

тицами $\tau_c < \tau_b$ — времени восстановления головной ударной волны, происходит разрушение характерного для затупленных тел прямого скачка уплотнения и формирование некоторой переходной области течения перед телом размером $\sim L$, состоящей из серии конических скачков. Это явление может привести к существенной перестройке поля течения вблизи тела и изменению его аэродинамических характеристик. Для выяснения механизма этих процессов необходимы дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования. Представляется важным, в частности, проанализировать возможность изменения сопротивления тел, летящих со сверхзвуковой скоростью, за счет выдува частиц вперед. Если время между последовательным вылетом двух частиц меньше времени восстановления течения, то можно обеспечить непрерывную трансформацию прямого скачка в конический, что должно привести, как и при наличии иглы [15], к уменьшению лобового сопротивления затупленных тел.

Поступила 14 I 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Салтанов Г. А. Сверхзвуковые двухфазные течения. Минск: Высшая школа, 1972.
2. Spurr J. H., Gerber N. Dust collection efficiency for power law bodies in hypersonic flight.— AIAA J., 1972, vol. 10, N 6.
3. Probst R. F., Fassio F. Dusty hypersonic flows.— AIAA J., 1970, vol. 8, N 4.
4. Waldman G. D., Reinecke W. G. Particle trajectories, heating and breakup in hypersonic shock layers.— AIAA J., 1971, vol. 9, N 6.
5. Баланин Б. А., Злобин В. В. Экспериментальное исследование аэродинамического сопротивления простых тел в двухфазном потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3.
6. Dunbar L. E., Courtney J. F., McMillen L. D. Heating augmentation in erosive hypersonic environments.— AIAA J., 1975, vol. 13, N 7.
7. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. П., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.
8. Клишкин В. Ф., Папырин А. Н., Солоухин Р. И. Оптические методы регистрации быстротекущих процессов. Новосибирск: Наука, 1980.
9. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971.
10. Алхимов А. П., Папырин А. Н. и др. Теоретическое и экспериментальное исследование движения смеси газа с твердыми частицами в сопле Лавалья.— Числ. методы механики сил. среды, 1978, т. 9, № 2.
11. Благосклонов В. И., Кузнецов В. М. и др. О взаимодействии гиперзвуковых неоднородных течений.— ПМТФ, 1979, № 5.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
13. Краснов П. Ф. Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение, 1964.
14. Хлебников В. С. Перестройка течения между парой тел, одно из которых расположено в следе другого при сверхзвуковом обтекании.— Учен. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3.
15. Чжен П. Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979.

УДК 532.5 : 621.22

КВАЗИДВУМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ СТАЦИОНАРНОГО ДОЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОЛЬЦЕВОЙ РШЕТКИ

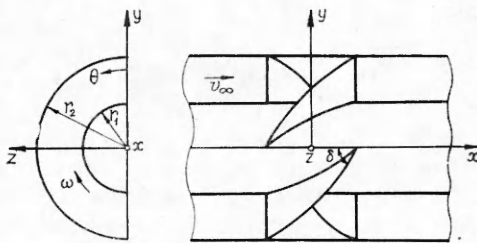
В. П. Рябченко
(Новосибирск)

Изучение дозвуковых течений в осевом компрессоре проводится обычно на основе плоской или осесимметричной теории решеток. Однако результаты, полученные с помощью этих приближений, не дают адекватного описания пространственного течения. В ряде работ [1—3] предприняты попытки определить поправки к этим приближенным теориям, учитывающие пространственный характер течения, при некоторых ограничивающих предположениях. В [1] рассмотрено бесциркуляционное обте-

кание кольцевой решетки, в [2] решена обратная задача теории решеток, в [3] получено двумерное приближение из трехмерной теории, основанной на использовании потенциала ускорений. Тем не менее нет ясной процедуры оценки относительного вклада эффектов, которые не учитываются плоской теорией. В частности, учет изменения числа Маха по высоте лопасти может оказаться существенным для современных компрессоров.

В данной работе получено двумерное приближение из трехмерной теории несущей поверхности в предельном случае бесконечно большого числа лопастей и втулочного отношения, близкого к единице.

1. Будем рассматривать дозвуковой адиабатический поток идеального газа через один ряд лопастей, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω в бесконечном канале между двумя соосными цилиндрами (см. фигуру). Абсолютное движение газа около этой кольцевой решетки будем предполагать потенциальным. Введем подвижную систему координат $Oxyz$, которая вращается вокруг оси цилиндров с угловой скоростью ω и ось x ее совпадает с осью вращения. Интеграл Коши — Лагранжа в этой системе координат можно записать в виде [4]



$$(1.1) \quad \frac{\partial' \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \omega z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega y \frac{\partial \varphi}{\partial z} + P = F(t),$$

где φ — потенциал скорости абсолютного движения газа; штрих означает дифференцирование по времени в подвижной системе координат; $F(t)$ — произвольная функция времени;

$$P = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p_\infty^{1/\kappa}}{\rho_\infty} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \frac{p_{c\infty}}{\rho_{c\infty}} \right);$$

κ — показатель адиабаты; p — давление; p_∞ и ρ_∞ — давление и плотность газа в невозмущенном потоке. Уравнение неразрывности в рассматриваемом случае имеет вид

$$(1.2) \quad \partial' \rho / \partial t - \omega z \partial \rho / \partial y + \omega y \partial \rho / \partial z + \text{div} (\rho \nabla \varphi) = 0.$$

Будем искать решение уравнений (1.1), (1.2) в виде $\rho = \rho_\infty + \rho_1$, $p = p_\infty + p_1$, $v_x = v_\infty + v_{1x}$, $v_y = v_{1y}$, $v_z = v_{1z}$, где $\mathbf{v} = \nabla \varphi$; v_∞ — осевая скорость невозмущенного потока, а величины ρ_1 , p_1 , \mathbf{v}_1 малы по сравнению с параметрами невозмущенного потока.

Введем цилиндрическую систему координат x, r, θ , в которой $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$. Тогда уравнение неразрывности и интеграл Коши — Лагранжа для возмущенного движения газа принимают вид

$$(1.3) \quad \frac{\partial' \rho_1}{\partial t} + \omega \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} + \rho_\infty \left(\frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r} v_{1r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right) + v_\infty \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0;$$

$$(1.4) \quad \frac{p_1}{\rho_\infty} = - \frac{\partial' \varphi_1}{\partial t} - v_\infty \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \omega \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}.$$

Линеаризация уравнения адиабаты дает соотношение $p_1 = a_\infty^2 \rho_1$, где a_∞ — скорость звука в невозмущенном потоке. Подставив это выражение и соотношение (1.4) в уравнение (1.3), получим

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\omega^2}{a_\infty^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} - 2 \frac{v_\infty \omega}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial \theta} + \left(1 - \frac{v_\infty^2}{a_\infty^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \\ - 2 \frac{\omega}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial \theta} - 2 \frac{v_\infty}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial x} - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0.$$

Таким образом, исследование возмущенного потенциального течения газа

около пространственной кольцевой решетки сводится к решению линейного дифференциального уравнения (1.5).

2. Предположим теперь, что течение газа установившееся, и проведем преобразование растяжения по координате x ($x \rightarrow x/\beta$). Тогда, опуская индекс 1, из уравнения (1.5) получим

$$(2.1) \quad \Delta\varphi = \sigma \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \theta} + \frac{\omega\beta}{v_\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right),$$

где $\sigma = M^2 \omega / v_\infty \beta$; $\beta^2 = 1 - M^2$; $M = v_\infty / a_\infty$ — осевое число Маха. Уравнение (2.1) можно записать также в форме

$$(2.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

если ввести вектор \mathbf{U} с компонентами

$$(2.3) \quad U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad U_\theta = -\sigma r \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\omega\sigma\beta}{v_\infty} r^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Для функции φ , удовлетворяющей уравнению (2.2) в некоторой области Ω , можно получить формулу Грина. Для этого введем некоторую функцию f , имеющую непрерывные вторые производные, и построим вектор \mathbf{W} по формулам (2.3), в которых заменим φ на f . Проинтегрируем разность

$$f \operatorname{div} \mathbf{U} - \varphi \operatorname{div} \mathbf{W} = \operatorname{div} (f\mathbf{U}) - \operatorname{div} (\varphi\mathbf{W})$$

по объему Ω . Используя формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\int_{\Omega} (f \operatorname{div} \mathbf{U} - \varphi \operatorname{div} \mathbf{W}) d\Omega = \int_S (f\mathbf{U} - \varphi\mathbf{W}) \mathbf{n} dS,$$

где S — поверхность, ограничивающая объем Ω ; $\mathbf{n} = (n_x, n_r, n_\theta)$ — внешняя нормаль к этой поверхности.

Пусть теперь $f = G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ — фундаментальное решение уравнения (2.1). Здесь $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$, $\mathbf{y} = (\xi, \rho, \psi)$. Тогда для точек $\mathbf{x} \in \Omega$ имеем представление

$$(2.4) \quad \varphi = \varphi_0 + \sigma(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\text{где } \varphi_0 = \int_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS;$$

$$\varphi_1 = \int_S \psi \left[\frac{\partial G}{\partial \psi} n_\xi + \rho \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\omega\beta}{v_\infty} \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) n_\psi \right] dS;$$

$$\varphi_2 = \int_S G \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} n_\xi + \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\omega\beta}{v_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) n_\psi \right] dS.$$

Вычислим далее вектор скорости $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, используя формулу Грина (2.4). Имеем

$$(2.5) \quad \nabla \varphi_0 = \int_S [\nabla_x G (\mathbf{n} \cdot \nabla_y) \varphi - \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla_y) \nabla_x G] dS, \quad \mathbf{y} \in S.$$

Приняв во внимание соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \nabla_y) (\varphi \nabla_x G) &= \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla_y) \nabla_x G + \nabla_x G (\mathbf{n} \cdot \nabla_y \varphi), \\ \mathbf{n} \times (\nabla_x G \times \nabla_y \varphi) &= \nabla_x G (\mathbf{n} \cdot \nabla_y \varphi) - \nabla_y \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla_x G), \\ \nabla_y \varphi \times (\mathbf{n} \times \nabla_x G) &= \mathbf{n} (\nabla_y \varphi \cdot \nabla_x G) - \nabla_x G (\mathbf{n} \cdot \nabla_y \varphi), \end{aligned}$$

запишем

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \nabla_x G (\mathbf{n} \cdot \nabla_y \varphi) - \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla_y) \nabla_x G &= -(\mathbf{n} \cdot \nabla_y) (\varphi \nabla_x G) + \\ + \mathbf{n} \times (\nabla_x G \times \nabla_y \varphi) - \nabla_y \varphi \times (\mathbf{n} \times \nabla_x G) &+ \nabla_y \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla_x G) + \mathbf{n} (\nabla_y \varphi \cdot \nabla_x G). \end{aligned}$$

В силу равенств $\nabla_x G = -\nabla_y G$ и $\text{rot}(\nabla G) = 0$

$$(2.7) \quad \mathbf{n} \times \text{rot}_y(\varphi \nabla_x G) = \mathbf{n} \times (\nabla_y \varphi \times \nabla_x G).$$

Так как

$$\mathbf{n} \text{ div}_y(\varphi \nabla_x G) = \mathbf{n} [\nabla_x G \cdot \nabla_y \varphi + \varphi \text{ div}_y(\nabla_x G)],$$

то

$$(2.8) \quad \mathbf{n} (\nabla_x G \cdot \nabla_y \varphi) = \mathbf{n} \text{ div}_y(\varphi \nabla_x G) - \varphi \mathbf{n} \text{ div}_y(\nabla_x G).$$

Вследствие соотношений $\Delta_y(\varphi \nabla_x G) = \nabla_y(\text{div}_y(\varphi \nabla_x G)) - \text{rot}_y \text{rot}_y(\varphi \nabla_x G)$, $(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \times \nabla G - \nabla G(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = -\mathbf{v}(\mathbf{n} \cdot \nabla G) - \mathbf{v} \times (\nabla G \times \mathbf{n})$ из (2.5)–(2.8) после применения формулы Гаусса — Остроградского следует

$$\nabla \varphi_0 = - \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \nabla_y G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \nabla_y G - \varphi \mathbf{n} \Delta_y G] dS.$$

Для функции $\nabla \varphi_1$ имеем

$$\nabla \varphi_1 = \int_S \varphi \left[\frac{\partial \nabla_x G}{\partial \psi} n_\xi + \rho \left(\frac{\partial \nabla_x G}{\partial \xi} + \frac{\omega \beta}{v_\infty} \frac{\partial \nabla_x G}{\partial \psi} \right) n_\psi \right] dS.$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского с учетом соотношения $\nabla_x G = -\nabla_y G$ и возвращаясь снова к интегрированию по поверхности S , найдем

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_1 = - \int_S \mathbf{n} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial \xi} + \varphi \frac{\omega \beta}{v_\infty} \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) \right] dS + \\ + \int_S \nabla \varphi \left[\frac{\partial G}{\partial \psi} n_\xi + \rho \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\omega \beta}{v_\infty} \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) n_\psi \right] dS. \end{aligned}$$

Вычисляя затем $\nabla \varphi_2$ и используя уравнение (2.1), придем к искомой формуле

$$(2.9) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = - \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \nabla_y G + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \nabla_y G] dS - \sigma \int_S \mathbf{n} \left[v_\xi \frac{\partial G}{\partial \psi} + \rho v_\psi \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\omega \beta}{v_\infty} \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) \right] dS + \\ + \frac{\omega \beta}{v_\infty} \frac{\partial G}{\partial \psi} \int_S dS + \sigma \int_S \mathbf{v} \left[\frac{\partial G}{\partial \psi} n_\xi + \rho \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\omega \beta}{v_\infty} \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) n_\psi \right] dS + \sigma \int_S \rho \nabla_y G \left[v_\psi n_\xi + \left(v_\xi + \frac{\omega \beta \rho}{v_\infty} v_\psi \right) n_\psi \right] dS,$$

где v_ξ и v_ψ — компоненты вектора скорости \mathbf{v} в цилиндрической системе координат в точке \mathbf{y} .

Интегральное представление (2.9) получено для произвольной точки \mathbf{x} , находящейся внутри области Ω . Отметим, что в случае задачи обтекания тонкого тела оно сохраняет тот же вид, если интегрирование вести по одной из сторон поверхности обтекаемого тела, а вектор \mathbf{v} заменить его скачком $[\mathbf{v}]$ при переходе через эту поверхность и учесть, что $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = 0$. При этом удобно ввести векторную интенсивность вихревого слоя $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times [\mathbf{v}]$ (поверхностный ротор). Тогда при $\mathbf{M} = 0$ и $G = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ из (2.9) получим формулу Био — Савара, широко используемую в теории крыла и решеток. Представление вида (2.9) для этого частного случая получено с помощью формулы Грина в работе [5].

3. Применим полученные результаты для случая, когда S — лопасть кольцевой решетки и представляет собой часть винтовой поверхности, определяемой соотношениями

$$(3.1) \quad x = \theta/\omega_* \beta, y = r \cos \theta, z = r \sin \theta, r_1 \leq r \leq r_2, -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0,$$

где $\omega_* = \omega c/v_\infty$; c — полухорда лопасти в проекции на ось x ; r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров, отнесенные к c ; θ_0 — угловая

координата задней кромки лопасти. Направляющие косинусы нормали к поверхности:

$$n_x = r\omega_*\beta/d, \quad n_y = \sin \theta/d, \quad n_z = -\cos \theta/d$$

и элемент площади $dS = dd\xi d\rho$, где $d^2 = 1 + r^2\omega_*^2\beta^2$.

Рассмотрим предельный случай, когда число лопаток $N \rightarrow \infty$, $r_2 \rightarrow \infty$, а втулочное отношение $h = r_1/r_2 \rightarrow 1$ к единице. Покажем, что в этом случае выражение (2.9) описывает некоторое двумерное течение газа через решетку. Из физических соображений ясно, что при $h \rightarrow 1$ поле скоростей в радиальном направлении не меняется. Поэтому вектор γ имеет только радиальную компоненту γ_r и отсутствуют свободные вихри, сходящие в след за лопастью. Тогда для осевой и окружной составляющих скорости из (2.9) получим

$$(3.2) \quad v_x = \int_{-1}^1 \int_{r_1}^{r_2} \gamma_r d \left[\left(M^2 \omega_*^2 \rho - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial G}{\partial \psi} + \frac{M^2}{\beta} \omega_* \rho \left(1 + \frac{1}{d^2} \right) \frac{\partial G}{\partial \xi} \right] d\rho d\xi;$$

$$(3.3) \quad v_\theta = \int_{-1}^1 \int_{r_1}^{r_2} \gamma_r \left[d \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos(\theta - \psi) + \frac{M^2 \omega_*}{\beta} \left(\frac{\rho}{rd} - d \cos(\theta - \psi) \right) \frac{\partial G}{\partial \psi} \right] d\rho d\xi.$$

Фундаментальное решение уравнения (2.1) для области между цилиндрами $r = r_i$ ($i = 1, 2$) имеет вид [3]

$$(3.4) \quad G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{Nr_2}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{i}{\Omega_{km}} R_k \left(\lambda_{km} \frac{r}{r_2} \right) R_k \left(\lambda_{km} \frac{\rho}{r_2} \right) E_{km}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \\ - G_0 + \frac{Nr_2}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{0m}} R_0 \left(\lambda_{0m} \frac{r}{r_2} \right) R_0 \left(\lambda_{0m} \frac{\rho}{r_2} \right) e^{-\frac{\lambda_{0m}}{r_2} |x - \xi|},$$

где

$$E_{km}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{ik(\theta - \psi) + \frac{i}{\beta} k M^2 \omega_* (x - \xi) - \frac{\Omega_{km} |x - \xi|}{r_2}}; \quad G_0 = \frac{N}{2\pi r_2 (1 - h^2)} (|x - \xi| +$$

$+ x - \xi$); $\Omega_{km}^2 = \lambda_{km}^2 - k^2 M^2 \omega_*^2 r_2^2 / \beta^2$ ($k = nN$); λ_{km} — корни системы уравнений $R'_k(\lambda) = 0$, $R'_k(\lambda h) = 0$, $R_k(r) = A_k [J_k(r) Y'_k(\lambda h) - J'_k(\lambda h) Y_k(r)]$; A_k — нормирующий множитель; штрих означает дифференцирование; J_k и Y_k — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

В рассматриваемом случае $k \gg 1$, поэтому [6] $\lambda_{km} \sim k$ независимо от m и $\Omega_{km} = k\beta_2/\beta$. Здесь $\beta_2^2 = 1 - M_2^2$, M_2 — число Маха на конце лопасти ($r = r_2$). Следовательно, функции E_{km} от индекса m не зависят, и его в дальнейшем будем опускать. Так как лопасти мало отличаются от поверхностей тока невозмущенного движения, то угол выноса решетки $\delta = \delta(r)$ в сечении $r = \text{const}$ можно определить из соотношения

$$(3.5) \quad \operatorname{tg} \delta = \beta \omega_* r.$$

Подставив (3.4), (3.5) в (3.2) и введя обозначения

$$q_{km} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma_r}{\rho \cos \delta} \left(\frac{M^2}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \delta - 1 \right) R_k \left(\lambda_{km} \frac{\rho}{r_2} \right) d\rho, \\ p_{km} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma_r}{\cos \delta} \operatorname{tg} \delta (1 + \cos^2 \delta) R_k \left(\lambda_{km} \frac{\rho}{r_2} \right) d\rho,$$

найдем

$$(3.6) \quad v_x = \frac{\beta r_2 N}{2 \beta^2} \int_{-1}^1 \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{km} R_k \left(\lambda_{km} \frac{r}{r_2} \right) \operatorname{Im} E_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\xi -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{M^2 N}{2\pi\beta\beta_2} \int_{-1}^1 \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{hm} R_h \left(\lambda_{hm} \frac{r}{r_2} \right) \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{i}{\beta} M^2 \omega_* r_2 + \frac{\beta_2}{\beta} \operatorname{sign}(\xi - x) \right] E_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} \times \\
& \quad \times d\xi - \frac{M^2 N}{4\pi\beta^2} \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} p_{0m} R_0 \left(\lambda_{0m} \frac{r}{r_2} \right) \operatorname{sign}(\xi - x) e^{-\frac{\lambda_{0m}}{r_2} |x - \xi|} + \right. \\
& \quad \left. + p_{00} [\operatorname{sign}(\xi - x) - 1] \right\} d\xi \quad \left(\lambda_{00} = 0, R_0^2(0) = \frac{2}{r_2^2(1 - h^2)} \right).
\end{aligned}$$

Для расчета аэродинамических характеристик решеток достаточно знать поле скоростей вблизи лопасти. В этом случае значение $|x - \xi|$ конечно, а $\lambda_{0m} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 1$, поэтому предпоследний член в (3.6) стремится к нулю.

В связи с тем, что q_{hm} и p_{hm} можно рассматривать как коэффициенты разложений в ряды Фурье — Бесселя функций

$$\frac{\gamma_r}{\rho^2 \cos \delta} \left(\frac{M^2}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \delta - 1 \right) \quad \text{и} \quad \frac{\gamma_r}{\rho \cos \delta} (1 + \cos^2 \delta) \operatorname{tg} \delta,$$

можно записать

$$\begin{aligned}
v_x = & \frac{\beta r_2 N}{2\pi\beta_2 r^2 \cos \delta} \left(\frac{M^2}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \delta - 1 \right) \int_{-1}^1 \gamma_r(\xi, r) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} E_n d\xi - \\
& - \frac{M^2 N}{2\pi\beta\beta_2} \frac{(1 + \cos^2 \delta) \operatorname{tg} \delta}{r \cos \delta} \int_{-1}^1 \gamma_r(\xi, r) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{i}{\beta} M^2 \omega_* r_2 + \frac{\beta_2}{\beta} \operatorname{sign}(\xi - x) \right) E_n \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta_2}{2\beta} [\operatorname{sign}(\xi - x) - 1] \right\} d\xi.
\end{aligned}$$

Предположим, что при предельном переходе величина $\tau = N/2\pi r_2$ остается постоянной, а угол δ стремится к своему значению при $r = r_2$. Введем новую переменную $y = r_2 \theta$ и обозначения

$$X = (2\pi\beta_2\tau/\beta) (\xi - x), \quad Y = 2\pi\tau [y + (1/\beta^2) (M^2 x - \xi) \operatorname{tg} \delta].$$

Тогда, если воспользоваться выражениями [7]

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin n\theta = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} x - \cos \theta}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos n\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \cos \theta} - 1 \right)$$

при $x > 0$, формулу (3.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad v_x = & \frac{\beta\tau}{2\beta_2} \left[\frac{M^2}{\beta^4} (1 + M^2 \cos^2 \delta) \operatorname{tg}^2 \delta - 1 \right] \int_{-1}^1 \frac{\gamma_r}{\cos \delta} \frac{\sin Y}{\operatorname{ch} X - \cos Y} d\xi - \\
& - \frac{M^2\tau}{2\beta^2} (1 + \cos^2 \delta) \operatorname{tg} \delta \int_{-1}^1 \frac{\gamma_r}{\cos \delta} \left(\frac{\operatorname{sh} X}{\operatorname{ch} X - \cos Y} - 1 \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Используя аналогичную процедуру, находим

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad v_y = v_\theta = & - \frac{\tau}{2} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_r}{\cos \delta} \left(\frac{\operatorname{sh} X}{\operatorname{ch} X - \cos Y} - 1 \right) d\xi + \\
& + \frac{M^2\tau \sin 2\delta}{4\beta\beta_2} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_r}{\cos \delta} \frac{\sin Y}{\operatorname{ch} X - \cos Y} d\xi.
\end{aligned}$$

Выражения (3.7), (3.8) при $M = 0$ не отличаются от соответствующих формул, даваемых плоской теорией. Таким образом, в случае несжимаемой жидкости при $N \rightarrow \infty$, $r_2 \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 1$ модель плоского течения является достаточно хорошим приближением для расчета аэродинамических характеристик осевого компрессора.

В случае сжимаемого потока появляются дополнительные члены, содержащие M^2 , и функции, зависящие от угла выноса решетки на периферии, и, следовательно, не удается получить эквивалентного течения несжимаемой жидкости через решетку при помощи преобразования Прандтля — Глауэрта. Это связано с тем, что уравнение (2.1) не сводится к уравнению Лапласа, которое получилось бы в плоской теории в используемой системе координат.

Поступила 4 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. McCune J. E. A three-dimensional theory of axial compressor blade rows-application in subsonic and supersonic flows.— J. Aero/Space Sciences, 1958, vol. 25, N 9.
2. Okugounmu O., McCune J. E. Lifting surface theory of axial compressor blade rows: part I — subsonic compressor.— AIAA J., 1974, vol. 12, N 10. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 10.
3. Namba M. Lifting surface theory for a rotating subsonic or transonic blade row. British Aeronautical Research Council. Rept. and Memo, 1972, N 3740.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
5. Моргунов Г. М. Трехмерный аналог обобщенной формулы Коши и одно его приложение в гидродинамике.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2.
6. Ватсон Г. И. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

УДК 533.601.18

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИЛЬНОГО ВЗРЫВА В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

В. П. Башурин, Г. В. Долголева, Ю. К. Кочубей, В. А. Терехин
(Москва)

Теоретическому исследованию газодинамических течений, возникающих при взрыве в газе, посвящено большое количество работ. Получено автомодельное решение, изучены эффекты, связанные с неидеальностью газа, конечным противодавлением и т. д. (см. библиографию работ [1, 2]).

При взрыве в сильно разреженной среде газодинамическое описание не применимо. Если кинетические эффекты относительно слабы, их можно учесть введением вязкости и теплопроводности в систему уравнений газовой динамики [3, 4]. Однако в ряде задач представляет интерес стадия взрыва, на которой размеры области, охваченной движением, сравнимы или не намного превосходят длину свободного пробега частиц газа и продуктов взрыва. Для строгого описания этой стадии необходим кинетический подход.

В данной работе путем численного решения системы уравнений Больцмана для функций распределения частиц среды и продуктов взрыва исследуется динамика сильного взрыва в разреженном газе. Обсуждается применимость газодинамического приближения для описания таких взрывов.

1. Постановка задачи. Система уравнений Больцмана, описывающая возникающее при взрыве течение, имеет вид

$$(1.4) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{\beta=1,2} J_{\alpha\beta}(F_\alpha, F_\beta),$$

$$J_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{v}_\beta \int d\sigma_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} \{ F'_\alpha F'_\beta - F_\alpha F_\beta \},$$

где индексом $\alpha=1, 2$ различаются функции распределения и параметры, характеризующие состояние продуктов взрыва ($\alpha = 1$) и состояние окру-