

УДК 532.59+539.3+534.12

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКОЙ ПО СЛОЮ ЧАСТИЧНО АЭРИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Коробкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kaa@hydro.nsc.ru

В рамках линейного приближения построено решение плоской нестационарной задачи об ударе вертикальной стенкой по слою жидкости, перемешанной с воздухом вблизи стенки и не содержащей пузырьков воздуха вдали от нее. Газожидкостная смесь моделируется однородной, идеальной и слабосжимаемой средой с редуцированной скоростью звука, зависящей от концентрации воздуха в газожидкостной смеси. Вне газожидкостного слоя жидкость принимается идеальной и несжимаемой. На начальной стадии удара течение жидкости и гидродинамическое давление определяются с использованием линейной теории потенциального движения неоднородной жидкости. Исследована зависимость амплитуды ударного давления на стенке от концентрации воздуха в газожидкостной прослойке и от толщины этой прослойки. При малой относительной толщине прослойки используется приближение тонкого слоя. Показано, что решение полной задачи стремится к приближенному решению, когда толщина прослойки уменьшается. Показано, что наличие газожидкостной прослойки приводит к осцилляциям давления на стенке. Получены оценки амплитуды давления и периода его осцилляций.

Ключевые слова: удар, аэрированная жидкость, приближение тонкого слоя.

Введение. Рассматривается плоская нестационарная задача о течении жидкости, вызванном резким движением вертикальной стенки. До начала движения жидкость занимает полосу $x > 0$, $0 < y < H$ и покоится. Горизонтальная линия $y = 0$, $x > 0$ соответствует ровному непроницаемому дну слоя жидкости, линия $y = H$, $x > 0$ — ее свободной границе, отрезок $x = 0$, $0 < y < H$ — вертикальной жесткой стенке (рис. 1). В некоторый момент времени, который принимается в качестве начального ($t = 0$), вертикальная стенка начинает двигаться в сторону слоя жидкости с постоянной скоростью V . Жидкая область состоит из двух частей: $0 < x < d$ и $x > d$. В слое, прилегающем к стенке ($0 < x < d$, $0 < y < H$), жидкость перемешана с воздухом (аэрирована), плотность газожидкостной смеси равна ρ_m . Скорость звука в аэрированной жидкости равна c_m . В основной области течения ($x > d$, $0 < y < H$) жидкость не содержит пузырьков воздуха, а ее движение описывается в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Движение жидкости в аэрированном слое описывается с использованием акустического приближения, которое формально справедливо при малых скоростях удара V . Присутствие воздушных пузырьков в аэрированном слое приводит к снижению скорости звука по сравнению со случаем однородной жидкости. Нелинейные явления, обусловленные колебаниями пузырьков воздуха и зависимостью скорости звука c_m от гидродинамического давления, в данной работе

Работа выполнена в рамках проекта РАН № 5 “Удар по свободной границе газожидкостной среды” и при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ 902.2003.01).

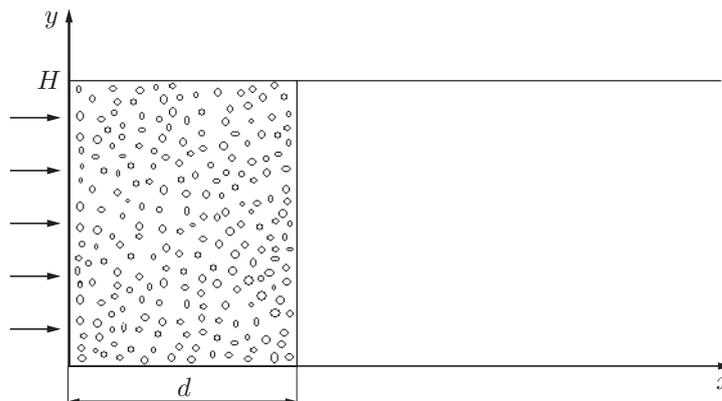


Рис. 1. Удар вертикальной стенкой по аэрированному слою жидкости

не учитываются. Более полные модели волновых процессов в жидкости с пузырьками газа представлены в [1–3].

Требуется определить распределение гидродинамического давления вдоль вертикальной стенки на начальном этапе ее движения. Длительность начального этапа, на котором давление достигает максимального значения, зависит от волновых процессов в газожидкостной прослойке. Если прослойка отсутствует, то в основной области течение несжимаемой жидкости, устанавливающееся после удара, определяется с использованием теории удара Седова [4], которая позволяет найти интеграл по времени от гидродинамического давления при малых временах, но не само давление. Среднее значение давления можно определить по известному интегралу от давления и длительности ударной стадии. Однако понятие длительности ударной стадии в теории удара Седова отсутствует. Поэтому для расчетов среднего давления привлекаются дополнительные гипотезы [5], основанные на анализе экспериментальных данных либо учитывающие акустические эффекты. Экспериментальные данные показывают, что максимальные давления при ударе достигаются при малых временах, когда перемещения пластины и жидких частиц малы по сравнению с линейными размерами жидкой области. Для расчета максимального значения гидродинамического давления при ударе можно пренебречь изменением формы области течения на начальной стадии, линеаризовать уравнения движения и граничные условия и снести последние на границу жидкости в ее начальном положении. Такое приближение является стандартным в задачах удара как в модели несжимаемой жидкости, так и в модели слабосжимаемой жидкости [5]. В последнем случае получаем так называемое акустическое приближение, когда течение жидкости, вызванное ударом, описывается потенциалом скоростей, который удовлетворяет волновому уравнению в области течения, равен нулю на свободной границе жидкости, удовлетворяет условию непротекания на твердых границах области и нулевым начальным условиям. В рамках акустического приближения давление вычисляется с помощью линеаризованного уравнения Коши — Лагранжа. В момент удара давление равно давлению “гидравлического удара”: $p = \rho_0 c_0 V$ (ρ_0 — плотность жидкости; c_0 — скорость звука в покоящейся однородной жидкости; V — скорость удара). Для воды без пузырьков воздуха $c_0 = 1500$ м/с, $\rho_0 = 1000$ кг/м³. При ударе со скоростью $V = 3$ м/с возникает давление, приближенно равное 4,5 МПа. Такое высокое давление сохраняется до тех пор, пока в данную точку не приходят волны разрежения со свободной границы жидкости. Волны разрежения, отражаясь от дна и свободной границы, а также взаимодействуя с волнами сжатия, создают сложную волновую картину процесса. Давление на стенке принимает как положительные, так и отрицательные значения, однако амплитуда

осциллирующий гидродинамического давления со временем уменьшается. Для расчетов максимального давления достаточно построить решение задачи только при малых временах.

Если в течении имеется две области (в рассматриваемом случае одной из областей является аэрированная прослойка, прилегающая к подвижной вертикальной стенке), то волновая картина процесса становится еще более сложной. До момента $t_1 = d/c_m$ граница раздела $x = d$ остается невозмущенной и давление на стенке задается величиной $\rho_m c_m V$ всюду, за исключением малой зоны вблизи свободной границы, где давление понижается за счет волны разрежения, распространяющейся со свободной границы в глубь жидкости. В рамках акустического приближения размер этой зоны вдоль стенки равен $c_m t$. На части вертикальной стенки, где $0 < y < H - c_m t$, давление по-прежнему равно давлению "гидравлического удара" $\rho_m c_m V$.

В момент t_1 слабая ударная волна, образовавшаяся в момент удара, достигает границы раздела $x = d$ между чистой жидкостью и жидкостью с пузырьками воздуха. Граница раздела является подвижной, и слабая ударная волна частично отражается от нее. Отраженная ударная волна движется в сторону вертикальной стенки и достигает ее в момент $2t_1$. Для точек на подвижной вертикальной стенке, расположенных достаточно глубоко, так что волна разрежения со свободной границы еще не дошла до них, имеем $p = \rho_m c_m V$ при $0 < t < 2t_1$. В момент $2t_1$ давление на стенке резко повышается, ударная волна отражается от стенки, затем от границы раздела и т. д. Каждый цикл таких отражений приводит к повышению давления на стенке, до тех пор пока волна разрежения не достигнет дна слоя жидкости. Приведенное описание процесса удара вертикальной стенкой по жидкости с аэрированной прослойкой показывает, что этот процесс существенно отличается от удара по однородной сжимаемой жидкости. Наличие прослойки приводит к увеличению давления в ней со временем, что обусловлено многократными отражениями слабой ударной волны от подвижной стенки и от подвижной границы раздела. Если бы свободная граница отсутствовала, то рост давления продолжался бы неограниченно долго при условии постоянства скорости движения стенки. Волна разрежения, распространяющаяся со свободной границы в глубь жидкости, ограничивает рост давления в прослойке. Поэтому в качестве характерного времени процесса естественно принять величину $T = H/c_m$. Если прослойка тонкая ($\varepsilon = d/H \ll 1$), то время прохождения акустической волной расстояния, равного одной толщине прослойки, равно t_1 , причем $t_1/T = \varepsilon$. В этом случае имеем два масштаба времени T и t_1 , порядки которых существенно различаются, что позволяет использовать процедуру усреднения для асимптотического анализа процесса.

Метод усреднения использован в [6] при исследовании действия акустических волн в жидкости на твердые тела, покрытые тонким сжимаемым слоем. В данной работе этот метод применяется при решении задачи об ударе в присутствии тонкой прослойки аэрированной жидкости. Преимуществом метода, развитого в [6], является то обстоятельство, что наличие тонкого сжимаемого слоя приближенно моделируется специальным граничным условием на поверхности тела. Это существенно упрощает задачу и, как показано в [6], не приводит к значительным ошибкам в предсказании распределений и амплитуд давления. Кроме того, как отмечается в [6], приближение тонкого слоя позволяет уменьшить количество параметров задачи, что важно при планировании экспериментов и интерпретации результатов измерений.

В том случае, когда толщина аэрированного слоя сравнима с глубиной жидкости, необходимо построить решение полной задачи, что вызывает затруднения даже при использовании акустического приближения. В данной работе такая задача решена с помощью спектрального метода для проверки точности решения, полученного в рамках приближения тонкого слоя.

Приближение тонкого слоя позволяет исследовать задачи с аэрированной прослойкой переменной толщины и с переменной по глубине концентрацией воздуха в прослойке, а также позволяет учесть нелинейные эффекты. В настоящей работе такие задачи не рассматриваются.

Задача об ударе вертикальной стенкой (или ее частью) по жидкому слою тесно связана с задачей об ударе обрушающейся волной по береговым сооружениям [5]. Если фронт обрушающейся волны при подходе к вертикальной стенке становится почти вертикальным и вспененным, то при расчете ударных гидродинамических нагрузок на сооружение можно “обратить” движение [5] и рассматривать задачу об ударе частью стенки по жидкости в присутствии тонкой аэрированной прослойки. Последнее обстоятельство свидетельствует о важности исследуемой задачи для приложений и ее актуальности. В прикладных задачах важен учет влияния процессов аэрации жидкости в области удара на величину гидродинамических нагрузок, однако простые модели, пригодные для инженерных расчетов, пока отсутствуют. В основном используются нелинейные модели движения многофазных сред [5], которые содержат много параметров и вследствие слабой изученности и неопределенности реальных процессов удара волнами о береговые сооружения почти всегда позволяют “выбрать” эти параметры так, чтобы численные результаты в той или иной степени воспроизводили некоторые реально происходящие явления.

Можно ожидать, что упрощенные модели, описывающие основные элементы явления, будут более полезными для решения практических задач. Целью данной работы является исследование одной из таких моделей.

Постановка задачи. В рамках акустического приближения течение жидкости в аэрированной прослойке в безразмерных переменных описывается потенциалом скоростей $\varphi_a(x, y, t)$, который удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial y^2} \quad (t > 0, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x < \varepsilon); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = 1 \quad (t > 0, \quad 0 < y < 1, \quad x = 0); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial y} = 0 \quad (t > 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < \varepsilon); \quad (3)$$

$$\varphi_a = 0 \quad (t > 0, \quad y = 1, \quad 0 < x < \varepsilon); \quad (4)$$

$$\varphi_a = \frac{\partial \varphi_a}{\partial t} = 0 \quad (t = 0). \quad (5)$$

Течение несжимаемой жидкости в основной области, где $x > \varepsilon$, описывается потенциалом скоростей $\varphi_i(x, y, t)$, который удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < y < 1, \quad x > \varepsilon); \quad (6)$$

$$\varphi_i = 0 \quad (y = 1, \quad x > \varepsilon); \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, \quad x > \varepsilon); \quad (8)$$

$$\varphi_i \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Давление $p(x, y, t)$ в прослойке вычисляется с помощью линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа

$$p = -\frac{\partial \varphi_a}{\partial t}. \quad (10)$$

Масштаб давления равен $\rho_m c_m V$, масштаб длины — H , масштаб времени — H/c_m , масштаб потенциалов скоростей — VH . Скорость звука c_m в газожидкостной смеси вычисляется по приближенной формуле [3]

$$c_m = c_a \sqrt{\frac{\rho_a}{\alpha(1-\alpha)\rho_0}}, \quad (11)$$

где $c_a = 330$ м/с — скорость звука в воздухе; $\rho_a = 1,29$ кг/м³ — плотность воздуха; $\rho_0 = 1000$ кг/м³ — плотность воды; α — объемная доля воздуха в газожидкостной прослойке. Заметим, что $c_m < c_0/10$ при $\alpha(1-\alpha) > 6,24 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, в практически важных случаях скорость звука c_m в прослойке намного меньше скорости звука в основной области течения, что позволяет приближенно описывать течение в основной области в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Плотность жидкости в прослойке ρ_m вычисляется по формуле

$$\rho_m = \alpha\rho_a + (1-\alpha)\rho_0. \quad (12)$$

На границе между прослойкой и основной областью течения должны выполняться условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости жидких частиц. В линейном приближении эти условия имеют вид

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \quad (x = \varepsilon, \quad 0 < y < 1); \quad (13)$$

$$\varphi_i = \gamma\varphi_a \quad (x = \varepsilon, \quad 0 < y < 1), \quad (14)$$

где $\gamma = \rho_m/\rho_0$. При малой концентрации воздуха ($\alpha \ll 1$) в (14) можно принять $\gamma \approx 1$.

Требуется построить решение задачи (1)–(14), определить распределение гидродинамического давления вдоль вертикальной стенки $p(0, y, t)$ и исследовать его зависимость от объемной доли воздуха в прослойке.

Приближение тонкого слоя. Следуя работе [6], проинтегрируем волновое уравнение (1) по x от 0 до ε с учетом краевых условий (2), (13). Находим

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\varepsilon, y, t) - 1 = \frac{\partial^2\bar{\varphi}_a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\bar{\varphi}_a}{\partial y^2}, \quad (15)$$

где

$$\bar{\varphi}_a(y, t) = \int_0^\varepsilon \varphi_a(x, y, t) dx. \quad (16)$$

Используя приближение

$$\varphi_a(x, y, t) = \varphi_a(\varepsilon, y, t) + O(\varepsilon)$$

и условие сопряжения (14), можно записать (16) в виде

$$\bar{\varphi}_a(y, t) \approx (\varepsilon/\gamma)\varphi_i(\varepsilon, y, t) + O(\varepsilon^2). \quad (17)$$

В главном приближении при $\varepsilon \rightarrow 0$ из уравнений (15), (17) следует

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = 1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2} \right). \quad (18)$$

Заметим, что в (18) удержаны слагаемые со старшими производными, хотя они входят с малым множителем ε .

Равенство (18) рассматривается в дальнейшем как неклассическое краевое условие [6] для краевой задачи (6)–(9). Условие сопряжения (14) и начальные условия (5) показывают, что решение задачи (6)–(9), (18) должно удовлетворять начальным условиям

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0 \quad (t \leq 0). \quad (19)$$

Условие (18) должно выполняться на границе раздела $x = \varepsilon$, однако сдвиг по горизонтали на ε в сторону стенки не приводит к изменению вида уравнений (6)–(9), (18), (19), что позволяет рассматривать задачу в области $x > 0$, $0 < y < 1$. Это эквивалентно снесению условия (18) на вертикальную стенку $x = 0$. После того как распределение потенциала скоростей $\varphi_i(0, y, t)$ на левой границе жидкой области определено, распределение давления вдоль подвижной вертикальной стенки находится по формуле

$$p(0, y, t) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(0, y, t). \quad (20)$$

Решение задачи (6)–(9), (18), (19) ищем в виде

$$\varphi_i(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) e^{-\lambda_k x} \cos(\lambda_k y), \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2} (2k + 1). \quad (21)$$

Представление (21) удовлетворяет уравнению (6), краевым условиям (7), (8) и условию на бесконечности (9). Неизвестные коэффициенты $a_k(t)$ находятся с помощью краевого условия (18) и начальных условий (19). Подставляя (21) в (18), (19) и используя свойство ортогональности системы функций $\{\cos(\lambda_k y)\}_{k=1}^{\infty}$ на интервале $0 < y < 1$, получаем

$$a_k(t) = -\frac{\gamma v_k}{\varepsilon \omega_k^2} [1 - \cos(\omega_k t)], \quad \omega_k^2 = \lambda_k \left(\lambda_k + \frac{\gamma}{\varepsilon} \right); \quad (22)$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -\frac{\gamma v_k}{\varepsilon \omega_k} \sin(\omega_k t). \quad (23)$$

Здесь v_k — коэффициенты в разложении распределения скорости удара по высоте стенки по системе функций $\{\cos(\lambda_k y)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \cos(\lambda_k y), \quad v_k = 2 \frac{(-1)^k}{\lambda_k}. \quad (24)$$

В случае непостоянной вдоль стенки скорости удара условие (2) следует заменить условием

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = f(y) \quad (t > 0, \quad 0 < y < 1, \quad x = 0),$$

где функция $f(y)$ описывает распределение скорости удара по высоте стенки. Остальные формулы остаются без изменений, за исключением разложения (24), которое необходимо заменить следующим:

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \cos(\lambda_k y), \quad v_k = 2 \int_0^1 f(y) \cos(\lambda_k y) dy. \quad (25)$$

Формулы (20)–(25) позволяют записать искомое распределение гидродинамического давления вдоль вертикальной стенки в виде

$$p(0, y, t) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \cos(\lambda_k y). \quad (26)$$

Так как при выводе формулы (26) изменения искомых функций на пространственном и временном масштабах порядка $O(\varepsilon)$ при малых ε в безразмерных переменных не учитывались, имеет смысл определить усредненное давление по правилу

$$\langle p \rangle(y, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{y-\varepsilon/2}^{y+\varepsilon/2} \int_{t-\varepsilon/2}^{t+\varepsilon/2} p(0, y_0, t_0) dt_0 dy_0.$$

Формула для усредненного давления имеет вид (26), где каждое слагаемое умножается на коэффициент

$$S_k(\varepsilon) = \frac{\sin(\lambda_k \varepsilon/2) \sin(\omega_k \varepsilon/2)}{\lambda_k \varepsilon/2 \omega_k \varepsilon/2}.$$

Решение полной задачи. В том случае, когда толщина аэрированной прослойки сравнима с глубиной жидкости, требуется построить решение задачи (1)–(14) и сравнить его с решением, полученным в рамках приближения тонкого слоя. В области прослойки потенциал скоростей ищется в виде

$$\varphi_a(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_a^{(k)}(x, t) \cos(\lambda_k y) \quad (0 < x < \varepsilon), \quad (27)$$

в основной области — в виде

$$\varphi_i(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) e^{-\lambda_k(x-\varepsilon)} \cos(\lambda_k y) \quad (x > \varepsilon). \quad (28)$$

Коэффициенты $\varphi_a^{(k)}(x, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_a^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_a^{(k)}}{\partial x^2} - \lambda_k^2 \varphi_a^{(k)} \quad (0 < x < \varepsilon, \quad t > 0), \quad (29)$$

краевым условиям

$$\frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial x} = v_k \quad (x = 0, \quad t > 0); \quad (30)$$

$$b_k(t) = \gamma \varphi_a^{(k)}(\varepsilon, t), \quad \frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial x}(\varepsilon, t) = -\lambda_k b_k(t) \quad (31)$$

и начальным условиям

$$\varphi_a^{(k)} = \frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial t} = 0 \quad (t < 0). \quad (32)$$

Из условий (31) на границе раздела $x = \varepsilon$ следует

$$\frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial x} + \gamma \lambda_k \varphi_a^{(k)} = 0 \quad (x = \varepsilon, \quad t > 0). \quad (33)$$

Начально-краевая задача (29), (30), (32), (33) рассматривается независимо от задачи в основной области течения. Коэффициенты $b_k(t)$ разложения (28) вычисляются после решения этой задачи по формулам (31). Искомое давление на стенке $p(0, y, t)$ вычисляется по формуле (10). С учетом разложения (27) имеем

$$p(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, t) \cos(\lambda_k y); \quad (34)$$

$$p_k(x, t) = -\frac{\partial \varphi_a^{(k)}}{\partial t}(x, t). \quad (35)$$

Образы преобразования Лапласа по t функций $\varphi_a^{(k)}(x, t)$ и $p_k(x, t)$ обозначим через $\phi_k(x, s)$ и $q_k(x, s)$, где s — параметр преобразования Лапласа. Уравнения (29)–(33) приводят к краевой задаче относительно новой искомой функции $\phi_k(x, s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} &= (s^2 + \lambda_k^2) \phi_k \quad (0 < x < \varepsilon), \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x} &= \frac{v_k}{s} \quad (x = 0), \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \gamma \lambda_k \phi_k &= 0 \quad (x = \varepsilon), \\ q_k(x, s) &= -s \phi_k(x, s). \end{aligned} \quad (36)$$

Решение краевой задачи (36) имеет вид

$$\phi_k(x, s) = \frac{v_k}{s} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \lambda_k^2}} \operatorname{sh}(\sqrt{s^2 + \lambda_k^2} x) + D_k(s) \operatorname{ch}(\sqrt{s^2 + \lambda_k^2} x).$$

Такое представление решения удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевому условию при $x = 0$. Из краевого условия при $x = \varepsilon$ определяется коэффициент $D_k(s)$:

$$D_k(s) = -\frac{v_k}{s} \frac{\operatorname{ch}(\zeta \varepsilon) + \gamma \lambda_k \operatorname{sh}(\zeta \varepsilon)/\zeta}{\zeta \operatorname{sh}(\zeta \varepsilon) + \gamma \lambda_k \operatorname{ch}(\zeta \varepsilon)}, \quad \zeta = \sqrt{s^2 + \lambda_k^2}.$$

Используя выражение $\phi_k(0, s) = D(s)$ и равенство $q_k(0, s) = -sD(s)$, которое следует из (35), для образа преобразования Лапласа коэффициентов $p_k(0, t)$ в разложении давления (34) получаем формулу

$$q_k(0, s) = v_k \frac{\operatorname{ch}(\zeta \varepsilon) + \gamma \lambda_k \operatorname{sh}(\zeta \varepsilon)/\zeta}{\zeta \operatorname{sh}(\zeta \varepsilon) + \gamma \lambda_k \operatorname{ch}(\zeta \varepsilon)}. \quad (37)$$

Функция (37) не имеет точек ветвления. Единственными особенностями этой функции являются полюсы на мнимой оси $\zeta_{nk} = i\mu_{nk}/\varepsilon$, $n \geq 1$, где вещественные числа μ_{nk} удовлетворяют уравнению

$$\mu_{nk} \operatorname{tg} \mu_{nk} = \gamma \varepsilon \lambda_k,$$

причем $\mu_{nk} = \pi(n-1) + \Delta_{nk}$, $0 < \Delta_{nk} < \pi/2$ и $\Delta_{nk} \rightarrow +0$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем уравнение

$$\operatorname{tg} \Delta_{nk} = \frac{\gamma \varepsilon \lambda_k}{\pi(n-1) + \Delta_{nk}}, \quad (38)$$

которое решается методом итераций. Таким образом, $\Delta_{nk} = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Положения полюсов $s = \pm i\omega_{nk}$ функции (37) определяются из уравнения $i\mu_{nk}/\varepsilon = \sqrt{\lambda_k^2 - \omega_{nk}^2}$, откуда следует

$$\omega_{nk} = \sqrt{\mu_{nk}^2/\varepsilon^2 + \lambda_k^2}.$$

Обращение формулы (37) основано на теореме о вычетах

$$\begin{aligned}
 p_k(0, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{res} [e^{st} q_k(0, s), +i\omega_{nk}] + \operatorname{res} [e^{st} q_k(0, s), -i\omega_{nk}] \right\} = \\
 &= \frac{v_k}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i\omega_{nk}} \frac{\mu_{nk}^2 + (\varepsilon\gamma\lambda_k)^2}{\varepsilon\gamma\lambda_k(1 + \varepsilon\gamma\lambda_k) + \mu_{nk}^2} (e^{i\omega_{nk}t} - e^{-i\omega_{nk}t}) = \\
 &= \frac{2}{\varepsilon} v_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{nk}^2 + (\varepsilon\gamma\lambda_k)^2}{\mu_{nk}^2 + \varepsilon\gamma\lambda_k(1 + \varepsilon\gamma\lambda_k)} \frac{\sin(\omega_{nk}t)}{\omega_{nk}}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Усредняя построенное безразмерное распределение давления (34), (39) по промежутку времени τ и по вертикальной координате y с длиной промежутка усреднения h , получаем формулу для усредненного давления на стенке в виде

$$\begin{aligned}
 \langle p \rangle(0, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle p_k \rangle(0, t) \cos(\lambda_k y) \frac{\sin(\lambda_k h/2)}{\lambda_k h/2}, \\
 \langle p_k \rangle(0, t) &= \frac{2}{\varepsilon} v_k \sum_{n=1}^{\infty} E_{nk} \frac{\sin(\omega_{nk}t)}{\omega_{nk}} \frac{\sin(\omega_{nk}\tau/2)}{\omega_{nk}\tau/2}, \\
 E_{nk} &= 1 - \frac{\varepsilon\gamma\lambda_k}{\mu_{nk}^2 + \varepsilon\gamma\lambda_k(1 + \varepsilon\gamma\lambda_k)}.
 \end{aligned}$$

Асимптотический анализ построенных решений. При малых ε и конечных n , k из формулы (38) следует

$$\begin{aligned}
 \mu_{1k} &= \sqrt{\varepsilon\gamma\lambda_k} [1 + O(\varepsilon\gamma\lambda_k)], \quad \mu_{nk} = \pi(n-1) + O(\varepsilon\gamma\lambda_k) \quad (n \geq 2), \\
 \omega_{1k} &= \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon} \lambda_k [1 + O(\varepsilon\gamma\lambda_k)] + \lambda_k^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \omega_{nk} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (n \geq 2).
 \end{aligned}$$

Полученные асимптотические формулы показывают, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ основной вклад в сумму (39) дает слагаемое порядка $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ с номером $n = 1$. Остальные слагаемые дают вклад порядка $O(1)$. Выделяя первое слагаемое в (39) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon\lambda_k = O(1)$, находим

$$E_{1k} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \omega_{1k}^2 \rightarrow \omega_k^2 = \lambda_k^2 \left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon\lambda_k}\right), \quad \varepsilon p_k(0, t) \rightarrow v_k \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}.$$

Найденные асимптотические формулы показывают, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ распределение давления (34), полученное в рамках полной модели, сходится к распределению давления (26), полученному в рамках приближения тонкого слоя.

При малых временах $t \ll 1$ распределение давления на стенке может быть получено из решения задачи (6)–(9), (18), (19) в виде ряда по степеням t :

$$p(0, y, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left(t + \frac{1}{6\varepsilon} g(y)t^3 + O(t^5) \right), \quad g(y) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin[\pi(1+y)/2]} + \frac{1}{\sin[\pi(1-y)/2]} \right).$$

Найденное асимптотическое решение не справедливо вблизи свободной границы. В нижней точке стенки при $y = 0$, где ожидаются максимальные ударные давления, имеем

$$p(0, 0, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left(t - \frac{t^3}{6\varepsilon} + O(t^5) \right).$$

Максимум давления достигается при $t_{\max} = \sqrt{2\varepsilon}$ и равен $p_{\max} = (2\sqrt{2}/3)\varepsilon^{-1/2}$. В размерных переменных находим

$$p'_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho_m c_m V \sqrt{\frac{H}{d}}, \quad t'_{\max} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{dH}}{c_m}. \quad (40)$$

Полученные асимптотические оценки максимума давления на дне слоя жидкости и времени его достижения показывают, что максимум давления значительно превышает давление “гидравлического удара” и достигается задолго до момента времени, когда волна разрежения доходит до дна слоя. Следовательно, одним из факторов, ограничивающих рост давления в газожидкостном слое при ударе по нему с постоянной скоростью, является наличие подвижной границы раздела между газожидкостным слоем и несжимаемой однородной жидкостью. Этот вывод следует также из численных расчетов по формулам (26) и (34).

Численные результаты. Расчеты эволюции давления в различных точках подвижной стенки выполнялись по формулам (26) и (34) без использования усреднения по пространственной и временной переменным. Отметим, что эти формулы определяют “ударную” составляющую полного давления, к которой для получения полного давления нужно добавить атмосферное давление. В линейной модели давление пропорционально скорости удара, которая в расчетах принималась равной 1 м/с, толщина слоя жидкости равна 1 м.

На рис. 2 показано изменение ударного давления на дне и в середине стенки при толщине аэрированной прослойки $d = 1$ см и $\alpha = 1$ %. Видно, что приближение тонкого слоя достаточно точно описывает эволюцию давления, за исключением высокочастотных осцилляций давления за счет многократного отражения слабой ударной волны от межфазной границы и стенки. При увеличении концентрации воздуха в газожидкостной прослойке давление уменьшается (рис. 3). Зависимости максимального и минимального давления от объемной доли воздуха в прослойке показаны на рис. 4. Видно, что при $\alpha > 7$ % максимальное и минимальное значения давления меняются незначительно и их амплитуда уменьшается с увеличением толщины прослойки. Сплошными линиями показаны максимумы и минимумы давления, которые достигаются на временном интервале $0 < t < 50$, причем на каждом шаге по времени давление вычисляется в 10 точках на стенке. Штриховыми линиями показаны первые пики давления на дне. Полученный результат подтвер-

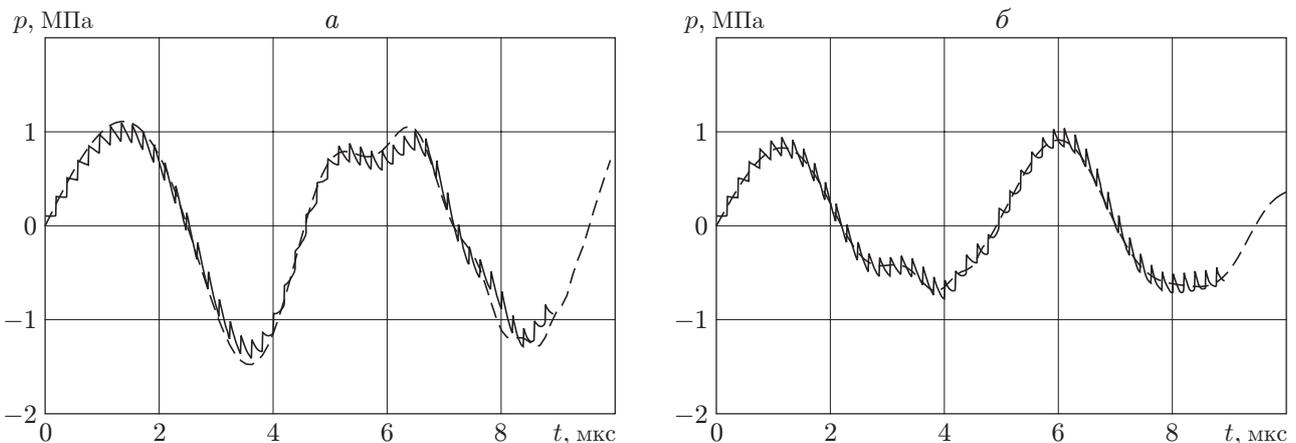


Рис. 2. Зависимость ударного давления от времени на дне (а) и в середине стенки (б) при $d = 1$ см, $\alpha = 1$ %:

сплошная линия — расчет по полной модели, штриховая — расчет в рамках приближения тонкого слоя

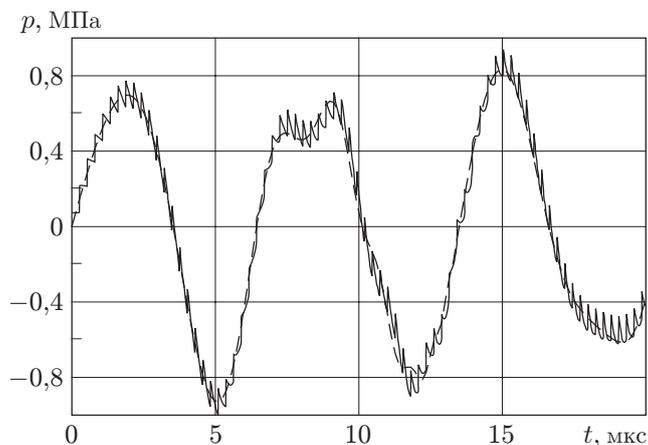


Рис. 3. Зависимость ударного давления от времени на дне при $d = 1$ см, $\alpha = 2$ % (обозначения те же, что на рис. 2)

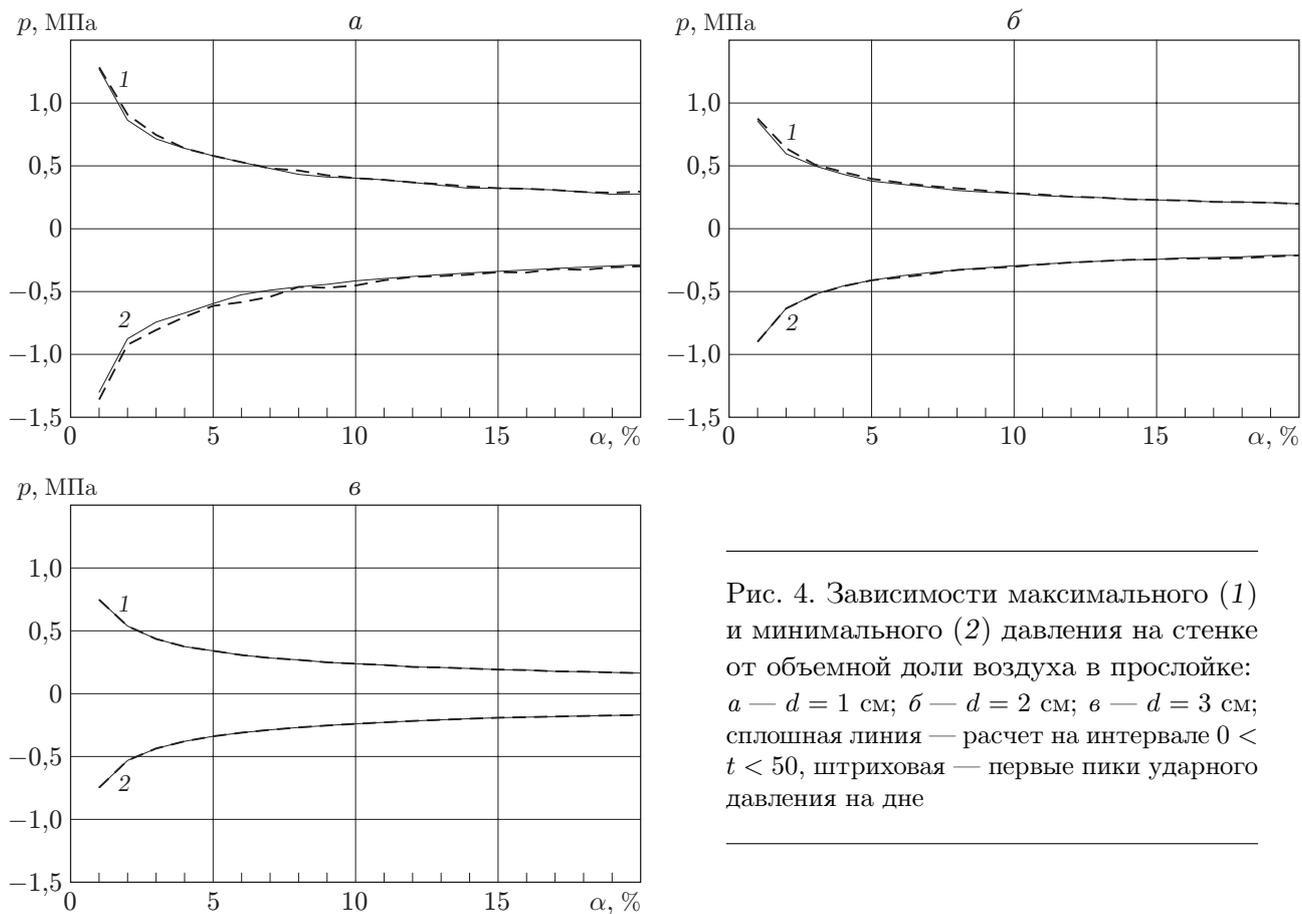


Рис. 4. Зависимости максимального (1) и минимального (2) давления на стенке от объемной доли воздуха в прослойке: a — $d = 1$ см; $б$ — $d = 2$ см; $в$ — $d = 3$ см; сплошная линия — расчет на интервале $0 < t < 50$, штриховая — первые пики ударного давления на дне

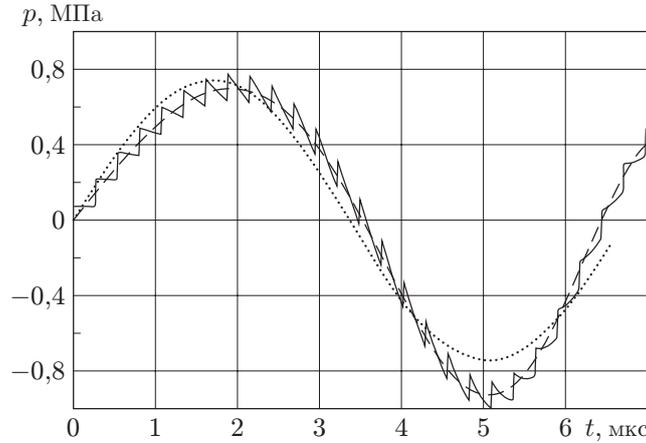


Рис. 5. Ударные давления на дне при $d = 1$ см, $\alpha = 2$ %:
 сплошная линия — расчет по формулам (34), (39); штриховая — расчет по формуле (26);
 пунктирная линия — расчет по формуле (26) с удержанием только первого слагаемого
 с номером $k = 0$

ждает предположение о том, что максимальное значение давления достигается на дне непосредственно после удара и в дальнейшем осциллирует.

На рис. 5 показаны ударные давления на дне при $d = 1$ см и $\alpha = 2$ %, полученные тремя способами: по формулам (34), (39) (сплошная линия), по формуле (26) (штриховая линия), по формуле (26) с удержанием только первого слагаемого с номером $k = 0$ (пунктирная линия). Видно, что первое слагаемое в формуле (26) достаточно точно описывает зависимость давления от времени при малых временах и может быть использовано для предварительной оценки максимального значения гидродинамического давления при ударе и времени его достижения. Удерживая в (26) только первое слагаемое, получаем следующие оценки:

$$p'_{\max} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \rho_m c_m V \sqrt{\frac{H}{d}}, \quad t'_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{dH}}{c_m}. \quad (41)$$

Сравнение асимптотической оценки максимального давления (40) и оценки (41), полученной на основе численного анализа, показывает, что они различаются менее чем на 7 %.

Заключение. В работе получена и исследована упрощенная модель удара обрушающейся волной по береговым защитным сооружениям с учетом аэрации головной части волны в области удара. В аэрированной части жидкости распределение давления описывается в рамках акустического приближения, в основной области течения — в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Построено и исследовано решение полной линейной задачи, а также решение задачи в рамках приближения тонкого слоя. Показано, что при уменьшении толщины аэрированного слоя полное решение сходится к построенному приближенному решению. Определены максимальные значения ударного давления в зависимости от концентрации воздуха в прослойке. Получены простые формулы для оценки первого максимума ударного давления и времени его достижения.

Отметим, что в реальных условиях толщину аэрированного слоя и концентрацию воздуха в нем трудно определить с приемлемой точностью. Предлагаемая в работе модель остается сложной, так как содержит указанные параметры. Однако произведение $p'_{\max} t'_{\max}$ слабо зависит от этих параметров. Используя оценки (41) и приближение $\rho_m \approx \rho_0$, находим $p'_{\max} t'_{\max} \approx (4/\pi) \rho_0 V H$. Правая часть этого выражения содержит только скорость и высоту волны, которые с достаточной точностью могут быть измерены в реальных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
2. **Кедринский В. К.** Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. **Brennen С. Е.** Fundamentals of multiphase flow. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
4. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Гостехтеоретиздат, 1950.
5. **Peregrine D. H.** Water-wave impact on walls // Annu. Rev. Fluid Mech. 2003. V. 35. P. 23–43.
6. **Пекуровский Л. Е., Поручиков В. Б., Созоненко Ю. А.** Взаимодействие волн с телами (неклассические граничные условия). М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990.

Поступила в редакцию 1/XI 2005 г.
