

УДК 532.135; 532.517.4

## Прямое численное моделирование турбулентных течений степенных жидкостей в круглой трубе\*

А.А. Гаврилов<sup>1</sup>, В.Я. Рудяк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: valery.rudyak@mail.ru

В работе представлены результаты прямого численного моделирования турбулентных течений степенных жидкостей в круглой трубе. Выполнены две серии расчетов течений степенного флюида для обобщенных чисел Рейнольдса 10000 и 20000. Расчеты проведены для пяти индексов жидкости от 0,4 до 1. Получены данные о распределениях компонент тензора турбулентных напряжений, осредненной вязкости, пульсаций вязкости и анизотропии турбулентности. Предсказанный численно эффект падения сопротивления для степенных жидкостей хорошо согласуется с экспериментальной корреляцией. Турбулентное течение неньютоновских степенных жидкостей демонстрирует большую анизотропию тензора рейнольдсовых напряжений по сравнению с ньютоновской средой. С уменьшением индекса жидкости степень анизотропии растет. Увеличивающаяся от стенки к центру течения вязкость приводит к демпфированию распространения пульсаций от области их генерации вглубь течения. Наблюдается подавление механизма переноса энергии от аксиальных пульсаций к поперечным, что приводит к доминированию пульсаций в направлении течения.

**Ключевые слова:** неньютоновские жидкости, степенные жидкости, турбулентные течения, прямое численное моделирование, течение в круглой трубе, анизотропия турбулентности, пульсации вязкости.

### Введение

Турбулентные течения неньютоновских вязкопластических и псевдопластических жидкостей в трубах и кольцевых каналах имеют большое практическое значение, поскольку встречаются во многих промышленных установках (различных теплообменниках, подшипниках скольжения, центрифугах, буровых колоннах, ротационных вискозиметрах и т.д.). Существующие экспериментальные данные позволяют неплохо предсказывать коэффициент гидравлического сопротивления в трубе. Для этого используется обычно экспериментальная корреляция [1]. Этой корреляции, однако, бывает недостаточно, особенно при описании сложных течений. Несмотря на практическую востребованность, экспериментальных данных о таких течениях чрезвычайно мало. Связано это, в частности, с тем, что большинство неньютоновских жидкостей оптически не прозрачны, и для их изучения не удастся использовать при измерении полей скорости лазерную доплеровскую анемометрию. Необходимо наличие чрезвычайно сложного

---

\* Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (грант № 14-19-00312).

и дорогостоящего оборудования для проведения исследований с помощью ядерной магнитно-резонансной томографии, ультразвуковой доплеровской анемометрии и т.п., которое в свою очередь также не является универсальным. Альтернативным способом получения информации о изучаемых течениях является математическое моделирование (см., например, [2–5] и цитированную там литературу). Так, достаточно успешно удается моделировать ламинарные течения. Турбулентный режим течения моделируется обычно на основе применения осредненных по Рейнольдсу уравнений реодинамики с помощью так называемого RANS-подхода [6–10]. Принципиальная сложность, возникающая при этом, состоит в том, что использованные модели турбулентности нельзя верифицировать непосредственно на экспериментальных данных. Таким образом, степень адекватности полученных результатов остается неясной.

В отсутствие систематических экспериментальных данных инструментом, дающим наиболее полную и детальную картину турбулентного течения, является прямое численное моделирование (DNS). Необходима, в частности, статистическая информация о структуре течения неньютоновских жидкостей вблизи стенки. До настоящего времени известно лишь три наиболее интересных с практической точки зрения работы, в которых методом прямого численного моделирования исследовались течения нелинейных вязкопластических жидкостей. В первой из них — работе [11] — изучалось течение степенной жидкости в круглой трубе для нескольких значений индекса жидкости и обобщенном числе Рейнольдса около 5500. Позднее моделировались течения жидкости Гершеля–Балкли при обобщенном числе Рейнольдса, равном 7000 [12]. Было исследовано влияние на характеристики течения индекса жидкости и предельного напряжения. Продолжением этих работ явилось прямое численное моделирование течения жидкости Гершеля–Балкли в открытом канале [13]. Результаты указанных расчетов были представлены в виде распределений средней скорости, компонент тензора рейнольдсовых напряжений, генерации турбулентности, пульсаций аксиальной компоненты завихренности и средней эффективной вязкости в зависимости от расстояния от стенки. В общем случае этого достаточно для первичной валидации RANS-моделей турбулентности, не учитывающих корреляцию пульсаций вязкости и скорости сдвига. Однако для построения более сложных и адекватных моделей турбулентности, учитывающих пульсации вязкости, необходима информация о дополнительных неньютоновских напряжениях: скорости диссипации турбулентности и корреляции пульсаций вязкости со скоростью и градиентом скорости. В общем случае степень анизотропии турбулентности неньютоновской жидкости выше, чем у ньютоновской. По этой причине необходима также информация о балансе составляющих тензора рейнольдсовых напряжений, появляющихся в RANS-моделях турбулентности псевдопластических жидкостей. И, наконец, необходимо продвижение в сторону более высоких чисел Рейнольдса.

Целью настоящей работы является прямое численное моделирование установившихся изотермических турбулентных течений заданного расхода в гладкой трубе круглого сечения степенных жидкостей, то есть жидкостей, тензор напряжений которых определяется соотношением  $\boldsymbol{\tau} = \mu \mathbf{S}$ , где  $\mathbf{S} \equiv S_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  — тензор скоростей деформации, а эффективный коэффициент вязкости определяется соотношением

$$\mu = k_v \gamma^{n-1}, \quad (1)$$

здесь  $\gamma$  — второй инвариант тензора скоростей деформации,  $\gamma^2 = 2\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S^2$ ;  $k_v$  — показатель консистентности, а  $n$  — индекс жидкости. Индексы жидкостей варьировались от 0,4 до 1. Выполнялись две серии расчетов: для чисел Рейнольдса  $Re = 10000$  и  $20000$ . В работе представлены данные о распределениях компонент тензора турбулентных напряжений, пульсаций вязкости, анизотропии турбулентности и осредненной вязкости.

### 1. Постановка задачи и численный метод

Рассматривается изотермическое течение степенных жидкостей в круглой трубе, описываемое следующими уравнениями реодинамики:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho(\partial \mathbf{u} / \partial t) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{S}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор скорости жидкости,  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление. Входящий сюда коэффициент вязкости определяется уравнением (1). Расчетная область представляет собой цилиндр круглого сечения с радиусом  $R = 1$  м. Его базовая длина составляет  $L = 15R$ , что считается достаточным для воспроизведения турбулентной статистики для ньютоновских течений (см., например, [14–16]).

В канале задается вынужденное течение с постоянным заданным расходом, соответствующим средней массовой скорости  $U_m = 1$  м/с. На входной и выходной границах ставятся периодические граничные условия, то есть в каждый момент времени профиль скорости на входной границе совпадает с профилем скорости на выходной. Продольный градиент давления восстанавливается из условия обеспечения заданного расхода.

Расчетная сетка является многоблочной и структурированной. Для каждой серии расчетов с заданным числом  $Re = 2\rho R U_m / \mu_w$  построена своя сетка. Здесь  $\mu_w$  — средний коэффициент вязкости на стенке, который получается в процессе расчета осреднением поля кажущейся вязкости. Сетка для серии расчетов с числом Рейнольдса  $Re = 2 \cdot 10^4$  строится на основе сетки для серии расчетов с  $Re = 10^4$  путем увеличения числа координатных узлов в 1,8 раза в радиальном и тангенциальном направлениях и в 1,2 раза — в аксиальном направлении. Степень детализации сеток в безразмерных единицах  $\Delta x^+ = \Delta x / l_\tau$  приведена в табл. 1, где  $l_\tau = \mu_w / (\rho u_\tau)$  — вязкий масштаб длины, определяемый по среднему вязкому трению на стенке  $\tau_w$ , получаемому из равенства  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ . Координатные линии сетки сгущаются в радиальном направлении к стенке. В табл. 1 приведен шаг сетки в радиальном направлении  $\Delta r^+$  у стенки и в центре канала. Максимальный шаг сетки в тангенциальном направлении  $\Delta(r\theta)^+$  оказывается у стенки. Здесь и ниже все безразмерные длины, отмеченные верхним индексом  $+$ , нормированы на  $l_\tau$ . В аксиальном направлении шаг сетки  $\Delta z^+$  постоянен. В последнем столбце приводится полное число  $N$  ячеек использованной сетки. Далее для представления результатов используется также вязкое число Рейнольдса  $Re_\tau = (\rho u_\tau R) / \mu_w$ , определенное по вязким масштабам и средней вязкости на стенке.

В начальный момент времени на ламинарный профиль Пуайзеля накладываются случайные возмущения в несколько процентов от среднemasсовой скорости. После выхода решения на статистически стационарный режим выполняется интегрирование уравнений движения с набором статистической информации о среднем течении. Безразмерный временной шаг равен  $\Delta t^+ = \Delta t / t_\tau \sim 0,3$ , что соответствует максимальному числу Куранта–Фридрихса–Леви (CFL) меньше 0,9. Шаг по времени нормирован на время  $t_\tau = \mu_w / (\rho u_\tau^2) = \mu_w / \tau_w$ . Статистика собиралась осреднением временных реализаций и осреднением по однородным пространственным координатам — вдоль аксиального  $z$  и азимутального  $\theta$  направлений. В результате формировались распределения по радиальному направлению  $r$ . Минимальное время осреднения для всех расчетов  $T^+ = T / t_\tau \sim 4000$ . Далее введенная операция осреднения обозначена треугольными скобками  $\langle \rangle$ .

Таблица 1  
Детализация конечно-объемной сетки

Re	$\Delta r^+$	$\Delta(r\theta)^+$ у стенки	$\Delta z^+$	$N$
$10^4$	от 0,5 до 5	8,7	10	$1,1 \cdot 10^7$
$2 \cdot 10^4$	от 0,5 до 5	8,7	15	$4,5 \cdot 10^7$

Для каждой жидкости, характеризующейся индексом  $n$ , предварительно по корреляции для коэффициента сопротивления [1] определялся показатель консистенции так, чтобы обеспечить заданное число  $Re$ . Найденный в результате расчетов коэффициент сопротивления (трения на стенке) отличается от корреляции, полученной в работе [1], и расчетная величина числа  $Re$  также отличается от заданного значения. Поэтому все представляемые расчеты близки по величине числа  $Re$ , но могут сильно отличаться по значению  $Re_\tau$ .

Используемый в настоящей работе численный алгоритм базируется на методе конечного объема для трехмерных уравнений гидродинамики на неструктурированной сетке, согласованной с границами расчетной области. Детали его реализации для моделирования ламинарных течений ньютоновских, вязкопластических и псевдопластических жидкостей подробно описаны в работах [5, 17–19]. Для настоящих расчетов используются многоблочные структурированные криволинейные сетки. Аппроксимация конвективных членов уравнения количества движения осуществляется центрально-разностной схемой высокого порядка [20]. Связь между полями скорости и давления, обеспечивающая выполнение уравнения неразрывности, реализуется при помощи SIMPLE-C-процедуры. Значения скорости и давления определены в центрах контрольных объемов. Для устранения осцилляций поля давления используется подход Рхи–Чоу, заключающийся в специальной интерполяции вектора скорости на гранях контрольных объемов. Для интегрирования по времени используется безусловно устойчивый метод Кранка–Николсона 2-го порядка точности. При этом неявно трактуются как вязкие, так и конвективные члены уравнения движения. Для решения разностного уравнения на поправку давления применяется метод сопряженных невязок с предобуславливанием. В качестве предобуславливателя используется вариант метода неполной LU-факторизации.

Для ускорения расчетов применяется технология параллельных вычислений, основанная на декомпозиции расчетной области на несколько соприкасающихся подобластей. В качестве коммуникационной библиотеки использовался интерфейс Message Passing Interface, реализованный в библиотеке MPICH2. Расчеты выполнялись на кластере из шести компьютеров с четырехядерными процессорами Intel Core I7 2600 и на вычислительном комплексе информационно-вычислительного центра Новосибирского государственного университета с использованием 128 вычислительных ядер. Среднее время расчета составляет от нескольких дней до двух недель.

## 2. Валидация и верификация

В литературе можно найти несколько работ, посвященных прямому численному моделированию течений в трубах [14–16, 21, 22]. Для валидации программного кода в настоящей работе выполнено прямое численное моделирование турбулентного течения ньютоновской жидкости в трубе круглого сечения при числе Рейнольдса  $Re = 5300$ . В качестве эталонных использовались данные прямого численного моделирования [14, 22]. Для первого расчета применялась сетка с  $1,1 \cdot 10^7$  ячеек. Размер ячеек в радиальном направлении изменялся от 0,3 (в единицах  $l_\tau$ ) у стенки до 2,5 в центре канала, в тангенциальном направлении он равнялся 5 у стенки, в продольном направлении (вдоль координаты  $z$ ) — 6.

Отличие расчетного значения коэффициента трения от значений, полученных в работах [14, 22], оказалось менее 1 %. На рис. 1 приведены распределения безразмерной скорости  $U^+ = U_z / u_\tau$  и пульсаций скорости  $u'^+ = u' / u_\tau$  в зависимости от безразмерного расстояния до стенки канала вдоль радиального направления  $y^+ = (\rho y / \mu_w) u_\tau$  ( $y$  — расстояние от стенки). Результаты сопоставлены с данными работ [14, 22] и хорошо согласуются с ними.

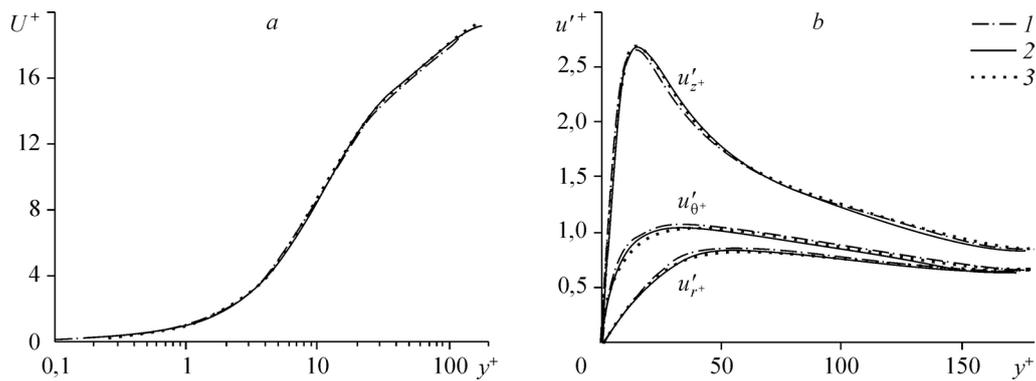


Рис. 1. Распределения средней скорости (а) и пульсаций скорости (среднеквадратичных отклонений) (b).

Данные работ [14] (1), [22] (2) и настоящей работы при  $Re_\tau = 180$  (3).

При проведении DNS-моделирования течения в канале принципиальным является вопрос об адекватности выбора длины расчетной области и пространственной детализации расчетной сетки. Ответить на вопрос о достаточности длины канала можно, анализируя поведение двухточечных корреляций продольной скорости вдоль аксиального направления. На рис. 2 представлены распределения двухточечных коэффициентов корреляций продольной скорости

$$R(u'_z u'_z)(z) = \frac{\langle u'_z(z_0) u'_z(z_0 + z) \rangle}{\sqrt{\langle u'^2_z(z_0) \rangle} \sqrt{\langle u'^2_z(z_0 + z) \rangle}},$$

где осреднение выполняется по времени. Приведены данные для степенных жидкостей при  $n = 0,5, 0,6, 0,8$  и  $Re = 10^4$ . Середина канала приходится на  $z = 7,5R$ . Корреляция рассчитывалась в центре канала при  $r = 0$ . Анализ поведения данных корреляторов показывает, что при  $n = 0,6$  и  $0,8$  корреляции скорости между входным сечением и сечением в середине канала быстро затухают. Следовательно, в этом случае длина канала вполне достаточна для моделирования. С другой стороны, при  $n = 0,5$  корреляции не затухают, и чтобы получить адекватный результат для этой жидкости, необходимо увеличить длину расчетной области.

Теоретически выбранные для расчетов степень детализации сетки и размер временного шага (см. предыдущий раздел) достаточны для проведения DNS-расчета. Однако в степенной жидкости (1) помимо обычных флуктуаций гидродинамических переменных имеют место флуктуации коэффициента вязкости. Необходимо поэтому изучить влияние этих флуктуаций на локальное разрешение. С этой целью были выполнены верификационные

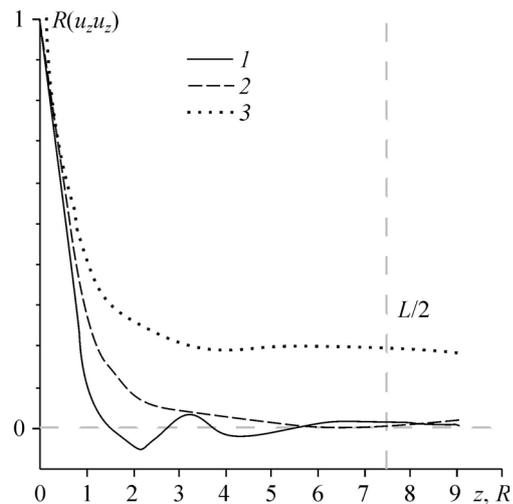


Рис. 2. Распределения коэффициентов двухточечных корреляций продольной скорости, построенные вдоль оси канала.

$n = 0,8$  (1),  $0,6$  (2),  $0,5$  (3) при  $Re_\tau = 307$ .

расчеты для течения степенной жидкости с  $n = 0,6$  при числе Рейнольдса  $Re = 10^4$  на двух сетках. Первая из них детально описана в разделе 1, назовем ее базовой сеткой, вторая содержала 45 миллионов ячеек, а временной шаг был в два раза меньше, чем в случае базовой сетки, так, чтобы максимальное число CFL было меньше единицы. Размер ячеек этой сетки в радиальном направлении изменялся от 0,3 у стенки до 3 в центре канала; в тангенциальном направлении у стенки размер ячейки равнялся 5, а в продольном направлении — 8.

Было установлено, что при использовании грубой сетки интегральный коэффициент сопротивления оказался на 1,2 % ниже, чем в расчете на более детальной сетке. Дальнейшие данные этих верификационных расчетов представлены на рис. 3. Распределения скорости и пульсаций скорости (рис. 3а и 3б) практически совпадают, что и следовало ожидать. Небольшие расхождения наблюдаются в распределениях турбулентных напряжений (рис. 3с) — имеет место лишь небольшое завышение максимума турбулентного сдвигового напряжения (в пределах 4 %). Аналогичное поведение наблюдается и для распределения безразмерной скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon^+ = \mu\varepsilon/(\rho u_\tau^4)$ , где  $\varepsilon$  — скорость диссипации турбулентной энергии (см. рис. 3д). Здесь отличия, однако, оказываются еще меньше. Таким образом, детализация по пространству базовой сетки вполне достаточна для выполнения прямого численного моделирования турбулентного течения неньютоновской среды. Дальнейшее уменьшение сеточного шага не приведет к существенному изменению результатов.

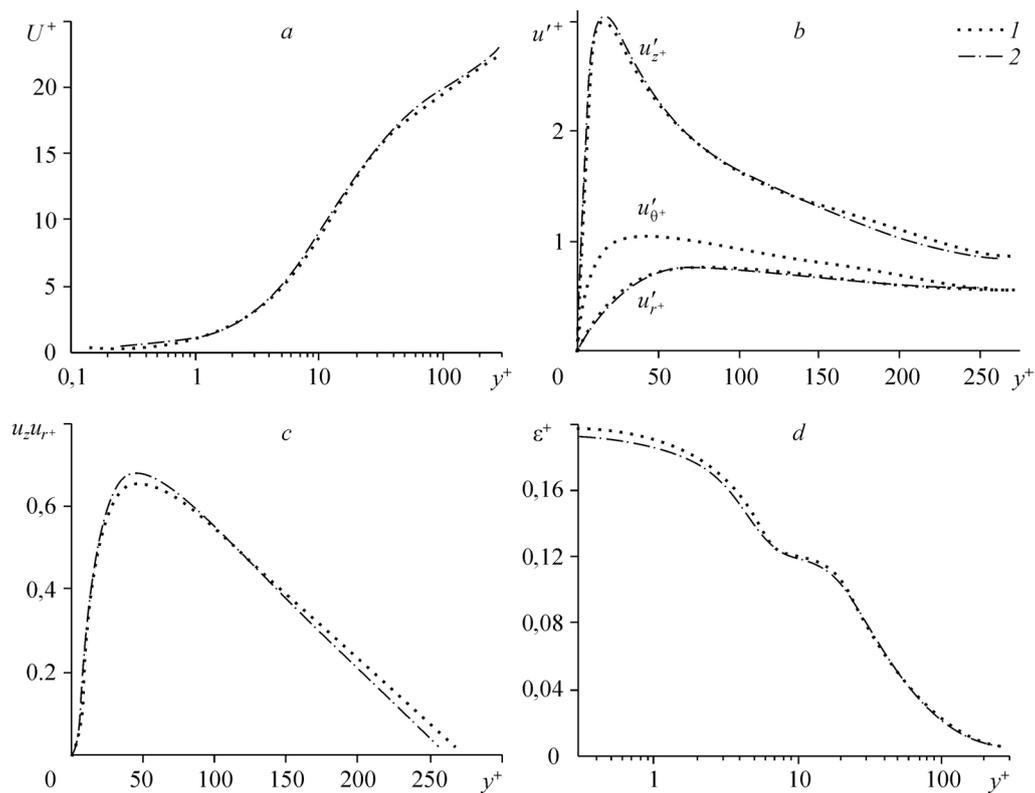


Рис. 3. Результаты верификационного расчета для  $Re_\tau \sim 270$  при  $n = 0,6$  на мелкой (1) и грубой (2) сетках.  
 а — средняя скорость, б — пульсации компонент скорости, в — турбулентные сдвиговые напряжения,  
 д — скорость диссипации турбулентной энергии.

Таблица 2  
 Параметры расчетов для  $Re = 10^4$

$n$	Re	$Re_{MR}$	$Re_{\tau}$	$f_{DM}$	$f$	$\Delta f, \%$
1,0	10000	10000	307	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$7,55 \cdot 10^{-3}$	2
0,8	9800	7010	292	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$7,09 \cdot 10^{-3}$	4
0,7	9600	5900	280	$7,15 \cdot 10^{-3}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	5
0,6	9400	5100	267	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$6,42 \cdot 10^{-3}$	6
0,5	9200	4500	251	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	5

### 3. Результаты прямого численного моделирования

Первая серия расчетов выполнялась для степенных жидкостей с индексами  $n = 0,8, 0,7, 0,6, 0,5$  и  $0,4$  при числе Рейнольдса около 10000 (см. табл. 2). Это соответствовало вязкому числу Рейнольдса  $Re_{\tau} \sim 310$ . При показателе степени  $n = 0,4$  происходила ламинаризация течения, поэтому далее результаты для  $n = 0,4$  не приводятся.

На рис. 4 приведены результаты моделирования в виде распределений различных характеристик рассматриваемых течений в зависимости от безразмерного расстояния  $y^+$  вдоль радиального направления от стенки к центру канала. Все приведенные данные, как и раньше, нормированы. Здесь же приведены данные для турбулентного течения ньютоновской жидкости для такого же числа Рейнольдса ( $Re_{\tau} = 310$ ).

На графиках средней скорости (рис. 4а) хорошо видны вязкий, буферный и логарифмический слои. В области вязкого подслоя профиль средней скорости остается линейным и совпадает для всех исследованных жидкостей. Профиль средней скорости неньютоновских жидкостей отклоняется от ньютоновского, начиная со значения координаты  $y^+ > 10$ . В логарифмическом слое значения средней скорости неньютоновских жидкостей лежат выше соответствующих значений для ньютоновской жидкости, и это различие тем больше, чем меньше индекс степенной жидкости. Угол наклона скорости в логарифмическом подслое с уменьшением индекса жидкости все больше отличается от значения для ньютоновской жидкости. Это, по-видимому, свидетельствует о том, что для неньютоновских жидкостей турбулентность не полностью развита и наблюдается переходной режим течения.

С уменьшением индекса жидкости  $n$  пульсации радиальной и тангенциальной компонент скорости уменьшаются (рис. 4б, 4с), причем максимальное значение пульсаций по сравнению с соответствующим значением для ньютоновской жидкости снижается примерно в два раза. Напротив, пульсации продольной компоненты скорости увеличиваются (рис. 4д), хотя кросс-корреляции (турбулентные сдвиговые напряжения) снижаются (рис. 4е). Увеличение анизотропии пульсаций связано с уменьшением передачи энергии от аксиальных пульсаций к поперечным. В пристеночном течении генерируются пульсации аксиальной компоненты скорости, а затем при помощи пульсаций давления турбулентная энергия аксиальных пульсаций передается двум другим компонентам. В случае течения неньютоновской жидкости этот механизм передачи энергии оказывается подавлен, что и приводит к увеличению уровня аксиальных пульсаций и уменьшению радиальных и тангенциальных пульсаций скорости. Рост аксиальных пульсаций приводит и увеличению суммарных пульсаций, а значит, и кинетической энергии турбулентных пульсаций (см. рис. 4ф, где  $k^+ = k/u_{\tau}^2$  — безразмерная средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций (турбулентная энергия), а  $k$  — размерная). Увеличение суммарных пульсаций наблюдается во всем пристеночном слое вплоть до  $y^+ \sim 100$ , однако в ядре течения кинетическая энергия пульсаций снижается.

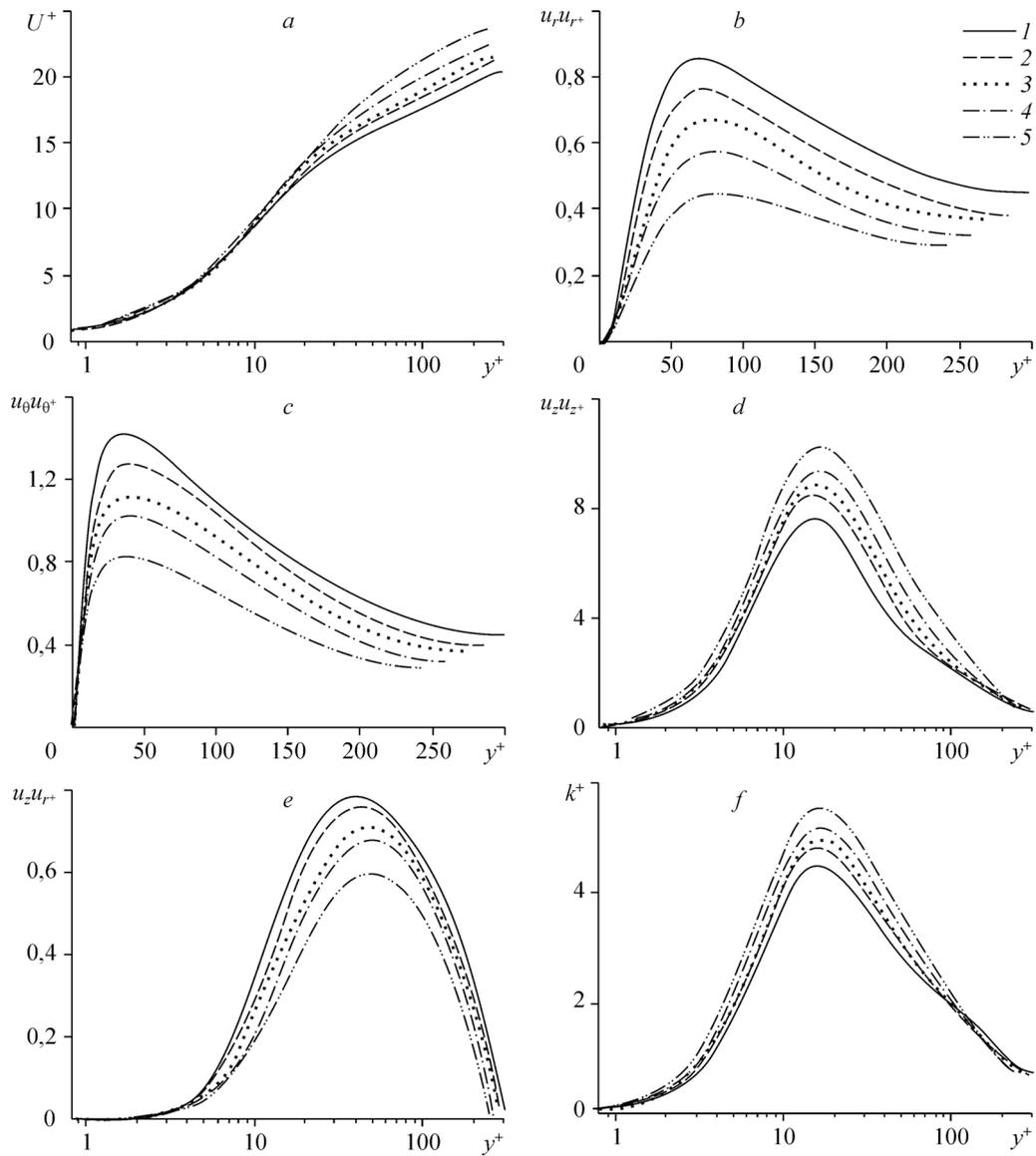


Рис. 4. Результаты расчетов для  $Re_\tau \sim 310$ .

$a$  — средняя аксиальная скорость,  $b$ – $e$  — компоненты тензора турбулентных напряжений,  $f$  — кинетическая энергия турбулентности;  $n = 1$  (1), 0,8 (2), 0,7 (3), 0,6 (4), 0,5 (5).

Снижение турбулентных сдвиговых напряжений с уменьшением показателя индекса жидкости происходит из-за падения интенсивности нормальных к стенке (радиальных) пульсаций. Положение максимума напряжений смещается от стенки в область ядра течения (рис. 4e), а интенсивность механизма переноса импульса между ядром течения и пристеночным слоем уменьшается.

Интегральные параметры проведенных расчетов представлены в табл. 2. Для удобства в третьем столбце этой таблицы приведены обобщенные числа Рейнольдса, которые обычно используются для описания течений степенных жидкостей [23]:

$$Re_{MR} = \rho U_m^{2-n} D^n / \left( 8^{n-1} k_v \left( \frac{3n+1}{4n} \right) \right), \text{ где } D \text{ — диаметр трубы. В пятом столбце приведены}$$

значения коэффициента сопротивления  $f = \tau_w / (\rho U^2 / 2)$ , полученные по экспериментальной

Таблица 3  
 Параметры расчетов для  $Re = 2 \cdot 10^4$

$n$	Re	$Re_{MR}$	$Re_{\tau}$	$f_{DM}$	$f$	$\Delta f, \%$
1,0	20000	20000	560	$6,48 \cdot 10^{-3}$	$6,27 \cdot 10^{-3}$	3
0,8	19460	12570	530	$6,28 \cdot 10^{-3}$	$5,96 \cdot 10^{-3}$	5
0,6	18760	8220	492	$5,86 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	6
0,4	18150	5860	446	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$4,84 \cdot 10^{-3}$	3,3

корреляции [1], а в шестом — рассчитанные в настоящей работе. Наконец, в последнем столбце указано относительное отклонение расчетного значения коэффициента сопротивления от экспериментальной корреляции  $\Delta f$ . Для всех рассмотренных степенных жидкостей численный коэффициент сопротивления меньше соответствующего значения для ньютоновской жидкости. Это снижение связано с уменьшением турбулентного переноса импульса и увеличивается по мере уменьшения индекса жидкости. При  $n = 0,5$  различия превышают 20 %. Кроме того, данные прямого численного моделирования систематически меньше значений, полученных в работе [1], хотя эти различия не превышают 6 %, что находится в пределах точности самой корреляции.

Как уже отмечалось, вторая серия расчетов выполнялась для индексов жидкости  $n = 0,8, 0,6$  и  $0,4$ . Для ньютоновской жидкости это соответствовало числу Рейнольдса  $Re = 20000$  или вязкому числу Рейнольдса  $Re_{\tau} = 560$ . Соответствующие числа Рейнольдса для степенных жидкостей указаны в табл. 3. Интегральные результаты по расчету коэффициента сопротивления согласуются с корреляцией [1] практически с той же точностью, что и для меньшего числа Рейнольдса (см. табл. 2 и 3). Качественно близки и другие результаты моделирования.

На рис. 5а приведены распределения средней аксиальной скорости вдоль радиуса канала. Здесь же построен универсальный закон стенки  $U^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,5$ , описывающий среднюю скорость в развитом логарифмическом слое для течений с малыми числами Рейнольдса. Сравнение с универсальным профилем позволяет выделить подобласти турбулентного пристеночного слоя. На рисунке также хорошо выделены вязкий, буферный и логарифмический слои, видно, что качественно поведение приведенных распределений практически такое же, как и при  $Re = 10^4$ . Для сред  $n = 1,0, 0,8$  и  $0,6$  угол наклона в логарифмическом подслое одинаков. Профили скорости для степенных жидкостей проходят выше ньютоновского профиля. В области вязкого подслоя

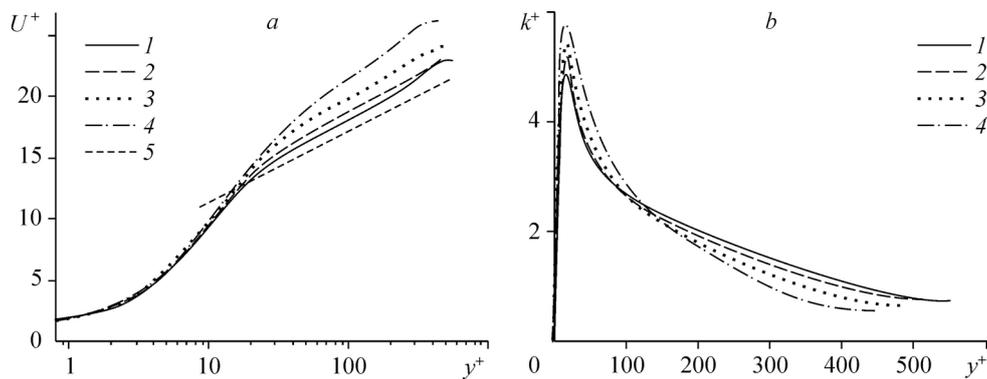


Рис. 5. Результаты расчетов для течения при  $Re = 2 \cdot 10^4$ .

$a$  — средняя аксиальная скорость,  $b$  — кинетическая энергия турбулентности;  $n = 1$  (1),  $0,8$  (2),  $0,6$  (3),  $0,4$  (4), универсальный закон стенки (5);  $Re_{\tau} = 560$ .

профиль средней скорости остается линейным для всех жидкостей. Как и в случае течений с  $Re = 10^4$ , отклонение угла наклона профиля средней скорости обусловлено существенным вкладом вязких напряжений в логарифмическом подслое. Для течения степенной жидкости с  $n = 0,4$  вязкие напряжения достигают значений 40–60 % от турбулентных напряжений в логарифмическом подслое. В этом случае имеет место неразвитое турбулентное течение.

Как и в первой серии расчетов, наблюдается увеличение кинетической энергии турбулентных пульсаций (рис. 5*b*). Характер изменений тензора турбулентных напряжений при уменьшении показателя степени полностью аналогичен характеру, наблюдавшемуся в предыдущей серии расчетов с  $Re = 10^4$ . В степенных жидкостях по сравнению с ньютоновской подавляется механизм перераспределения турбулентной энергии от аксиальных пульсаций к поперечным (радиальным и тангенциальным). При уменьшении показателя степени  $n$  увеличиваются аксиальные пульсации в буферном подслое (рис. 6*a*), а пульсации скорости в радиальном и тангенциальном направлениях существенно уменьшаются во всей области течения (рис. 6*b*, 6*c*). В результате в степенной жидкости турбулентный перенос импульса в радиальном направлении подавляется, а положение максимума сдвиговых напряжений смещается от стенки к ядру течения (рис. 6*d*). Интенсивность суммарной кинетической энергии турбулентности в пристеночной области (в буферном подслое) увеличивается, однако вдали от стенки также подавляется.

Перечисленные особенности характерны не только для неразвитых турбулентных течений степенной жидкости, к которым можно отнести течение жидкости с  $n = 0,4$ , но и для вполне развитых турбулентных течений (для жидкостей с индексами  $n = 0,8$  и  $0,6$ ). Рост анизотропии турбулентных пульсаций (см. следующий раздел) оказывается связан с процессами, происходящими в вязком и буферном подслоях, где большую роль играют вязкие напряжения и соответственно пульсации вязкости.

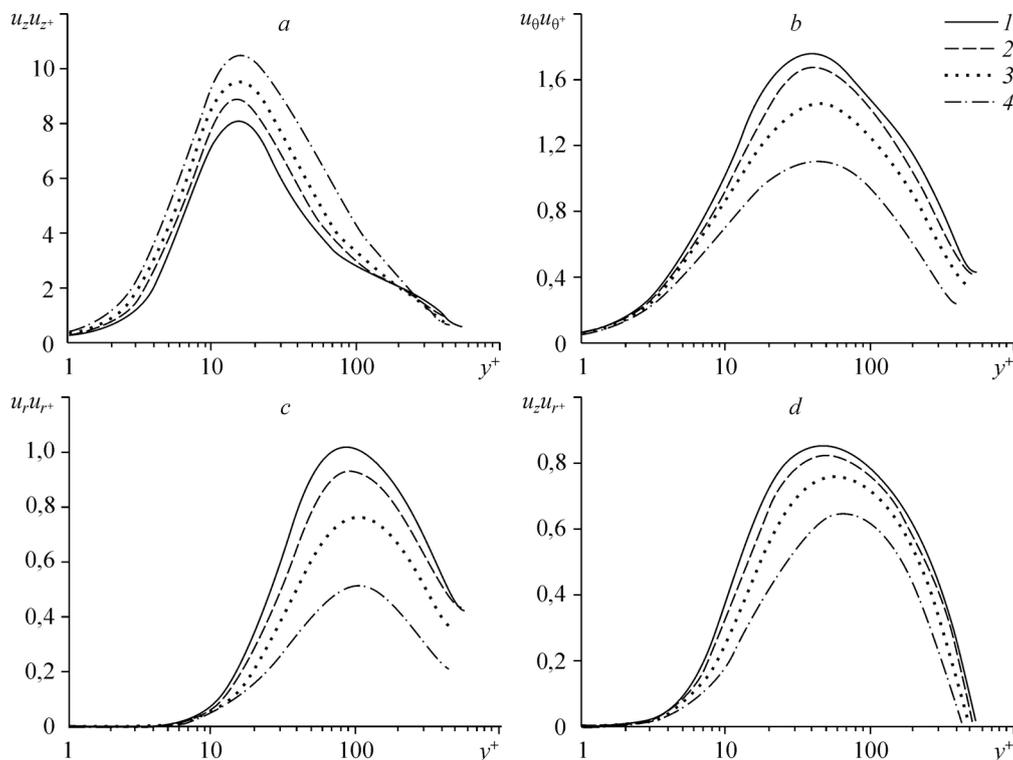


Рис. 6. Компоненты тензора турбулентных напряжений для серии  $Re = 2 \cdot 10^4$ .  
 $n = 1$  (1), 0,8 (2), 0,6 (3), 0,4 (4).

#### 4. Анизотропия турбулентности

Рассмотренные течения степенных жидкостей обладают большей степенью анизотропии турбулентности по сравнению с ньютоновскими. Подробный анализ степени анизотропии турбулентности течений неньютоновских жидкостей на основе экспериментальных данных представлен в работе [24]. Экспериментально было показано, что для растворов полимеров, снижающих сопротивление, анизотропия турбулентности очень близка к осесимметричной турбулентности.

Степень анизотропии турбулентности можно количественно оценить при помощи второго —  $A_2 = a_{ij}a_{ij}$ , и третьего —  $A_3 = a_{ij}a_{jk}a_{ki}$  инвариантов тензора анизотропии турбулентности

$$a_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}.$$

Второй инвариант дает непосредственную оценку анизотропии: чем больше этот параметр, тем больше анизотропия пульсаций.

Положения течений на карте инвариантов  $A_2 - A_3$  [25] для случая с  $Re \sim 10^4$  представлено на рис. 7. Все расчетные линии лежат в области реализуемости, ограниченной линиями двухкомпонентной турбулентности (2-С) и осесимметричной турбулентности (АТ). Максимум параметров анизотропии приходится на  $y^+ \sim 8$ . Для всех пристеночных течений в вязком подслое анизотропия турбулентности соответствует двухкомпонентному пределу, что объясняется подавлением пульсаций в направлении к стенке (радиальных пульсаций).

При увеличении степени неньютоновости жидкости, то есть при уменьшении ее индекса  $n$ , наблюдаются два явных изменения карты инвариантов. Во-первых, увеличиваются максимальные значения инвариантов  $A_2$  и  $A_3$ . Анизотропия турбулентности стремится к однокомпонентному пределу (1-С), что связано с подавлением пульсаций в азимутальном направлении и усилением пульсаций в аксиальном направлении в буферном подслое. Во-вторых, с уменьшением индекса  $n$  зависимость  $A_2 - A_3$  стремится к линии осесимметричной турбулентности (АТ), при которой уровень пульсаций аксиальной компоненты скорости существенно отличается (в нашем случае превосходит) от пульсаций остальных компонент. Такое поведение хорошо согласуется с экспериментальными данными и является ключевой особенностью течений неньютоновских жидкостей, снижающих сопротивление [25].

Комбинация второго и третьего инвариантов  $A = 1 - 9(A_2 - A_3)/8$ , известная как Lumley's flatness parameter [26], удобна тем, что в случае изотропной трехмерной турбулентности она равна единице, а в случае двухкомпонентной турбулентности, то есть когда одна из нормальных компонент тензора пульсации равна нулю, равна нулю. Распределения этого параметра в зависимости от расстояния от стенки  $y^+$  показаны на рис. 8. Двухкомпонентная турбулентность с  $A = 0$  формируется в непосредственной близости от стенки при  $y^+ < 10$ . Максимум параметра  $A_2$

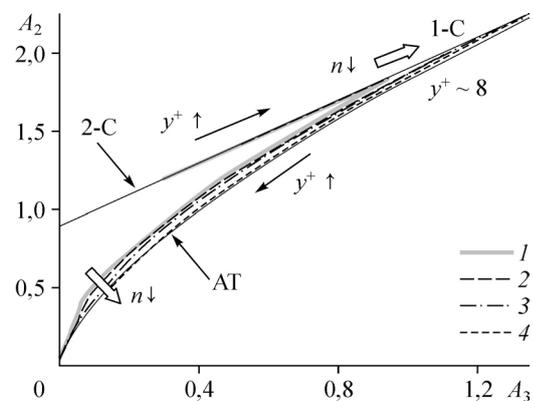


Рис. 7. Карта инвариантов тензора анизотропии для течений  $Re = 10^4$ .

$n = 1$  (1), 0,8 (2), 0,6 (3), 0,4 (4).

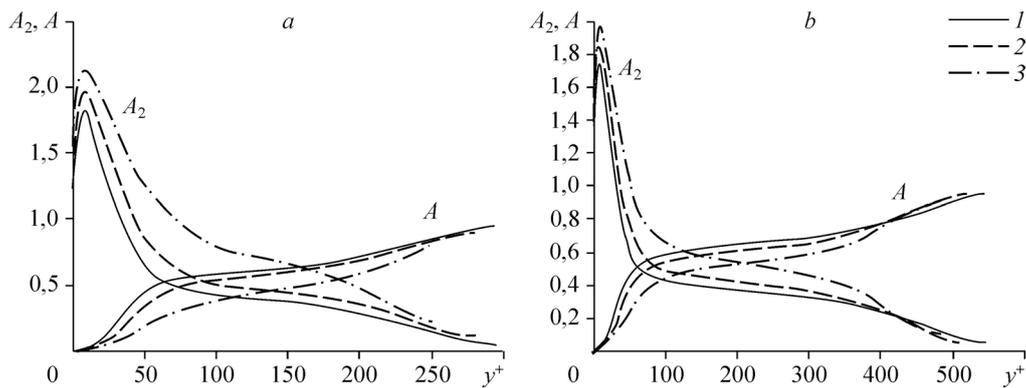


Рис. 8. Распределение инвариантов тензора анизотропии для  $Re = 10^4$  (a) и  $2 \cdot 10^4$  (b).  
 $n = 1$  (1), 0,8 (2), 0,6 (3).

наблюдается при  $y^+ \sim 8$ . Этот максимум растет с уменьшением индекса  $n$ . Отметим, что предельное значение параметра  $A_2$ , соответствующее однокомпонентной турбулентности, равно  $8/3$ . Повышение степени анизотропии при уменьшении  $n$  наблюдается не только в буферном подслое, но и в логарифмическом слое. Ближе к ядру течения значения  $A_2$  для степенных жидкостей стремятся к соответствующим значениям для ньютоновской жидкости. Для области ядра течения характерна изотропная турбулентность с параметром  $A \sim 1$ .

При увеличении числа Рейнольдса степень анизотропии турбулентности  $A_2$  неньютоновских жидкостей в пристеночном слое уменьшается (см. рис. 8a и 8b). Тем не менее, для неньютоновской жидкости она оказывается заметно выше, чем для ньютоновской. Повышенная степень анизотропии турбулентности степенных жидкостей является ключевой особенностью их пристеночных течений.

### 5. Осредненная вязкость

В работах [11, 12] механизм подавления нормальных к стенке пульсаций связывается с увеличением эффективной вязкости при удалении от стенки. Одна из гипотез, объясняющих подавление турбулентного обмена между пристеночным слоем и ядром течения в течениях вязкоупругих жидкостей, основана на росте элонгационной вязкости в буферном слое (так называемый механизм Metzner–Lumley [26, 27]). С этой точки зрения важно изучить поведение эффективного коэффициента вязкости и ее пульсаций в зависимости от расстояния до стенки.

Поведение нормированных значений среднего коэффициента вязкости  $\mu^+ = \langle \mu \rangle / \mu_w$  и ее пульсаций  $\tilde{\mu} = \mu' / [(1-n)\mu]$  в зависимости от расстояния от стенки показано на рис. 9. Как и ожидалось, для степенных жидкостей нормированный коэффициент средней вязкости монотонно увеличивается при увеличении расстояния от стенки (рис. 9a, 9c). В области от стенки до  $y^+ \geq 10$  средняя вязкость практически постоянна (рис. 9c). Затем (в области  $y^+ \geq 10$ ) наблюдается резкий рост среднего коэффициента вязкости. Отношение максимального (в центре канала) и минимального (на стенке) значений коэффициента вязкости увеличивается при уменьшении показателя индекса жидкости. При  $Re = 2 \cdot 10^4$  для среды с  $n = 0,4$  это отношение достигает значения 14, а для среды с  $n = 0,6$  — около 4.

Распределения относительных пульсаций, поделенных на коэффициент  $(1-n)$ , показаны на рис. 9b и 9d. Распределение пульсаций коэффициента вязкости немонотонно.

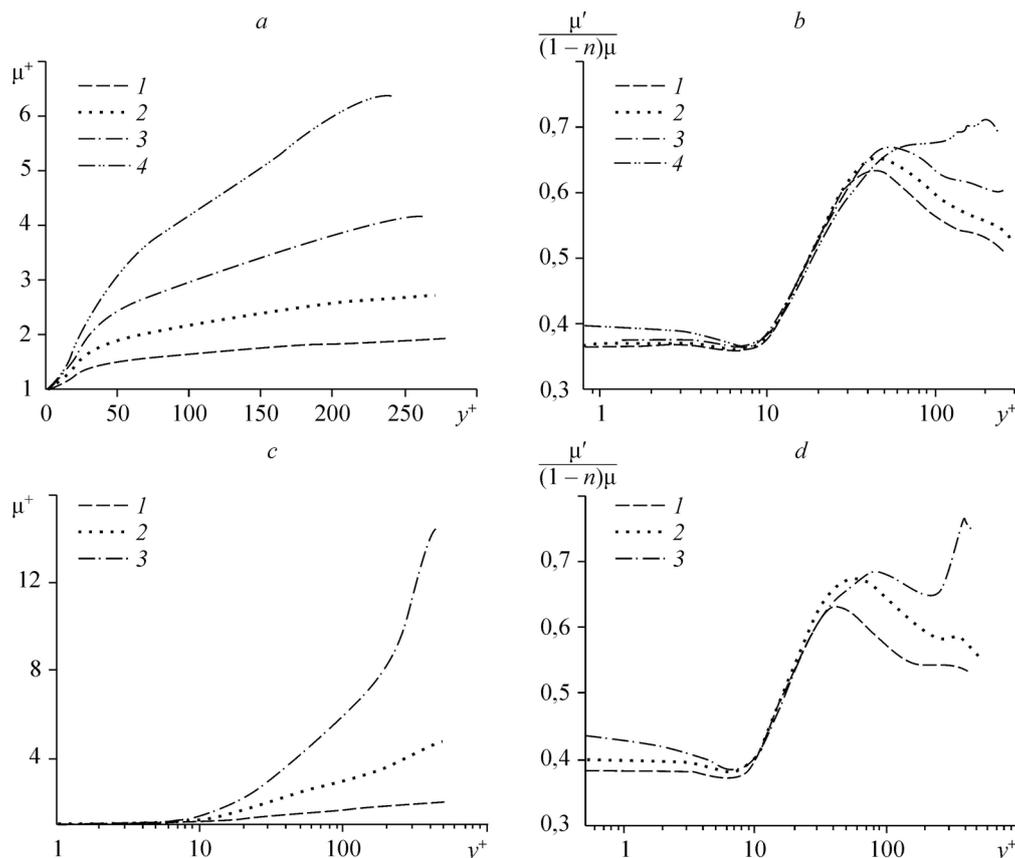


Рис. 9. Осредненная вязкость и ее пульсации для  $Re = 10^4$  (a, b),  $2 \cdot 10^4$  (c, d).  
 a, b —  $n = 0,8$  (1),  $0,7$  (2),  $0,6$  (3),  $0,5$  (4); c, d —  $n = 0,8$  (1),  $0,6$  (2),  $0,4$  (3).

Пульсации вязкости существенны не только в ядре потока, но и вблизи стенки в области вязкого подслоя. Для степенной жидкости в области вязкого и буферного подслоев ( $y^+ < 10$ ) пульсации вязкости практически постоянны и составляют около 10–20 % от значения вязкости на стенке. При  $y^+ \sim 10$  (область максимальной генерации турбулентности) наблюдается резкий рост осредненной вязкости и пульсаций вязкости. Максимум пульсаций лежит в области  $y^+ \sim 30–50$ , при дальнейшем увеличении расстояния от стенки интенсивность пульсаций определяется индексом жидкости. При  $n \geq 0,6$  она уменьшается, но при  $n = 0,5$  продолжает расти (рис. 9b); для течения с числом Рейнольдса  $Re = 2 \cdot 10^4$  рост наблюдается при  $n = 0,4$  (рис. 9d). Таким образом, величина пульсаций вязкости существенно зависит от индекса жидкости, и она тем больше, чем ниже  $n$ . С другой стороны, в области вязкого и буферного подслоя ( $y^+ < 30$ ) относительные пульсации вязкости практически не зависят от реологии.

### Заключение

Турбулентное течение неньютоновских степенных жидкостей характерно существенным уменьшением нормальных к стенке пульсаций, что приводит к уменьшению турбулентного механизма переноса импульса и пульсаций между пристеночным слоем

и ядром течения. Увеличивающаяся от стенки к центру течения вязкость приводит к демпфированию распространения пульсаций от области их генерации вглубь течения. Турбулентность локализуется в пристеночной области.

В течениях степенной жидкости в каналах наблюдается подавление механизма переноса энергии от аксиальных пульсаций к поперечным, что приводит к доминированию пульсаций в направлении течения. Анизотропия пристеночной турбулентности характерна и для развитых турбулентных течений степенных жидкостей и не связана с неразвитостью логарифмического подслоя. Анизотропия турбулентности течений степенных жидкостей существенно выше, чем у обычных ньютоновских жидкостей. Для нее типично стремление к однокомпонентному пределу вблизи стенки (до  $y^+ \sim 10$ ) и к пределу осесимметричной турбулентности в логарифмическом подслое.

Важно подчеркнуть, что отмеченные характерные особенности турбулентных течений степенных жидкостей наблюдаются во всем исследованном диапазоне чисел Рейнольдса. Из физических соображений ясно, что они будут наблюдаться и в области еще больших чисел Рейнольдса.

Отметим некоторые отличия от результатов, приведенных в работах [11, 12]. В отличие от работы [11], в которой получены необъяснимо большие отличия (10–15 %) от экспериментальных данных для коэффициента сопротивления, полученные в настоящей работе значения хорошо ложатся на экспериментальную корреляцию, в том числе и для второй серии расчетов при  $Re \sim 2 \cdot 10^4$ . В отличие от работ [11, 12] результаты представленной работы для всех рассмотренных чисел Рейнольдса демонстрируют увеличение аксиальных пульсаций при увеличении степени неньютоновости среды, то есть при уменьшении индекса жидкости. С точки зрения анизотропии турбулентности пристеночного течения полученные данные близки к течениям вязкоупругих сред, в которых также наблюдается снижение сопротивления турбулентного течения. Увеличение степени анизотропии турбулентности вблизи стенки объясняется подавлением механизма перераспределения пульсационной энергии между отдельными составляющими тензора рейнольдсовых напряжений.

### Список литературы

1. Dodge D.W., Metzner A.B. Turbulent flow of non-Newtonian system // *AIChE J.* 1959. Vol. 5, No. 2. P. 189–204.
2. Escudier M.P., Gouldson I.W., Jones D.M. Flow of shear-thinning fluids in a concentric annulus // *Experiments in Fluids.* 1995. Vol. 18. P. 225–238.
3. Escudier M.P., Oliveira P.J., Pinho F.T. Fully developed laminar flow of purely viscous non-Newtonian liquids through annuli, including the effects of eccentricity and inner-cylinder rotation // *Int. J. Heat and Fluid Flow.* 2002. Vol. 23. P. 52–73.
4. Podryabinkin E.V., Rudyak V.Ya. Moment and forces exerted on the inner cylinder in eccentric annular flow // *J. Engng Thermophysics.* 2011. Vol. 20, No. 3. P. 320–328.
5. Гаврилов А.А., Минаков А.В., Дектерев А.А., Рудяк В.Я. Численный алгоритм для моделирования установившихся ламинарных течений неньютоновских жидкостей в кольцевом зазоре с эксцентриситетом // *Вычислительные технологии.* 2012. Т. 17, № 1. С. 44–57.
6. Malin M.R. Turbulent pipe flow of power-law fluids // *Int. Communications in Heat Mass Transfer.* 1997. Vol. 24, No. 7. P. 977–988.
7. Pinho F.T. A GNF framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a  $k-\varepsilon$  type closure // *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 2003. Vol. 114. P. 149–184.
8. Cruz D.O.A., Pinho F.T. Turbulent pipe flow predictions with a low Reynolds number  $k-\varepsilon$  model for drag reducing fluids // *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 2003. Vol. 114. P. 109–148.
9. Гаврилов А.А., Рудяк В.Я. Моделирование коэффициента молекулярной вязкости вязкопластических жидкостей в турбулентном режиме // *Доклады АН ВШ РФ.* 2013. № 2. С. 69–80.
10. Gavrilov A., Rudyak V.Y. A model of averaged molecular viscosity for turbulent flow of non-Newtonian fluids // *J. Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 2014. Vol. 7, No.1. P. 46–57.
11. Rudman M., Blackburn H.M., Graham L.J.W., Pullum L. Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2004. Vol. 118. P. 33–48.

12. **Rudman M., Blackburn H.M.** Direct numerical simulation of turbulent non-Newtonian flow using a spectral element method // *Applied Mathematical Modelling*. 2006. Vol. 30. P. 1229–1248.
13. **Guang R., Rudman M., Chryst A., Slatter P., Bhattacharya S.** A DNS investigation of the effect of yield stress for turbulent non-Newtonian suspension flow in open channels // *Particulate Sci. and Technology: An Int. J.* 2011. Vol. 29, № 3. P. 209–228.
14. **Wu X., Moin P.** A direct numerical simulation study on the mean velocity characteristics in turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* 2008. Vol. 608. P. 81–112.
15. **Никитин Н.В.** Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 1994. № 6. С. 14–26.
16. **Никитин Н.В.** Статистические характеристики пристенной турбулентности // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 1996. № 3. С. 32–43.
17. **Рудяк В.Я., Минаков А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А.** Применение нового численного алгоритма решения уравнений Навье–Стокса для моделирования работы вискозиметра типа физического маятника // *Теплофизика и аэромеханика*. 2008. Т. 15, № 2. С. 353–365.
18. **Гаврилов А.А., Минаков А.В., Дектерев А.А., Рудяк В.Я.** Численный алгоритм для моделирования ламинарных течений в кольцевом канале с эксцентриситетом // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2010. Т. 13, № 4. С. 3–14.
19. **Рудяк В.Я., Минаков А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А.** Моделирование течений в микромиксерах // *Теплофизика и аэромеханика*. 2010. Т. 17, № 4. С. 601–612.
20. **Rossi R.** Direct numerical simulation of scalar transport using unstructured finite-volume schemes // *J. Comp. Phys.* 2009. Vol. 228, No. 5. P. 1639–1657.
21. **Eggels J.G.M., Unger F., Weiss M.H., Westerweel J., Adrian R.J., Friedrich R., Nieuwstadt F.T.M.** Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 268. P. 175–181.
22. **Fukagata K., Kasagi N.** Highly energy-conservative finite difference method for the cylindrical coordinate system // *J. Comp. Phys.* 2002. Vol. 181. P. 478–498.
23. **Metzner A. B., Reed J.C.** Flow of non-Newtonian fluids – correlation of the laminar, transition and turbulent-flow regions // *AIChE J.* 1955. Vol. 1, No. 4. P. 434–440.
24. **Escudier M.P., Nickson A.K., Poole R.J.** Turbulent flow of viscoelastic shear-thinning liquids through a rectangular duct: Quantification of turbulence anisotropy // *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2009. Vol. 160. P. 2–10.
25. **Lumley J.L.** Computational modeling of turbulent flows // *Adv. Appl. Mech.* 1978. Vol. 18. P. 123–176.
26. **Lumley J.L.** Drag reduction in two phase and polymer flows // *Phys. Fluids*. 1977. Vol. 20. P. S64–S65.
27. **Metzner A. B.** Polymer solution and fiber suspension rheology and their relationship to turbulent drag reduction // *Phys. Fluids*. 1977. Vol. 20. P. S145–S146.

*Статья поступила в редакцию 6 августа 2015 г.*