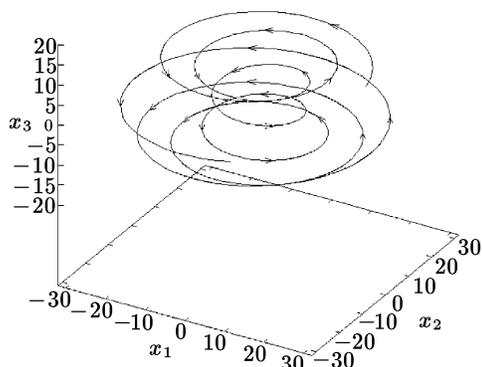


Рис. 2. Интегральная кривая для $\varphi_0 = 0$, $\nu_0 = 1$

На рис. 2 представлена интегральная кривая на торе, построенная в координатах x_1 , x_2 , x_3 на отрезке времени $[0, 400]$, $\Delta t = 1$. Точность метода последовательных приближений бралась равной 10^{-1} ; шаг сетки при расчете интегралов — 10^{-3} ; точности для двойного ряда: по внешней сумме — 10^{-5} , по внутренней сумме — 10^{-8} . Все операции производились с вещественными 128-битными числами в формате с плавающей запятой (использовалась библиотека MPFR C++ высокоточных вычислений для снижения накопления систематической ошибки за счет округлений чисел).

Литература

1. **Афанасьев А.П., Дзюба С.М.** Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. — М.: ЛКИ, 2007.
2. **Пчелинцев А.Н.** Численные методы и обобщенно-периодические решения динамических систем. — Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010.
3. **Козлов В.В.** К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы / Борисов А.В., Мамаев И.С. — Москва, Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2002. — С. 149–173.
4. **Козлов В.В.** Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
5. **Титчмарш Е.** Теория функций. — М.: Наука, 1980.
6. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961.
7. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
8. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. — М.: Наука, 1978.
9. **Бор Г.** Почти периодические функции. — М.: Едиториал УРСС, 2005.
10. **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. — СПб.: Лань, 2006.

*Поступила в редакцию 14 ноября 2011 г.,
в окончательном варианте 27 декабря 2011 г.*