УДК 536.2; 519.6

ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА, СВОЙСТВА КОТОРОГО ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

М. Арефи

Кашанский университет, 87317-51167 Кашан, Иран
E-mail: arefi63@gmail.com

Решается нелинейная задача о распределении температуры в полом цилиндре в предположении, что свойства материала, из которого он изготовлен, изменяются по толщине цилиндра по степенному закону, а теплопроводность зависит от температуры. Задача сводится к нелинейному дифференциальному уравнению с переменным коэффициентом, для решения которого используется полуаналитический метод последовательных приближений. На основе критерия сходимости бесконечного ряда и критерия малости невязки исследуется сходимость метода при различных значениях параметров задачи. Для моделирования нелинейной зависимости свойств материала цилиндра от температуры использовалась экспоненциальная функция.

Ключевые слова: нелинейная задача теплопроводности, зависимость теплопроводности от температуры, функционально-градиентный материал, метод декомпозиции Адомиана.

Введение. В работах [1–12] при решении задач теплопроводности для неоднородных конструкций предполагалось, что свойства материала не зависят от температуры. Это допущение справедливо для некоторых материалов, в случае если диапазон значений температуры невелик. Однако, как следует из экспериментальных данных, теплопроводность ряда материалов, таких как сталь, медь и алюминий, зависит от температуры. Эту зависимость следует учитывать при решении задач о распределении температуры в конструкциях.

Ниже приводится обзор работ, в которых учитывается зависимость свойств материала от температуры при решении задач теплопроводности. В работе [13] зависимость свойств материала от температуры учитывалась при исследовании электрических полей, полупроводников, солнечных фотоэлементов, оптических волокон. В [14] изучалась задача о нагреве полого цилиндра на внешней и (или) внутренней его поверхностях. В [13, 14] для температурного поля применялись преобразования Фурье и Лапласа. В работе [15] учитывались зависимости теплопроводности, теплоемкости и коэффициента температурного расширения от температуры. В [16] зависимость свойств материала от температуры учитывалась при исследовании электрофизических свойств кремниевых детекторов. В [17] изучалось поведение неоднородного цилиндра высокого давления под действием механических и температурных нагрузок в предположении, что свойства материала, из которого он изготовлен, не зависят от температуры. В [3] решена термоупругая задача для случая толстостенного цилиндра, находящегося под действием механических и температурных

Работа выполнена при финансовой поддержке Кашанского университета (грант № 363460/02).

нагрузок. В радиальном направлении толстостенный цилиндр представлялся в виде совокупности тонкостенных цилиндров. В [4] с использованием теории оболочек Доннелла решена задача об устойчивости упругого цилиндра, изготовленного из функционально-градиентного материала. Влияние температуры на коэффициент полезного действия термоэлектрического элемента, сваренного с двумя металлическими пластинами, исследовалось в работе [18]. В работах [19, 20] изучалось влияние охлаждения на энергетическую эффективность термоупругого элемента в предположении линейной и нелинейной зависимости свойств материала, из которого он изготовлен, от температуры. Влияние температуры на напряжение холостого хода кристаллических кремниевых солнечных элементов исследовалось в [21]. В работе [22] изучено влияние температуры в диапазоне $273 \div 523$ K на производительность солнечных элементов.

В данной работе исследуется распределение температуры в полом цилиндре из функционально-градиентного материала с учетом зависимости свойств этого материала от температуры.

Постановка задачи. Решается задача о распределении температуры в полом цилиндре, изготовленном из функционально-градиентного материала. Предполагается, что теплофизические свойства материала изменяются вдоль радиуса цилиндра по степенному закону. Принимается также, что теплопроводность зависит от температуры. В цилиндрической системе координат уравнение теплопроводности записывается в виде [5, 17, 23]

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big(rk\,\frac{dT}{dr}\Big) = 0, \tag{1}$$

где k — теплопроводность; T — температура; r — радиальная координата.

Зависимость теплопроводности от пространственной координаты и времени принимается в виде

$$k(T,r) = k(r)k(T),$$

где функции $k(r)$ и $k(T)$ имеют следующий вид:

$$k(r) = k_0 r^n, \qquad k(T) = k_1\,\mathrm{e}^{\beta(T-T_0)}.$$

Таким образом,

$$k(r,T) = k_2 r^n\,\mathrm{e}^{\beta(T-T_0)}, \tag{2}$$

где $k_2 = k_0k_1$. С учетом (2) уравнение (1) записывается в следующем виде:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1+n}{r}\,\frac{dT}{dr} + \beta\Big(\frac{dT}{dr}\Big)^2 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Метод решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. Для решения нелинейного дифференциального уравнения используются разложение Адомиана и метод последовательных приближений. Систему нелинейных дифференциальных уравнений запишем в виде [24, 25]

$$L(T) + N(T) + R(T) = g, \tag{4}$$

где L — главный линейный дифференциальный оператор; N — нелинейный оператор; R — часть линейного оператора, оставшаяся после отбрасывания главной части; g — функция. Уравнение (4) умножим на обратный оператор L^{-1} [24–26]:

$$L^{-1}[L(T) + N(T) + R(T)] = L^{-1}[g]. \tag{5}$$

Из уравнения (5) для неизвестной функции T получаем следующее представление [24, 25]:

$$T + L^{-1}N(T) + L^{-1}R(T) = L^{-1}g + c_1r + c_2. \tag{6}$$

Члены в правой части уравнения (6) определяются из нулевого приближения решения T_0. Выполняя соответствующие преобразования этого нелинейного уравнения и используя метод последовательных приближений, можно найти следующие приближения решения T_p ($p \geqslant 1$) [24, 25]:

$$T_p = -L^{-1}N(T_{p-1}) - L^{-1}R(T_{p-1}) + c_{p1}r + c_{p2}. \tag{7}$$

Член $c_{p1}r + c_{p2}$ в уравнении (7) содержит константы интегрирования, появляющиеся на каждом шаге построения приближений.

Решение T^l получается путем суммирования полученных приближений [24, 25]:

$$T^l = T_0 + \sum_{p=1}^{l} T_p.$$

Число l определяется критерием сходимости решения. Нулевое приближение T_0 можно найти из линеаризованного уравнения. Константы интегрирования определяются из условия удовлетворения приближения T^l ($l \geqslant 1$) однородным краевым условиям задачи.

Построение решения. Для дифференциального уравнения (3) операторы L, R, N определяются следующим образом:

$$L := \frac{d^2(\,\cdot\,)}{dr^2}, \qquad R := \frac{1+n}{r}\,\frac{d(\,\cdot\,)}{dr}, \qquad N := \beta\Big(\frac{d(\,\cdot\,)}{dr}\Big)^2.$$

На первом шаге находится нулевое приближение как решение линеаризованного уравнения

$$\frac{d^2T_0}{dr^2} + \frac{1+n}{r}\,\frac{dT_0}{dr} = 0.$$

Следовательно, в соответствии с [27] получаем

$$T_0 = \frac{C_{01}}{r^n} + C_{02},$$

где C_{01}, C_{02} — константы интегрирования, которые определяются из неоднородных краевых условий задачи

$$T_0\big|_{r=r_i} = T_i, \qquad T_0\big|_{r=r_o} = T_o.$$

В результате нулевое приближение имеет вид

$$T_0(r) = \frac{T_i r_i^n - T_o r_o^n}{r_i^n - r_o^n} - \frac{T_i - T_o}{-r_i^{-n} + r_o^{-n}}\, r^{-n}.$$

Затем вычисляется первое приближение:

$$T_1 = 0 - \iint \frac{1+n}{r}\,\frac{dT_0}{dr}\,dr\,dr - \iint \beta\Big(\frac{dT_0}{dr}\Big)^2 dr\,dr + C_{11}r + C_{12} =$$

$$= -\iint \frac{1+n}{r}\,\frac{-nC_{01}}{r^{n+1}}\,dr\,dr - \iint \beta\Big(\frac{-nC_{01}}{r^{n+1}}\Big)^2 dr\,dr + C_{11}r + C_{12}.$$

Константы C_{11}, C_{12} вычисляются из условия удовлетворения приближения T_1 однородным краевым условиям. Аналогично строятся следующие приближения. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены условия

$$\frac{T^{l+1} - T^l}{T^l} \leqslant \varepsilon_1, \qquad \delta_l = 100\,\frac{R^l}{R^0} \leqslant \varepsilon_2,$$

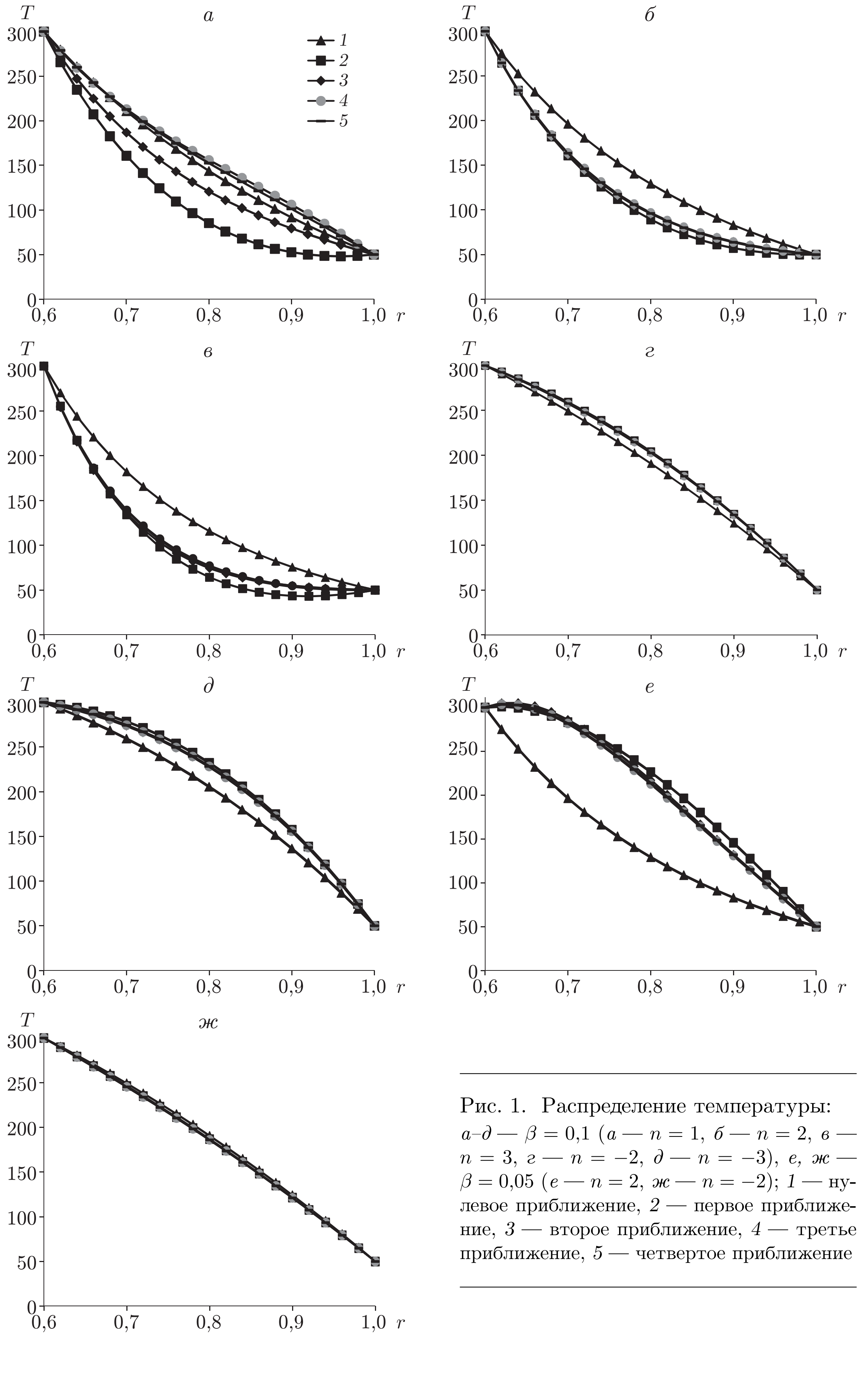

Рис. 1. Распределение температуры: *а–д* — $\beta = 0{,}1$ (*а* — $n = 1$, *б* — $n = 2$, *в* — $n = 3$, *г* — $n = -2$, *д* — $n = -3$), *е, ж* — $\beta = 0{,}05$ (*е* — $n = 2$, *ж* — $n = -2$); *1* — нулевое приближение, *2* — первое приближение, *3* — второе приближение, *4* — третье приближение, *5* — четвертое приближение

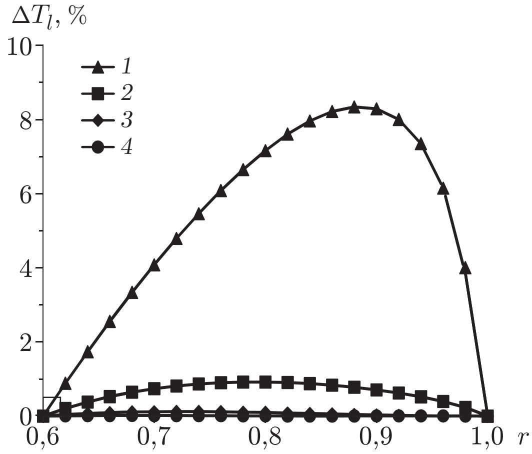

Рис. 2

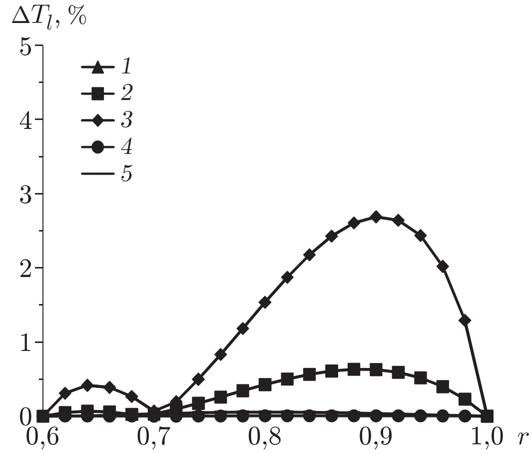

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость $\Delta T_l(r)$ для различных приближений:
1 — нулевое приближение, *2* — первое приближение, *3* — второе приближение, *4* — третье приближение

Рис. 3. Зависимость $\Delta T_l(r)$ при $l = 3$ и различных значениях показателя неоднородности материала n:
1 — $n = 1$, *2* — $n = 2$, *3* — $n = 3$, *4* — $n = -2$, *5* — $n = -3$

где $R^l = \int\limits_{r_i}^{r_o} (L(T^l) + N(T^l) + R(T^l) - g)\,dr$ — невязка нелинейного дифференциального уравнения порядка l; $R^0 = \int\limits_{r_i}^{r_o} (L(T_0) + N(T_0) + R(T_0) - g)\,dr$; $T^l = T_0 + \sum\limits_{p=1}^{l} T_p$. Невязки нормируются делением на R^0. Итерации заканчиваются, если $\delta_l \leqslant 0{,}01$.

Краевые условия. Построенное решение должно удовлетворять краевым условиям. Для линеаризованного уравнения (нулевого приближения T_0) ставятся краевые условия исходной задачи, для следующих приближений T_p ($p \geqslant 1$) — однородные краевые условия.

Результаты исследования и их обсуждение. Ниже приведены результаты решения нелинейного дифференциального уравнения при различных значениях параметров n, β. На рис. 1 представлены зависимости температуры от радиальной координаты в полом цилиндре из функционально-градиентного материала, соответствующие нулевому, первому, второму, третьему и четвертому приближениям. По этим зависимостям можно судить о скорости сходимости приближения. Относительная разность двух последовательных приближений оценивается величиной

$$\Delta T_l = 100\Big|\frac{T^{l+1} - T^l}{T^l}\Big|.$$

На рис. 2 представлены зависимости $\Delta T_l(r)$ при $l = 0, 1, 2, 3$, результаты анализа которых позволяют сделать вывод о быстрой сходимости метода. На рис. 3 приведена зависимость $\Delta T_l(r)$ при различных значениях показателя степени n.

На рис. 4 показана зависимость нормированной невязки δ_l от номера приближения l при значениях показателя нелинейности $\beta = 0{,}10$; $0{,}05$.

Заключение. В работе исследовано распределение температуры в полом цилиндре из функционально-градиентного материала, теплопроводность которого зависит от температуры. С использованием разложения Адомиана и метода последовательных приближений

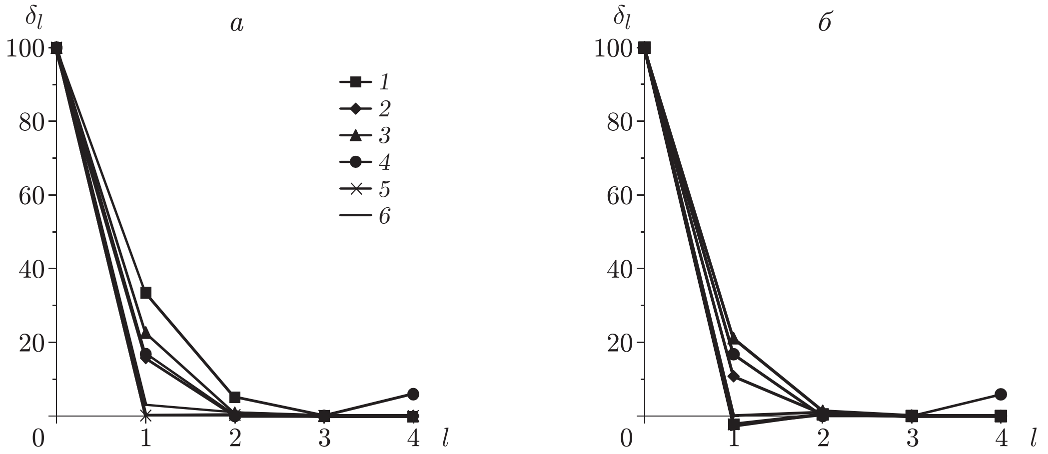

Рис. 4. Нормированная невязка δ_l при $\beta = 0{,}1$ (*а*), $\beta = 0{,}05$ (*б*) и различных значениях показателя неоднородности материала n:
1 — $n = 1$, *2* — $n = 2$, *3* — $n = 3$, *4* — $n = -1$, *5* — $n = -2$, *6* — $n = -3$

решено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка задачи. Исследована скорость сходимости метода. Из полученных результатов следует, что для получения решения задачи достаточно трех-четырех приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tutuncu N., Ozturk M.** Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels // Composites. Pt B. Engng. 2001. V. 32. P. 683–686.
2. **Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R.** Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2002. V. 79. P. 493–497.
3. **Shao Z. S.** Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2005. V. 82. P. 155–163.
4. **Wu L., Zhiqing J., Jun L.** Thermoelastic stability of functionally graded cylindrical shells // Composite Structures. 2005. V. 70. P. 60–68.
5. **Khoshgoftar M. J., Arani A. G., Arefi M.** Thermoelastic analysis of a thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric material // Smart Materials Structures. 2009. V. 18, N 11. P. 115007.
6. **Arefi M., Rahimi G. H.** Non linear analysis of a functionally graded square plate with two smart layers as sensor and actuator under normal pressure // Smart Structures Systems. 2011. V. 8, N 5. P. 433–448.
7. **Arefi M., Rahimi G. H.** Studying the nonlinear behavior of the functionally graded annular plates with piezoelectric layers as a sensor and actuator under normal pressure // Smart Structures Systems. 2012. V. 9, N 2. P. 127–143.
8. **Arefi M., Rahimi G. H.** Three-dimensional multi-field equations of a functionally graded piezoelectric thick shell with variable thickness, curvature and arbitrary nonhomogeneity // Acta Mech. 2012. V. 223. P. 63–79.
9. **Arefi M., Rahimi G. H., Khoshgoftar M. J.** Optimized design of a cylinder under mechanical, magnetic and thermal loads as a sensor or actuator using a functionally graded piezomagnetic material // Intern. J. Phys. Sci. 2011. V. 6, N 27. P. 6315–6322.
10. **Arefi M., Rahimi G. H., Khoshgoftar M. J.** Exact solution of a thick walled functionally graded piezoelectric cylinder under mechanical, thermal and electrical loads in the magnetic field // Smart Structures Systems. 2012. V. 9, N 5. P. 427–439.

11. **Babaei M. H., Chen Z. T.** Exact solutions for radially polarized and magnetized magnetoelectroelastic rotating cylinder // Smart Materials Structures. 2008. V. 17. P. 025035.
12. **Babaei M. H., Chen Z. T.** The transient coupled thermopiezoelectric response of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder to dynamic loadings // Proc. Roy. Soc. Ser. A. Math. Phys. Engng Sci. 2010. V. 466. P. 1077–1091.
13. **Straube W. L., Arthur R. M.** Theoretical estimation of the temperature dependence of backscattered ultrasonic power for noninvasive thermometry // Ultrasound Med. Biol. 1994. V. 20, N 9. P. 915–922.
14. **Ootao Y., Tanigawa Y., Fukuda T.** Axisymmetric transient thermal stress analysis of a multilayered composite hollow cylinder // J. Thermal Stresses. 1991. V. 14, iss. 2. P. 201–213.
15. **Ketcham R. A., Beam E. C., Kominz M. A.** Effects of temperature-dependent material properties and radioactive heat production on simple basin subsidence models // Earth Planetary Sci. Lett. 1995. V. 130, N 1–4. P. 31–44.
16. **Campbell D., Chilingarov A., Sloan T.** Frequency and temperature dependence of the depletion voltage from CV measurements for irradiated Si detectors // Nuclear Instrum. Methods Phys. Res. Sect. A. Accelerators, Spectrometers, Detectors Associat. Equipment. 2002. V. 492, N 3. P. 402–410.
17. **Jabbari M., Bahtui A., Eslami M. R.** Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2009. V. 86, N 5. P. 296–306.
18. **Yamashita O.** Effect of temperature dependence of electrical resistivity on the cooling performance of a single thermoelectric element // Appl. Energy. 2008. V. 85, N 10. P. 1002–1014.
19. **Yamashita O.** Effect of linear and non-linear components in the temperature dependences of thermoelectric properties on the cooling performance // Appl. Energy. 2009. V. 86, N 9. P. 1746–1756.
20. **Yamashita O.** Effect of linear and non-linear components in the temperature dependences of thermoelectric properties on the energy conversion efficiency // Energy Convers. Management. 2009. V. 50, N 8. P. 1968–1975.
21. **Löper P. D., Richter P. A., Hermle M., et al.** Analysis of the temperature dependence of the open-circuit voltage // Energy Procedia: Proc. of the 2nd Intern. conf. crystalline silicon photovoltaics. 2012. V. 27. P. 135–142.
22. **Singh P., Ravindra N. M.** Temperature dependence of solar cell performance — an analysis // Solar. Energy Materials Solar Cells. 2012. V. 101. P. 36–45.
23. **Rahimi G. H., Arefi M., Khoshgoftar M. J.** Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // Appl. Math. Mech. 2011. V. 32, N 8. P. 997–1008.
24. **Banerjee A., Bhattacharya B., Mallik A. K.** Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches // Intern. J. Nonlinear Mech. 2008. V. 43. P. 366–376.
25. **Jiao Y. C., Yamamoto Y., Dang C., Hao Y.** An aftertreatment technique for improving the accuracy of Adomian's decomposition method // Comput. Math. Appl. 2002. V. 43, N 6/7. P. 783–798.
26. **Hojjati M. H., Jafari S.** Semi-exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian's decomposition methods. Pt 1. Elastic solution // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2008. V. 85, iss. 12. P. 871–878.
27. **Arefi M., Rahimi G. H.** The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clampedeclamped FG cylinder under mechanical and thermal loads // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2012. V. 96/97. P. 30–37.

Поступила в редакцию 19/II 2013 г.,
в окончательном варианте — 22/IV 2013 г.