



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА В ОКРЕСТНОСТИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ  
КРУГОВОЙ ВЫРАБОТКИ, СООРУЖАЕМОЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПОРОД  
С РАЗЛИЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**А. С. Саммаль, С. В. Анциферов, Н. С. Павлова**

*Тульский государственный университет, E-mail: assammal@mail.ru,  
просп. Ленина 92, г. Тула 300021, Россия*

Представлен новый аналитический метод оценки напряженного состояния горного массива, сложенного двумя типами пород, прямолинейная граница раздела которых находится вблизи подкрепленной круговой выработки. В основу метода положено строгое решение плоской задачи теории упругости для бесконечной весомой среды, составленной из двух различных материалов и ослабленной вблизи границы раздела подкрепленным круговым отверстием. Полученное решение базируется на применении теории аналитических функций комплексного переменного, свойств интегралов типа Коши и комплексных рядов. Рассмотрен пример распределения напряжений в массиве окрестности выработки. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета, полученных в соответствии с предложенным методом, и данных компьютерного моделирования МКЭ.

*Горный массив, математическая модель, компьютерное моделирование, напряженное состояние, выработка, крепь, расчет, собственный вес пород*

**MATHEMATICAL MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF THE ROCK MASS  
IN THE VICINITY OF SUPPORTED CIRCULAR OPENING NEAR  
THE INTERFACE OF ROCKS WITH DIFFERENT DEFORMATION CHARACTERISTICS**

**A. S. Sammal, S. V. Antsiferov, N. S. Pavlova**

*Tula State University, E-mail: assammal@mail.ru,  
pr. Lenina 92, Tula 300021, Russia*

A new analytical method for estimating the stress state of a rock mass composed of two types of rocks with a straight-line boundary near a supported circular opening is proposed. The method is based on a strict solution of the plane problem of elasticity theory for an infinite weighty medium composed of two different materials and weakened near the rock interface by supported circular opening. The obtained solution is based on the theory of analytical functions of complex variables, properties of Cauchy-type integrals and complex series. An example of stress distribution in the rock mass near the opening is considered. A comparative analysis of the calculation results obtained in accordance with the proposed method and the data of FEM computer simulation are discussed.

*Rock mass, mathematical model, computer modeling, stress state, opening, support, calculation, rocks own weight*

При проектировании подземных сооружений необходимо учитывать наличие в массиве в непосредственной близости от кровли или почвы слоев с другими деформационными характеристиками. До настоящего времени для этой цели применяется компьютерное моделирование с использованием программных комплексов, реализующих в основном метод конечных элементов (МКЭ). Следует отметить, что практическая реализация конечно-элементных моделей, несмотря на современный высокий уровень развития компьютерных технологий, сопряжена с рядом сложностей, обусловленных отсутствием жестких критериев. В частности, необходимость ограничения

размеров рассматриваемой области моделирования, а также широкий диапазон возможного изменения того или иного параметра в процессе формирования условий закрепления модели может приводить к значительному разбросу получаемых результатов [1]. Эти обстоятельства делают целесообразным настройку и последующее тестирование разработанных сложных компьютерных моделей, применяемых, например, в работах [2–6], на основе рассмотрения аналогичных задач в упрощенной постановке, решенных аналитическими методами [7].

В Тульском государственном университете в течение нескольких лет проводятся исследования, связанные с разработкой новых аналитических методов, предназначенных для расчета крепи подземных сооружений и оценки напряженного состояния горного массива в окрестности выработок, в том числе с учетом влияния близкорасположенной границы слоя пород с другими деформационными характеристиками [8]. Цель настоящего исследования — математическое моделирование напряженного состояния горного массива, составленного двумя типами пород, в окрестности круговой горной выработки глубокого заложения, подкрепленной монолитной крепью при действии гравитационных сил (рис. 1).

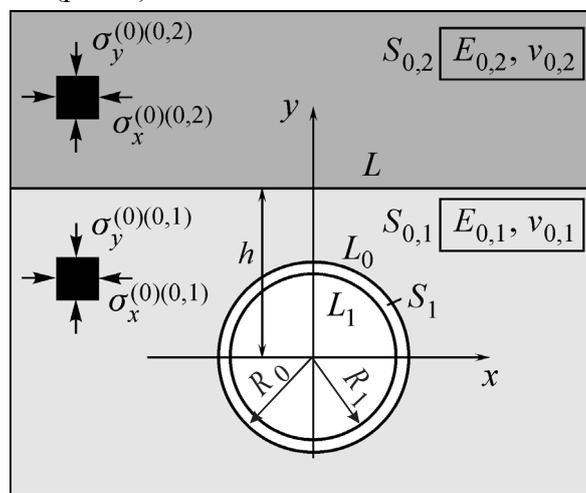


Рис. 1. Расчетная схема

Горный массив моделируется областью, составленной из двух весомых полубесконечных сред  $S_{0,1}$   $S_{0,2}$ , соответствующих породным слоям, с прямолинейной линией раздела  $L$ . Слой с другими деформационными характеристиками расположен выше свода выработки на расстоянии  $h$  от ее центра. Монолитная крепь моделируется круговым кольцом  $S_1$  из другого материала, наружный и внутренний контуры  $L_0$  и  $L_1$  которого имеют радиусы  $R_0$  и  $R_1$  соответственно.

Действие собственного веса пород, вызванных гравитационными силами, моделируется заданием в областях  $S_{0,j}$  ( $j = 0, 1$ ) неравнокомпонентных полей начальных напряжений  $\sigma_x^{(0)(0,j)}$ ,  $\sigma_y^{(0)(0,j)}$  ( $j = 0, 1$ ) с отношением главных напряжений  $\lambda$ . Удельный вес пород  $\gamma$  в рассматриваемых слоях горного массива принят одинаковым, а материал крепи — невесомым, т. е. собственный вес крепи не учитывается. Полные напряжения в массиве — составной области  $S_{0,1} + S_{0,2}$  — представляются в виде сумм начальных и дополнительных напряжений, обусловленных проходкой выработки [7, 9].

Слои пород — области  $S_{0,j}$  ( $j = 0, 1$ ) — имеют различные деформационные характеристики: модули деформации  $E_{0,j}$  ( $j = 0, 1$ ) и коэффициенты Пуассона  $\nu_{0,j}$  ( $j = 0, 1$ ) — и деформируются совместно, т. е. на линии контакта  $L$  выполняются условия непрерывности векторов полных напряжений и смещений, при этом смещения рассматриваются только дополнительные [7]. На границе  $L_0$  кольца  $S_1$  с областью  $S_{0,1}$  также выполняются условия неразрывности векторов напряжений и смещений. Внутренний контур  $L_1$  свободен от внешних сил. Принимается, что глубина заложения сооружения значительно превышает его поперечные размеры. Это допущение дает возможность не учитывать перепад начальных напряжений по высоте сечения выработки [7, 9].

При решении поставленной задачи использован метод, предложенный в работах [10, 11]. Он основан на теории аналитических функций комплексных переменных [12, 13], которая была модифицирована применительно к особенностям указанной расчетной схемы. Полученное решение реализовано в виде компьютерной программы, позволяющей проводить эффективные многовариантные расчеты как в целях практического проектирования, так и при решении научных задач, связанных с тестированием различных конечно-элементных моделей.

Особенностью решения является сведение исходной задачи об определении напряженного состояния бесконечной среды, составленной из двух различных материалов и ослабленной подкрепленным отверстием, к итерационному процессу, в каждом приближении которого рассматривается задача для однородной среды с подкрепленным отверстием при граничных условиях, содержащих дополнительные члены в виде рядов Лорана [12]. Отметим, что в частном случае, приняв в качестве исходных данных  $E_1 = 0$ ,  $\nu_1 = 0.5$ , с помощью предлагаемого подхода можно реализовать известную в геомеханике задачу определения напряженно-деформированного состояния крепи выработки неглубокого заложения с учетом влияния дневной поверхности [13].

В качестве примера представлены результаты моделирования полей напряжений в окрестности круговой выработки (рис. 2), полученные в соответствии с предлагаемым методом и при компьютерного моделирования методом конечных элементов при следующих данных  $R_1 = 1.5$  м,  $R_0 = 1.8$  м,  $h = 2.0$  м,  $E_{0,1} = 5000$  МПа,  $\nu_{0,1} = 0.35$ ,  $E_{0,2} = 250$  МПа,  $\nu_{0,2} = 0.35$ ,  $E_1 = 23000$  МПа,  $\nu_1 = 0.2$ . Коэффициент бокового давления  $\lambda = 0.54$  принят одинаковым в областях  $S_{0j}$  ( $j = 0, 1$ ).

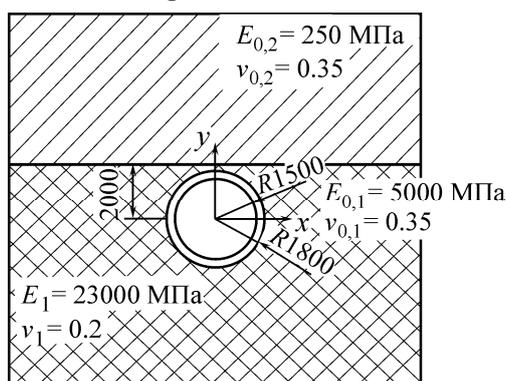


Рис. 2. Расчетная модель

Результаты математического моделирования — эпюры нормальных тангенциальных напряжений на наружном  $\sigma_{\theta}^{(ex)}$  и внутреннем  $\sigma_{\theta}^{(in)}$  контурах крепи — представлены на рис. 3 в безразмерной форме, т.е. в долях величины  $\gamma H \alpha^*$  ( $H$  — глубина заложения выработки;  $\alpha^*$  — корректирующий множитель, учитывающий отставание возведения крепи от забоя выработки [7]).

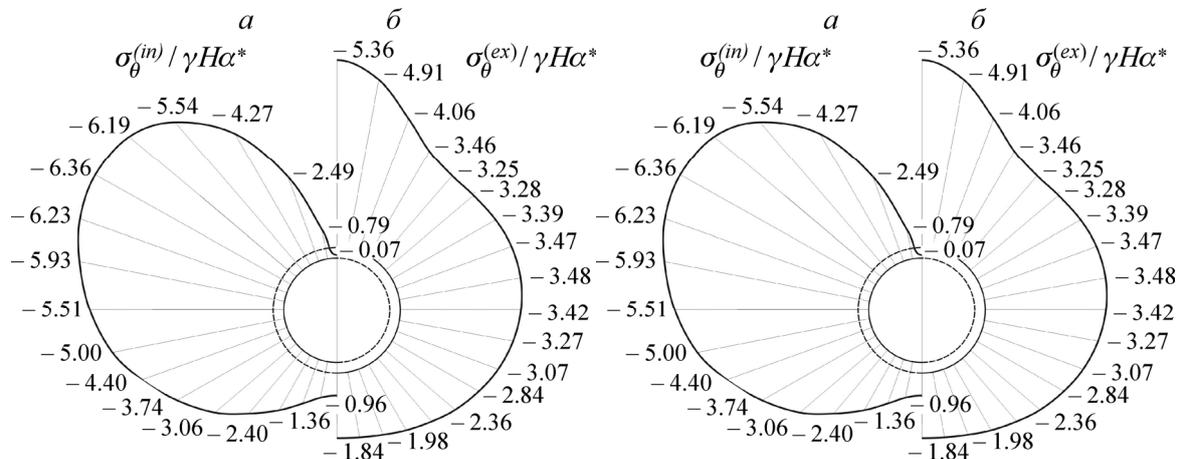


Рис. 3. Результаты математического моделирования напряжений на внутреннем (а) и наружном (б) контурах крепи

Аналогичные результаты компьютерного моделирования МКЭ при задании  $\gamma = 0.02 \text{ МН/м}^3$ ,  $H = 100 \text{ м}$ ,  $\alpha^* = 1$  представлены на рис. 4.

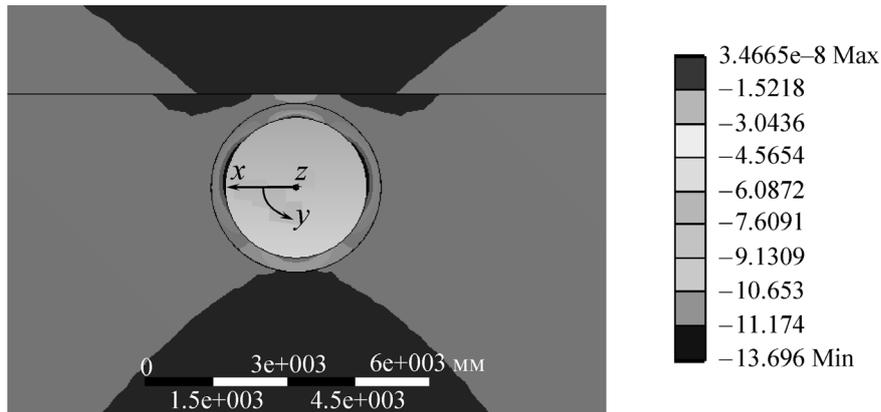


Рис. 4. Результаты компьютерного моделирования — изополя нормальных тангенциальных (окружных) напряжений  $\sigma_\theta$

## ВЫВОДЫ

Анализ результатов показывает, что они в целом удовлетворительно согласуются. Поскольку данные математического моделирования получены заранее, в процессе разработки конечно-элементной модели размеры рассматриваемой области и граничные условия корректировались соответствующим образом для достижения желаемого результата. Так, в приведенном примере симметричная компьютерная модель имела размеры, каждый из которых существенно превышал  $5R_0$ , в то время как ограничения накладывались только на перемещения угловых точек модели.

Предлагаемый аналитический метод расчета может применяться как в практических целях при проведении многовариантных расчетов при проектировании горных выработок, сооружаемых вблизи границы раздела слоев пород с различными деформационными характеристиками, так и для верификации сложных конечно-элементных компьютерных моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Sammal A. S., Antsiferov S. V., and Deev P. V.** Analytical methods for underground structures designing Tula, Publishing House of Tula State University, 2013, 115 pp. [**Саммаль А. С., Анциферов С. В., Деев П. В.** Аналитические методы расчета подземных сооружений. — Тула: Изд-во ТулГУ. — 2013. — 115 с.]
2. **Protosenya A. G. and Verbilo P. E.** Estimation of block rock mass strength by numerical modeling method, News of the higher institutions, Gornyi zhurnal, 2016, no. 4, pp. 47–54. [**Протосения А. Г., Вербило П. Э.** Оценка прочности блочного горного массива методом численного моделирования // Изв. вузов. Горн. журн. — 2016. — № 4. — С. 47–54.]
3. **Sdvizhkova E. A.** Estimation of heterogeneous massif strength on the base of probabilistic-statistical models, Mining Information Analytical Bulletin, 1996, no. 1, pp. 160–162. [**Сдвижкова Е. А.** Оценка прочности неоднородного массива на основе вероятностно-статистических моделей // ГИАБ. — 1996. — № 1. — С. 160–162.]
4. **Karasev M. A.** Effective application of numerical methods of analysis for solving problems of geomechanics, Notes of the Mining Institute, 2010, vol. 185, pp. 161–165. [**Карасев М. А.** Эффективное применение численных методов анализа для решения задач геомеханики // Записки Горного института. 2010. — Т. 185. — С. 161–165.]

5. **Stroкова L. A., Dutova E. M., Ermolaeva A. V., Alimova I. N., and Strel'nikova A. B.** Karst hazard assessment in the design of the main gas pipeline (South Yakutia), IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2015, vol. 27, pp. 868–881. [Строкова Л. А., Дутова Е. М., Ермолаева А. В., Стрельникова А. В. Оценка карстовой опасности при проектировании магистрального газопровода (Южная Якутия) // Труды конференции Науки о Земле и окружающей среде. — 2015. — Т. 27. — С. 868–881.]
6. **Pleshko M. S., Stradanchenko S. G., Maslennikov S. A., and Pashkova O. V.** Study of technical solutions to strengthen the lining of the barrel in the zone of influence of construction near-wellbore production, ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 2015, vol. 10, no. 1, pp. 14–19. [Плешко М. С., Страданченко С. Г., Масленников С. А., Пашкова О. В. Исследование технических решений по усилению крепи ствола в зоне влияния очистных работ. // Журнал инженерных и прикладных наук. — 2015. — Т. 10 — № 1. — С. 14–19].
7. **Bulychev N. S.** The mechanics of underground structures in examples and tasks. Textbook for high schools. Moscow: Nedra, 1989, 270 pp. [Бульчев Н. С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. Учеб. пособие для вузов. — М.: Недра, — 1989. — 270 с.]
8. **Sammal A. S., Antsiferov S. V., and Pavlova N. S.** Mathematical and computer modeling of the stress-strain state of the rock mass composed of two rock types near the circular pressure excavation, News of higher educational institutions, Izv. vuzov, Mining Journal, 2018, no. 7, pp. 37–44. [Саммаль А. С., Анциферов С. В., Павлова Н. С. Математическое и компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния массива пород, сложенного двумя типами пород, в окрестности напорной выработки // Изв. вузов. Горн. журн. — 2018. — № 7. — С. 37–44.]
9. **Sammal A. S., Antsiferov S. V., and Pavlova N. S.** Taking into account the influence of the boundary of rock layers in the calculation of underground structures, In the book, Design, construction and operation of complexes of underground structures Proc. of the VI International conference, 2019, pp. 64–68. [Саммаль А. С., Анциферов С. В., Павлова Н. С. Учет влияния границы раздела слоев пород при расчете подземных сооружений // Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений: труды VI Междунар. конф., 2019. — С. 64–68.]
10. **Kasparyan E. V., Kozyrev, A. A., Iofis M. A., and Makarov A. B.** Geomechanics: A Textbook, Moscow, Vysshaya shkola, 2006, 503 pp. [Каспарьян Э. В., Козырев А. А., Иофис М. А., Макаров А. Б. Геомеханика: учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 2006. — 503 с.]
11. **Bezrodnii K. P., Lebedev M. O., and Sammal A. S.** Modern experience of application of theoretical approaches of geomechanics in underground construction, based on the methods of continuum mechanics, Metro and Tunnels, 2018, no. 4, pp. 20–21. [Безродный К. П., Лебедев М. О., Саммаль А. С. Современный опыт применения теоретических подходов геомеханики в подземном строительстве, базирующихся на методах механики сплошной среды // Метро и тоннели. — 2018. — № 4. — С. 20–21.]
12. **Muskhelishvili N. I.** Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. [Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.]
13. **Aramanovich I. G.** On stress distribution in an elastic half-plane weakened by a supported circular opening, Proceedings of the Academy of Sciences, Moscow, 1955, vol. 104, no. 3, pp. 372–375. [Араманович И. Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием // ДАН СССР. — 1955. — Т. 104. — № 3. — С. 372–375.]
14. **Fotieva N., Bulychev N., Antsiferov S., Sammal A., and Deev P.** Influence of soil grouting on the shallow tunnel linings stress state in urban areas, Proc. of the 33rd ITA-AITES World Tunnel Congress “Underground Space – The 4th Dimension of Metropolises” Prague, 2007, pp. 439–444.