УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ОСОБЕННОСТИ ИХ ПРОЧНОСТНЫХ И ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

С. О. Саркисян

Гюмрийский государственный педагогический институт, 377526 Гюмри, Армения
E-mails: armenuhis@mail.ru, slusin@yahoo.com

С использованием свойств асимптотического решения краевых задач трехмерной микрополярной (моментной несимметричной) теории упругости для областей, один геометрический параметр которых существенно меньше двух других (пластины, оболочки), сформулирован ряд гипотез. Построена общая теория изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. В построенной модели микрополярных упругих пластин полностью учтены поперечные сдвиговые деформации. Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния при изгибной деформации микрополярных упругих тонких прямоугольных пластин. В результате численного анализа установлено, что пластины, выполненные из микрополярного упругого материала, имеют высокие прочностные и жесткостные характеристики.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, пластина, напряженно-деформированное состояние, прочностные и жесткостные характеристики.

Введение. Прогресс в микро- и нанотехнологиях обусловливает появление новых задач, решение которых позволяет исследовать проблемы структурной механики твердых деформируемых тел [1, 2].

Для описания напряженно-деформированного состояния в структурно-неоднородных твердых телах применяется интенсивно развиваемая в последнее время микрополярная теория упругости [1, 3–9]. Для современных приложений актуальна проблема построения математических моделей микрополярных упругих тонких пластин, оболочек и балок [10–19].

Основная задача общей теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной задачи микрополярной теории упругости к некоторой двумерной краевой задаче.

В данной работе с использованием результатов интегрирования асимптотическим методом трехмерной граничной задачи микрополярной теории упругости для областей типа пластин [20–22] (в [20] построена упрощенная модель микрополярных пластин) сформулированы гипотезы и построена общая математическая модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, в которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Используются следующие основные уравнения (в декартовых координатах x_n, $n = 1, 2, 3$) пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [23]:

— уравнения равновесия

$$\sigma_{mn,n} = 0, \qquad \mu_{mn,n} + \epsilon_{mn}\sigma_{nk} = 0; \tag{1.1}$$

— физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} &= (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}, \\ \mu_{mn} &= (\gamma+\varepsilon)\chi_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{nm} + \beta\chi_{kk}\delta_{nm}; \end{aligned} \tag{1.2}$$

— геометрические соотношения

$$\gamma_{nm} = V_{m,n} - \epsilon_{knm}\omega_k, \qquad \chi_{nm} = \omega_{m,n}, \tag{1.3}$$

где σ_{nm}, μ_{nm} — компоненты несимметричных тензоров силового и моментного напряжений; γ_{nm}, χ_{nm} — компоненты несимметричных тензоров деформаций, изгиба и кручений; V_n, ω_n — компоненты векторов перемещения и независимого поворота точек тела; $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$; $\mu = E/[2(1+\nu)]$; α, β, γ, ε — упругие постоянные микрополярного материала; индекс n после запятой означает дифференцирование по координате x_n; $-h \leqslant x_3 \leqslant h$; ϵ_{kmn} — тензор Леви-Чивиты; δ_{mn} — символы Кронекера; каждый из индексов n, m, k принимает значения $1, 2, 3$.

При $\alpha = 0$ система (1.1)–(1.3) разделяется на уравнения классической теории упругости и уравнения чисто моментной теории.

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) представляет собой сумму решений симметричной и обратносимметричной по x_3 задач. В симметричной задаче (плоское напряженное состояние пластины) σ_{ii}, σ_{ij}, σ_{33}, μ_{i3}, μ_{3i}, u_i, ω_3 — четные по x_3 функции, а σ_{i3}, σ_{3i}, μ_{ii}, μ_{ij}, μ_{33}, u_3, ω_i — нечетные, в обратносимметричной задаче (изгиб пластины), наоборот, σ_{ii}, σ_{ij}, σ_{33}, μ_{i3}, μ_{3i}, u_i, ω_3 — нечетные по x_3 функции, а σ_{i3}, σ_{3i}, μ_{ii}, μ_{ij}, μ_{33}, u_3, ω_i — четные. Здесь и далее индексы i, j принимают значения $1, 2$, причем $i \neq j$. В данной работе излагаются общие прикладные теории изгиба микрополярных пластин.

В граничных условиях на лицевых плоскостях пластины $x_3 = \pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i} = \tilde{p}_i/2, \quad \sigma_{33} = \pm\tilde{p}_3/2, \quad \mu_{3i} = \pm\tilde{m}_i/2, \quad \mu_{33} = \tilde{m}_3/2. \tag{1.4}$$

В зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления точек боковой поверхности пластины Σ граничные условия на ней записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде. Рассмотрим следующие основные типы граничных условий трехмерной микрополярной теории упругости: 1) на поверхности Σ заданы силовые и моментные напряжения; 2) точки поверхности Σ закреплены; 3) на поверхности Σ заданы трехмерные смешанные условия типа условий шарнирного опирания.

Будем полагать, что толщина пластины $2h$ мала по сравнению с длиной волны деформации a в плане. Будем считать, что в статическом случае напряженно-деформированное состояние тонкой пластины представляет собой сумму внутреннего напряженно-деформированного состояния, охватывающего всю трехмерную область, занимаемую пластиной, и напряженно-деформированного состояния пограничных слоев, локализованных вблизи боковой поверхности Σ. Построение общей двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин связано с построением внутренней задачи.

Построим модель микрополярной упругой пластины на основе метода гипотез. Сами гипотезы сформулируем на основе результатов асимптотического анализа краевой задачи (1.1)–(1.4) в областях типа пластин [20].

При определении внутреннего (как и краевого) напряженно-деформированного состояния большую роль играют физические константы материала пластины [20]. Введем следующие безразмерные физические параметры: μ/α, $a^2\mu/\beta$, $a^2\mu/\gamma$, $a^2\mu/\varepsilon$ (величина a имеет смысл масштабного фактора).

2. Модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Рассмотрим случай, когда для безразмерных физических параметров пластины справедливы следующие предположения:

$$\frac{\mu}{\alpha} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{2.1}$$

В этом случае при построении двумерной модели микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений качественные результаты интегрирования краевой задачи (1.1)–(1.4) асимптотическим методом [20] позволяют принять следующие гипотезы:

1. Элемент, первоначально перпендикулярный срединной плоскости пластины, после деформации остается прямолинейным, но неперпендикулярным деформированной срединной плоскости и свободно поворачивается на некоторый угол, при этом его длина не меняется. Вследствие этого имеет место линейный закон изменения перемещений и свободных вращений

$$V_i = x_3\psi_i(x_1, x_2), \quad V_3 = w(x_1, x_2), \quad \omega_i = \Omega_i(x_1, x_2), \quad \omega_3 = x_3 i(x_1, x_2), \tag{2.2}$$

где ψ_i — полные углы поворота; Ω_i — свободные углы поворота первоначально нормального элемента вокруг осей x_i; w — расстояние, на которое перемещаются точки срединной плоскости пластины в направлении x_3; i — интенсивность свободного поворота ω_3 вокруг оси x_3.

Кинематические гипотезы (2.2) для перемещений, по сути, представляют собой известные гипотезы Тимошенко в классической теории упругих пластин [24]. Кинематические гипотезы (2.2) в целом можно трактовать как обобщенные гипотезы Тимошенко в микрополярной теории пластин.

2. В физических соотношениях (1.2) напряжение σ_{33} пренебрежимо мало по сравнению с напряжениями σ_{ii} $(i = 1, 2)$.

3. При определении деформаций, изгиба и кручений, силовых и моментных напряжений для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \mathring{\sigma}_{3i}(x_1, x_2), \qquad \mu_{33} = \mathring{\mu}_{33}(x_1, x_2). \tag{2.3}$$

Введя указанные величины, σ_{3i} и μ_{33} определим как сумму величин в (2.3) и результата интегрирования либо первых двух уравнений равновесия в (1.1), либо шестого уравнения в (1.1) соответственно. Для этих напряжений потребуем выполнения условия, чтобы их осредненные по толщине пластины значения были равны нулю.

Заметим, что силовая гипотеза (гипотеза 3) отличается от соответствующей гипотезы теории Тимошенко в классическом случае [24]. Также следует отметить, что двумерная теория, построенная на основе гипотез 1–3 (как и ее классический аналог), является асимптотически точной теорией.

В соответствии с принятыми законами распределения перемещений и независимых поворотов, а также с гипотезами 2, 3 для деформаций, изгиба и кручений, силовых и моментных напряжений из (1.1)–(1.4) получаем

$$\gamma_{ii} = x_3 K_{ii}(x_1, x_2), \quad \gamma_{ij} = x_3 K_{ij}(x_1, x_2), \quad \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(x_1, x_2), \quad \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(x_1, x_2), \quad \gamma_{33} = 0,$$

$$\chi_{ii} = \varkappa_{ii}(x_1, x_2), \quad \chi_{ij} = \varkappa_{ij}(x_1, x_2), \quad \chi_{i3} = x_3 l_{i3}(x_1, x_2), \quad \chi_{33} = \varkappa_{33}(x_1, x_2), \quad \varkappa_{3i} = 0,$$

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}\, x_3(K_{ii} + \nu K_{jj}), \quad \sigma_{ij} = x_3[(\mu+\alpha)K_{ij} + (\mu-\alpha)K_{ji}],$$

$$\sigma_{i3} = (\mu+\alpha)\Gamma_{i3} + (\mu-\alpha)\Gamma_{3i}, \quad \mathring{\sigma}_{3i} = (\mu+\alpha)\Gamma_{3i} + (\mu-\alpha)\Gamma_{i3}, \quad \sigma_{33} = x_3\,\frac{\tilde{p}_3}{2h},$$

$$\mu_{ii} = \frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\,\varkappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\,\varkappa_{jj} + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}\,\mathring{\mu}_{33}, \quad \mu_{ij} = (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ji}, \tag{2.4}$$

$$\mathring{\mu}_{33} = (\beta+2\gamma)i + \beta(\varkappa_{11}+\varkappa_{22}), \quad \mu_{i3} = x_3\Big(\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,l_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\frac{\tilde{m}_i}{2h}\Big), \quad \mu_{3i} = x_3\,\frac{\tilde{m}_i}{2h},$$

$$\sigma_{3i} = \mathring{\sigma}_{3i}(x_1,x_2) + \Big(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2}\Big)\Big(\frac{\partial\sigma^1_{ii}(x_1,x_2)}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma^1_{ij}(x_1,x_2)}{\partial x_j}\Big),$$

$$\mu_{33} = \mathring{\mu}_{33}(x_1,x_2) + \Big(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2}\Big)\Big[\frac{\partial\mu^1_{13}(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial\mu^1_{23}(x_1,x_2)}{\partial x_2} + (\sigma^1_{12}(x_1,x_2) - \sigma^1_{21}(x_1,x_2))\Big],$$

где

$$\begin{gathered}K_{ii} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{ij} = \frac{\partial\psi_j}{\partial x_i} - (-1)^j i, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j\Omega_j, \quad \Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j\Omega_j,\\ \varkappa_{ii} = \frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i}, \qquad \varkappa_{ij} = \frac{\partial\Omega_j}{\partial x_i}, \qquad l_{i3} = \frac{\partial i}{\partial x_i},\end{gathered} \tag{2.5}$$

σ^1_{ii}, σ^1_{ij}, μ^1_{i3} — коэффициенты при x_3 в формулах (2.4) для σ_{ii}, σ_{ij}, μ_{i3} соответственно.

С целью сведения трехмерной задачи (1.1)–(1.4) к двумерной в уравнениях теории микрополярных пластин вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений введем статически эквивалентные им интегральные по толщине пластины характеристики — усилия N_{i3}, N_{3i}, моменты $M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}$ и гипермоменты Λ_{i3}:

$$N_{i3} = \int_{-h}^{h}\sigma_{i3}\,dx_3, \quad N_{3i} = \int_{-h}^{h}\sigma_{3i}\,dx_3, \quad M_{ii} = \int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ii}\,dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ij}\,dx_3,$$

$$L_{ii} = \int_{-h}^{h}\mu_{ii}\,dx_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^{h}\mu_{ij}\,dx_3, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^{h}x_3\mu_{i3}\,dx_3.$$

Основная система уравнений общей теории изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений включает следующие уравнения и соотношения:

— уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -\tilde{p}_3, \qquad N_{3i} - \Big(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\Big) = h\tilde{p}_i,\\ \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j(N_{j3} - N_{3j}) = -\tilde{m}_i,\\ L_{33} - \Big(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2} + M_{12} - M_{21}\Big) = h\tilde{m}_3;\end{gathered} \tag{2.6}$$

— физические соотношения

$$\begin{gathered}N_{i3} = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{i3} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}, \qquad N_{3i} = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{3i} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{i3},\\ M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\,(K_{ii} + \nu K_{jj}), \qquad M_{ij} = \frac{2h^3}{3}\,[(\mu+\alpha)K_{ij} + (\mu-\alpha)K_{ji}],\\ L_{ii} = 2h\Big(\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\,\varkappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\,\varkappa_{jj}\Big) + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}\,L_{33}, \qquad L_{ij} = 2h[(\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ji}],\\ \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\Big(\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,l_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\frac{\tilde{m}_i}{2h}\Big), \qquad L_{33} = 2h(\beta+2\gamma)i + 2h\beta(\varkappa_{11}+\varkappa_{22}).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Уравнения равновесия (2.6) и физические соотношения (2.7) дополним геометрическими соотношениями (2.5).

К системе уравнений (2.5)–(2.7) микрополярных упругих тонких пластин добавим "смягченные" граничные условия на контуре Г срединной плоскости пластины. Например, при $x_1 = \text{const}$ эти условия имеют вид

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,$$
$$N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \tag{2.8}$$
$$L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \varkappa_{11} = \varkappa_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \varkappa_{12} = \varkappa_{12}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Система уравнений (2.5)–(2.7) и граничные условия (2.8) представляют собой математическую модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, в которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации. Система (2.5)–(2.7), являющаяся системой 12-го порядка с шестью граничными условиями на каждом крае срединной плоскости пластины, содержит 35 уравнений относительно 35 неизвестных функций N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, Λ_{i3}, L_{33}, Γ_{i3}, Γ_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, $\varkappa_{ii}$, $\varkappa_{ij}$, l_{i3}, ψ_i, w, Ω_i, ι.

Если на основе принципа Даламбера в уравнения равновесия (2.6) ввести соответственно силу инерции $2\rho h\,\partial^2 w/\partial t^2$ и моменты инерции $(2h^3/3)\rho\,\partial^2\psi_i/\partial t^2$, $2Jh\,\partial^2\Omega_i/\partial t^2$, $(2h^3/3)J\,\partial^2\iota/\partial t^2$, то получим общие динамические уравнения микрополярных упругих пластин с независимыми полями перемещений и вращений, к которым помимо граничных условий (2.8) следует добавить соответствующие начальные условия.

Заметим, что при $\alpha = 0$ от системы (2.5)–(2.7) с граничными условиями (2.8) отделяются система уравнений и граничные условия теории упругих пластин Тимошенко [24]. Эта система незначительно отличается от уравнений классической теории упругих пластин Тимошенко, что обусловлено использованием статической гипотезы 3.

Если в системе уравнений (2.5)–(2.7) пренебречь поперечными сдвигами, т. е. если считать

$$\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = 0 \quad \text{или} \quad \psi_i = -\frac{\partial w}{\partial x_i}, \tag{2.9}$$

то получим модель микрополярных упругих пластин с независимыми полями перемещений и вращений, в основе которой вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко (2.2) лежат обобщенные на микрополярный случай гипотезы Кирхгофа (т. е. формулы (2.2) с учетом условий (2.9)).

Основные уравнения данной модели микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений представляют собой уравнения равновесия (2.6), а также:

— физические соотношения

$$N_{3i} - N_{i3} = 4\alpha h(\Gamma_{3i} - \Gamma_{i3}),$$
$$M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\,(K_{ii} + \nu K_{jj}), \qquad M_{ij} = \frac{2h^3}{3}\,[(\mu+\alpha)K_{ij} + (\mu-\alpha)K_{ji}],$$
$$L_{ii} = 2h\Big(\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\,\varkappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\,\varkappa_{jj}\Big) + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}\,L_{33}, \qquad L_{ij} = 2h[(\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ji}], \tag{2.10}$$
$$\Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\,\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,l_{i3} + \frac{2h^2}{3}\,\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\frac{\tilde m_i}{2}, \qquad L_{33} = 2h(\beta+2\gamma)\iota + 2h\beta(\varkappa_{11}+\varkappa_{22});$$

— геометрические соотношения

$$\Gamma_{3i} - \Gamma_{i3} = -2\Big(\frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j\Big), \qquad K_{ii} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \qquad K_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\, \partial x_j} - (-1)^j \iota,$$
$$\varkappa_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \qquad \varkappa_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \qquad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i}; \tag{2.11}$$

— граничные условия

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \qquad N_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,$$
$$L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \varkappa_{11} = \varkappa_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \varkappa_{12} = \varkappa_{12}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \tag{2.12}$$

При $\alpha = 0$ от уравнений данной модели отделяются уравнения и граничные условия классической теории пластин Кирхгофа.

В качестве примера рассмотрим задачу изгиба шарнирно опертых микрополярных упругих прямоугольных пластин под действием распределенной нормальной к срединной плоскости нагрузки с интенсивностью $\tilde{p}_3 = p_0 \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b)$.

Рассмотрим поставленную задачу с использованием микрополярной теории пластин со свободным вращением с учетом поперечных сдвигов (уравнения (2.5)–(2.7) и граничные условия (2.8) (в данном случае условия шарнирного опирания)):

$$w = 0, \quad M_{ii} = 0, \quad L_{ij} = 0, \quad \Omega_i = 0, \quad \psi_j = 0, \quad \Lambda_{i3} = 0 \quad \text{при} \quad x_i = 0, a \tag{2.13}$$

и без учета поперечных сдвигов (уравнения (2.6)–(2.11) и граничные условия (2.12)):

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = 0, \quad L_{ij} = 0, \quad \Omega_i = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_j} = 0, \quad \Lambda_{i3} = 0 \quad \text{при} \quad x_i = 0, a. \tag{2.14}$$

При указанных граничных условиях и внешней нагрузке решение системы уравнений (2.5)–(2.7) (которое тождественно удовлетворяет граничным условиям (2.13)) будем искать в виде

$$\begin{aligned} w &= A_1 \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b), & \iota &= A_6 \cos(\pi x_1/a) \cos(\pi x_2/b),\\ \Omega_1 &= A_2 \sin(\pi x_1/a) \cos(\pi x_2/b), & \Omega_2 &= A_3 \cos(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b),\\ \psi_1 &= A_4 \cos(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b), & \psi_2 &= A_5 \sin(\pi x_1/a) \cos(\pi x_2/b) \end{aligned} \tag{2.15}$$

(A_k $(k = 1, 2, \dots, 6)$ — постоянные).

Если основную систему уравнений изгиба (2.5)–(2.7) микрополярных пластин записать через функции w, Ω_1, Ω_2, ψ_1, ψ_2, ι и для полученной системы уравнений задать решение в виде (2.15), то для определения коэффициентов A_k, $k = 1, 2, \dots, 6$ получим алгебраическую линейную неоднородную систему уравнений.

Аналогично решается задача (2.6), (2.9)–(2.11), (2.14).

В таблице приведены результаты численного решения исследуемых задач (рассматривался гипотетический материал пластины, несмотря на то что в настоящее время существуют микрополярные материалы — искусственные кости, для которых определены физические константы [25]). Расчеты проводились при следующих значениях физических параметров материала пластины: $\alpha = 1{,}6$ МПа, $\mu = 2$ МПа, $\lambda = 3$ МПа, $\gamma = \varepsilon = 3$ кН, $\beta = 1{,}2$ кН, $p_0 = 100$ Па. Из данных, представленных в таблице, следует, что согласно микрополярной теории со свободным вращением (с учетом поперечных сдвигов или без их учета) выбранный микрополярный упругий материал пластины имеет очень высокие прочностные и жесткостные характеристики.

Указанные эффекты будут существовать и при других граничных условиях и видах внешней нагрузки, а также при других значениях упругих констант микрополярного материала (при которых выполняются условия (2.1)).

Кроме того, из таблицы следует, что при использовании микрополярной теории необходимо учитывать поперечные сдвиги.

Прочностные и жесткостные характеристики пластины из микрополярного материала со свободным вращением с учетом поперечных сдвигов (обобщенная гипотеза Тимошенко) и без их учета (обобщенная гипотеза Кирхгофа)

δ^*	Номер расчета	$a = b$, мм	h, мм	Обобщенная гипотеза Тимошенко		Обобщенная гипотеза Кирхгофа	
				$\tilde{\sigma}_{11}^{**}$	$\tilde{w}^{***}$	$\tilde{\sigma}_{11}$	$\tilde{w}$
1/40	1	8	0,2	0,000 74	0,006 460	0,003 67	0,003 67
	2	20	0,5	0,000 81	0,006 525	0,003 74	0,003 74
	3	50	1,25	0,001 22	0,006 936	0,004 15	0,004 15
	4	80	2,0	0,001 99	0,007 699	0,004 92	0,004 92
	5	100	2,5	0,002 70	0,008 402	0,005 62	0,005 62
	6	200	5,0	0,008 55	0,014 219	0,011 48	0,011 48
1/100	1	8	0,08	0,000 12	0,001 055	0,000 59	0,000 59
	2	20	0,2	0,000 13	0,001 066	0,000 60	0,000 60
	3	50	0,5	0,000 20	0,001 132	0,000 67	0,000 67
	4	80	0,8	0,000 32	0,001 256	0,000 79	0,000 79
	5	100	1,0	0,000 43	0,001 370	0,000 90	0,000 90
	6	200	2,0	0,001 38	0,002 319	0,001 85	0,001 85

* $\delta = h/a$ (a, h — длина и толщина пластины соответственно).
** $\tilde{\sigma}_{11} = (\sigma_{11}^{\max})_{\text{микр.}}/(\sigma_{11}^{\max})_{\text{клас.}}$.
*** $\tilde{w} = (w^{\max})_{\text{микр.}}/(w^{\max})_{\text{клас.}}$.

Заключение. В отличие от работы [20], где построена упрощенная модель изгибной деформации микрополярных изотропных упругих тонких пластин, в основную систему которой не входят дифференциальные уравнения равновесия относительно моментов M_{ii}, M_{ij}, а также физические соотношения относительно этих величин и усилий N_{3i}, и, естественно, не сформулированы соответствующие граничные условия, в данной работе построена полная система уравнений с граничными условиями для микрополярных пластин с учетом поперечных сдвиговых деформаций, который очень важен в микрополярной теории с независимыми полями перемещений и вращений.

Построенная общая модель микрополярных упругих тонких пластин позволяет решать различные задачи статики и динамики пластин. Из решения задачи об изгибе шарнирно опертой прямоугольной пластины под действием синусоидально распределенной поперечной нагрузки следует, что пластины из микрополярного материала имеют высокие прочностные и жесткостные характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Физическая** мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Отв. ред. В. Е. Панин. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995. Т. 1.
2. **Морозов Н. Ф.** Структурная механика материалов и элементов конструкций. Взаимодействие нано-, микро-, мезо- и макромасштабов при деформировании и разрушении // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 188–189.
3. **Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф.** Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток при учете моментных взаимодействий на микроуровне // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 4. С. 595–615.
4. **Eringen A. C.** Microcontinuum field theories. N. Y., etc.: Springer, 1998. (Foundations and solids; V. 1).

5. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999.
6. **Forest S., Barbe F., Cailletaud G.** Cosserat modeling of size effects in the mechanical behavior of polycrystals and multi-phase materials // Intern. J. Solids Structures. 2000. V. 37, N 46/47. P. 7105–7126.
7. **Suiker A. S. J., Metrikine A. V., De Borst R.** Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models // Intern. J. Solids Structures. 2001. V. 38, N 9. P. 1563–1583.
8. **Лисина С. А., Потапов А. И.** Обобщенные модели сплошной среды в наномеханике // Докл. АН. 2008. Т. 420, № 3. С. 328–330.
9. **Белов П. А., Лурье С. А.** Континуальная модель микрогетерогенных сред // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 5. С. 833–848.
10. **Eringen A. C.** Theory of mikropolar plates // Z. angew. Math. Phys. 1967. Bd 18, N 1. S. 12–30.
11. **Green A. E., Naghdi P. M.** The linear elastic cosserat surface and shell theory // Intern. J. Solids Structures. 1968. V. 4, N 6. P. 585–592.
12. **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Динамика и прочность машин: Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–42.
13. **Пальмов В. А.** Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек // Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1986. С. 106–112.
14. **Шкутин Л. И.** Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
15. **Ванин Г. А.** Моментная механика тонких оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 4. С. 116–138.
16. **Birsan M.** The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells // J. Elasticity. 2004. V. 74. P. 185–214.
17. **Бровко Г. Л., Иванова О. А.** Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 22–36.
18. **Еремеев В. А.** Механика упругих оболочек / В. А. Еремеев, Л. М. Зубов. М.: Наука, 2008.
19. **Altenbach H., Eremeyev V. A.** On the linear theory of micropolar plates // Z. angew. Math. Mech. 2009. Bd 89, N 4. S. 242–256.
20. **Саркисян С. О.** Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 1. С. 129–147.
21. **Саркисян С. О.** Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т. 108, № 4. С. 309–319.
22. **Sargsyan S. H.** Thermoelastisity of thin shells on the basis of asymmetrical theory of elasticity // J. Thermal Stresses. 2009. V. 32, N 8. P. 791–818.
23. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
24. **Пелех Б. Л.** Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наук. думка, 1977.
25. **Lakes R.** Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. by H. Muhlaus, J. Wiley. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. P. 1–22.

Поступила в редакцию 14/XII 2010 г.,
в окончательном варианте — 12/V 2011 г.