

УДК 539.214:539.3

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И НЕУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ФАЗОВЫХ МАТЕРИАЛОВ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ С РАВНОНАПРЯЖЕННОЙ АРМАТУРОЙ

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Сформулирована неупругая задача равнонапряженного армирования плоских термочувствительных композитных конструкций. Получены аналитические решения в термоупругом и неупругом случаях. На основе этих решений показано, что для неупругих проектов несущая способность конструкции может быть увеличена в несколько раз по сравнению с термоупругими, а при фиксированном уровне нагружения в неупругом случае возможна существенная экономия арматуры. Несмотря на ухудшение прочностных характеристик фаз композиции, несущая способность конструкции при нагреве в неупругом случае практически не уменьшается, а в термоупругом случае может даже возрастать.

Ключевые слова: композиты, равнонапряженное армирование, термочувствительность, термоупругость, термопластичность, однородное деформирование.

Одним из критериев прочности рационального проектирования композитных конструкций при статическом нагружении является равнонапряженность волокон вдоль их траекторий, что позволяет наиболее полно использовать несущую способность высокопрочной арматуры и создавать надежные конструкции даже при низкой прочности связующего. Исследованию равнонапряженного армирования (РА) посвящены многие работы (см., например, [1–8]). Однако до настоящего времени при исследовании задачи РА либо использовалась нитяная (сетевая) модель армированного слоя [7, 8], в рамках которой не учитывается механическое поведение связующего, а значит, и влияние теплового или радиационного воздействия на конструкцию [5], либо предполагалось, что поведение всех фаз композиции линейно-упругое, т. е. не учитывалось реальное поведение фазовых материалов за пределом текучести. При этом не была проведена оценка эффективности использования несущей способности реальных волокон при рассмотрении задачи РА в упругой постановке. Кроме того, известно, что при интенсивном тепловом воздействии физико-механические характеристики многих материалов, используемых при изготовлении волокнистых композиций, существенно изменяются (в частности, уменьшается или повышается их прочность) [9–12].

Целью настоящего исследования является изучение влияния термочувствительности и неупругого поведения фазовых материалов композиции на несущую способность конструкций при РА.

1. Система разрешающих уравнений и граничные условия. Полная замкнутая система разрешающих уравнений задачи РА, описывающая в декартовой системе координат x_1Ox_2 поведение плоских термоупругих и термопластических конструкций, статиче-

ски нагруженных в своей плоскости и армированных двумя семействами равнонапряженных волокон (материалы связующего и волокон предполагаются изотропными, а поведение связующего описывается деформационной теорией пластичности [13]), включает уравнения равновесия, записанные в перемещениях [14]:

$$(-1)^i \sum_k \sigma_k \omega_k l_{kj} \partial_k(\psi_k) + B_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = -(1 - \Omega)F_i - \sum_k \omega_k F_{ki},$$

$$j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

условия постоянства площадей поперечных сечений волокон

$$(\omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (\omega_k \sin \psi_k)_{,2} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1.2)$$

условия равнонапряженности арматуры

$$\sigma_k = f_k(\varepsilon_k, \theta) = \text{const},$$

$$\partial_k(u_1) \cos \psi_k + \partial_k(u_2) \sin \psi_k - \alpha_k(\theta)\theta = \varepsilon_k(\theta) = f_k^{-1}(\sigma_k, \theta), \quad k = 1, 2, \quad (1.3)$$

уравнение плоской стационарной задачи теплопроводности

$$(\Lambda_{11}(\theta)\theta_{,1} + \Lambda_{12}(\theta)\theta_{,2})_{,1} + (\Lambda_{21}(\theta)\theta_{,1} + \Lambda_{22}(\theta)\theta_{,2})_{,2} + 2\mu(\theta)(\theta_\infty - \theta)/h =$$

$$= -(1 - \Omega)Q - \sum_k \omega_k Q_k, \quad \theta = T - T_0, \quad \theta_\infty = T_\infty - T_0, \quad (1.4)$$

где

$$B_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = a[g(\varepsilon_u, \theta)(u_{i,i} - \varepsilon_0) + 3K(\theta)(\varepsilon_0 - \alpha(\theta)\theta)]_{,i} +$$

$$+ 0,5a[g(\varepsilon_u, \theta)(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2; \quad (1.5)$$

$$\partial_k(\cdot) = l_{k1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} + l_{k2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}, \quad l_{k1} = \cos \psi_k, \quad l_{k2} = \sin \psi_k, \quad k = 1, 2; \quad (1.6)$$

$$\Omega = \sum_k \omega_k, \quad \boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2\}; \quad (1.7)$$

$$\Lambda_{ij}(\theta) = \frac{1}{\Omega} \sum_k \omega_k \left\{ [\Omega(\lambda_k(\theta) - \lambda(\theta)) + \lambda(\theta)] l_{ki} l_{kj} + \frac{(-1)^{i+j} l_{ks} l_{kr} \lambda_k(\theta) \lambda(\theta)}{\Omega(\lambda(\theta) - \lambda_k(\theta)) + \lambda_k(\theta)} \right\},$$

$$s = 3 - i, \quad r = 3 - j, \quad i, j = 1, 2;$$

$$g(\varepsilon_u, \theta) = \frac{2\sigma_u(\varepsilon_u, \theta)}{3\varepsilon_u}, \quad K(\theta) = \frac{E(\theta)}{3(1 - 2\nu(\theta))}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3},$$

$$\varepsilon_u = (\sqrt{2}/3) \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} - 3\varepsilon_0)^2 + (3\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 6\varepsilon_{12}^2}, \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_{33} = 3\varepsilon_0 - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad i, j = 1, 2;$$

$$0 < a = \text{const} < 1. \quad (1.10)$$

На одной части контура Γ_p могут быть заданы статические граничные условия в перемещениях [14]

$$\sum_k \sigma_k \omega_k \cos^2(\psi_k - \beta) + D_n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = p_n,$$

$$\sum_k \sigma_k \omega_k \sin 2(\psi_k - \beta) + D_\tau(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = 2p_\tau, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \quad (1.11)$$

на другой части Γ_u — кинематические

$$u_i(\Gamma_u) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, \quad (1.12)$$

на всем контуре $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ — тепловые

$$\chi[(\Lambda_{11}(\theta)\theta_{,1} + \Lambda_{12}(\theta)\theta_{,2})n_1 + (\Lambda_{21}(\theta)\theta_{,1} + \Lambda_{22}(\theta)\theta_{,2})n_2 + q] + \gamma(\theta - \theta_0) = 0, \quad (1.13)$$

где

$$D_n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = a\{g(\varepsilon_u, \theta)[u_{1,1}n_1^2 + u_{2,2}n_2^2 + (u_{1,2} + u_{2,1})n_1n_2 - \varepsilon_0] + 3K(\theta)(\varepsilon_0 - \alpha(\theta)\theta)\}, \quad (1.14)$$

$$D_\tau(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = ag(\varepsilon_u, \theta)[2(u_{2,2} - u_{1,1})n_1n_2 + (u_{1,2} + u_{2,1})(n_1^2 - n_2^2)];$$

$$n_1 = \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta. \quad (1.15)$$

(Возможно задание условий (1.11), (1.12) на всем контуре Γ , ограничивающем область G , занимаемую конструкцией в плане.) На части контура Γ_k , на которой волокна k -го семейства входят в конструкцию, необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования:

$$\omega_k(\Gamma_k) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2. \quad (1.16)$$

При решении задачи РА в случае плоской деформации ($\varepsilon_{33} = 0$) в операторах (1.5), (1.14) следует учесть, что

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/3 = (u_{1,1} + u_{2,2})/3, \quad (1.17)$$

а в случае обобщенного плоского напряженного состояния (ПНС) к системе (1.1)–(1.4) необходимо добавить уравнение [14]

$$g(\varepsilon_u, \theta)(2\varepsilon_0 - u_{1,1} - u_{2,2}) + 3K(\theta)(\varepsilon_0 - \alpha(\theta)\theta) = 0, \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (1.18)$$

Кроме того, при линейно-упругом поведении фазовых материалов функции $g(\varepsilon_u, \theta)$ и $f_k(\varepsilon_k, \theta)$, $f_k^{-1}(\sigma_k, \theta)$ в соотношениях (1.3), (1.5), (1.9), (1.14), (1.18) имеют вид

$$g(\varepsilon_u, \theta) = E(\theta)/(1 + \nu(\theta)), \quad f_k(\varepsilon_k, \theta) = E_k(\theta)\varepsilon_k, \quad f_k^{-1}(\sigma_k, \theta) = \sigma_k/E_k(\theta). \quad (1.19)$$

Решение задачи РА должно удовлетворять физическим ограничениям [3, 4, 14]

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2), \quad \Omega \leq 1 - a \quad (0 \leq a = \text{const} < 1) \quad (1.20)$$

и прочностным ограничениям

$$\sigma_u(\varepsilon_u, \theta) \leq \sigma_c(\theta), \quad -\sigma_k^-(\theta) \leq \sigma_k \leq \sigma_k^+(\theta), \quad \sigma_c > 0, \quad \sigma_k^\pm > 0, \quad k = 1, 2. \quad (1.21)$$

В уравнениях и соотношениях (1.1)–(1.21) F_i, F_{ki} — компоненты объемных удельных нагрузок, действующих на связующее и арматуру k -го семейства по направлениям x_i соответственно; ω_k, ψ_k — интенсивность и угол (отсчитываемый от направления x_1) армирования волокном k -го семейства; σ_k, ε_k — напряжение и механическая деформация волокон k -го семейства (диаграмма растяжения-сжатия $\sigma_k \sim \varepsilon_k$ в общем случае может быть несимметричной, ее вид зависит от температуры и определяется функцией f_k); σ_u, ε_u — интенсивности напряжений и деформаций в связующем (вид диаграммы $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ может зависеть от температуры); ε_{ij}, u_i — компоненты деформаций и перемещений; ν, E, E_k — коэффициент Пуассона связующего и модули упругости связующего и арматуры k -го семейства соответственно; a — интенсивность прослоек связующего между элементарными армирующими слоями; α, α_k — коэффициенты линейного теплового расширения связующего и арматуры k -го семейства; λ, λ_k — коэффициенты теплопроводности связующего и арматуры k -го семейства; θ — разность температур конструкции в рабочем (T)

и исходном (T_0) состояниях; θ_∞ — разность температур окружающей среды T_∞ (со стороны лицевых поверхностей конструкции) и T_0 ; μ — коэффициент конвективного теплообмена между связующим и окружающей средой на лицевых поверхностях пластины (в случае плоской деформации $\mu = 0$); $h = \text{const}$ — толщина пластины в случае ПНС; Q, Q_k — мощности внутренних источников тепла в связующем и волокнах k -го семейства; p_n, p_τ — нормальные и касательные контурные напряжения соответственно; u_{i0} — заданные на контуре Γ_u компоненты перемещения; θ_0 — разность температур контура Γ конструкции в рабочем и исходном состояниях; q — тепловой поток через торцевую (боковую) поверхность конструкции; χ, γ — функции переключения, позволяющие задавать на Γ различные тепловые условия; β — угол, задающий направление внешней нормали к Γ ; ω_{0k} — заданные на контуре Γ_k значения функций ω_k ; σ_c — предел прочности материала связующего, равный, например, пределу текучести σ_T или временному сопротивлению σ_B ; σ_k^-, σ_k^+ — пределы прочности волокон k -го семейства при сжатии и растяжении соответственно (при воздействии сжимающих нагрузок волокна могут потерять устойчивость, поэтому в общем случае $\sigma_k^- \neq \sigma_k^+$); суммирование проводится от 1 до 2; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_i . При учете термочувствительности субструктурных элементов композиции (ТСЭК) их физико-механические характеристики $E, \nu, K, \alpha, \lambda, E_k, \alpha_k, \lambda_k, \mu, \sigma_T, \sigma_B, \sigma_k^\pm$ ($k = 1, 2$) зависят от температуры конструкции θ [9–12], в силу чего от θ зависят эффективные коэффициенты теплопроводности Λ_{ij} , а также функции g и f_k , характеризующие диаграммы деформирования фазовых материалов.

В [14] показано, что система разрешающих уравнений (1.1)–(1.4), (1.18) (или (1.17)) является квазилинейной системой смешанно-составного типа [15], замкнутой относительно неизвестных функций $\psi_k, \omega_k, u_k, \theta, \varepsilon_0$ ($k = 1, 2$), и имеет две комплексные характеристики, порождаемые уравнением теплопроводности (1.4), и две действительные характеристики, совпадающие с траекториями равнонапряженных волокон. Нелинейность в рассматриваемой задаче обуславливается “структурной” нелинейностью (так как параметры РА ψ_k, ω_k — неизвестные функции) и физической нелинейностью (так как физико-механические характеристики фаз композиции зависят от температуры θ и при неупругом поведении фазовых материалов функции $g(\varepsilon_u, \theta), f_k(\varepsilon_k, \theta)$ нелинейно выражаются через величины $\varepsilon_u, \varepsilon_k, \theta$, значения которых определяются из решения задачи). Это значительно усложняет разработку методов решения граничной задачи РА.

2. Исследование несущей способности плоских термочувствительных конструкций с равнонапряженной арматурой. В настоящее время теория систем квазилинейных уравнений смешанно-составного типа разработана недостаточно полно [15], что не позволяет аналитически исследовать свойства решений системы разрешающих уравнений задачи РА в общем случае. Однако удастся выделить и более подробно исследовать важный класс решений этой системы. Проанализируем случай однородного деформирования (ОД) конструкции, когда полные деформации в волокнах всех семейств совпадают (например, волокна изготовлены из одного материала) и температурное поле однородно (это возможно при $Q = Q_k = 0, \mu = 0, \theta(\Gamma) = \theta_0 = \text{const}$ [4]):

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_k + \alpha_k \theta = \text{const}, \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_0 = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad k = 1, 2. \quad (2.1)$$

Выполнение в конструкциях со структурой РА условий (2.1) обеспечивает равнонапряженность не только волокон, но и связующего [14]:

$$\sigma_{cii} = g(\varepsilon_u, \theta)(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_0) + 3K(\varepsilon_0 - \alpha\theta) = \text{const}, \quad \sigma_{c12} = g(\varepsilon_u, \theta)\varepsilon_{12} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

что позволяет исключить нежелательное влияние сдвиговых деформаций на сцепление арматуры со связующим и существенно повысить трещиностойкость материала связующей матрицы.

При выполнении равенств (2.1) в уравнениях равновесия (1.1) операторы $B_i = 0$, а в статических граничных условиях (1.11) операторы $D_n = \text{const}$, $D_\tau = 0$. При неупругом поведении материала связующего:

$$D_n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = a[g(\varepsilon_u, \theta)(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0) + 3K(\varepsilon_0 - \alpha\theta)] = \text{const},$$

$$\varepsilon_u = 2\sqrt{(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0)^2} = 2|\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0| = \text{const} \quad (2.3)$$

в случае плоской деформации $\varepsilon_0 = 2(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta)/3$ (см. (1.17), (2.1)), а в случае ПНС ε_0 определяется из уравнения (см. (1.9), (1.18), (2.1))

$$3K(\varepsilon_0 - \alpha\theta) - 2g(\varepsilon_u, \theta)(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0) = 0. \quad (2.4)$$

При линейно-упругом поведении материала связующего в силу (1.19)

$$D_n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \varepsilon_0, \theta) = Ea[\varepsilon_1 + (\alpha_1 - \alpha)\theta]/(1 - \nu) = \text{const}. \quad (2.5)$$

Поскольку $B_i = 0$ ($i = 1, 2$), $D_n = \text{const}$, $D_\tau = 0$, в случае ОД конструкций решение задачи РА строится одинаково как при упругом, так и при неупругом поведении материала связующего. (При неупругом поведении материала связующего в случае ПНС предварительно необходимо лишь решить уравнение (2.4) относительно величины $\varepsilon_0 = \text{const}$). В [6] подробно исследована термоупругая задача РА плоских конструкций при ОД. Все результаты, полученные в [6], можно перенести на случай неупругого поведения материалов фаз композиции. В частности, для выполнения условий (2.1) в конструкцию необходимо внедрять лишь два семейства арматуры; при отсутствии объемных нагрузок ($F_i = F_{ki} = 0$) траектории РА прямолинейны, что удобно при реализации соответствующих проектов. В случае осесимметричного нагружения кольцевых пластин при ОД и $F_i = F_{ki} = 0$ ($i, k = 1, 2$) решение задачи РА может быть получено в аналитической форме [6].

Проанализируем некоторые решения задачи РА плоских конструкций при ОД. Пусть кольцевая пластина ограничена окружностями радиусов r_0, r_1 ($r_0 < r_1$). На обоих контурах заданы равномерные нормальные нагрузки $p_{n0} = \text{const}$, $p_{n1} = \text{const}$ ($p_{\tau 0} = p_{\tau 1} = 0$) соответственно, объемные нагрузки отсутствуют. Оба семейства волокон изготовлены из одного материала:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \text{const}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad E_1 = E_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad f_1(\varepsilon, \theta) = f_2(\varepsilon, \theta). \quad (2.6)$$

Так как форма и нагружение конструкции обладают осевой симметрией, целесообразно искать осесимметричное решение задачи РА. В осесимметричном случае в полярной системе координат (r, φ) при $F_i = F_{ki} = 0$ прямолинейные траектории РА задаются уравнениями [6]

$$r \sin \tilde{\psi}_k(r) = C_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \quad (2.7)$$

где $\tilde{\psi}_k = \psi_k - \varphi$ — углы армирования, отсчитываемые от направления полярного радиуса r ; C_k — подлежащие определению постоянные, модули которых равны расстояниям от точки начала координат до траектории армирования k -го семейства. Интенсивность армирования ω_k определяется выражением

$$r\omega_k(r) \cos \tilde{\psi}_k(r) = r_0\omega_{0k} \cos \tilde{\psi}_k(r_0) = \text{const}, \quad \omega_{0k} = \omega_k(r_0), \quad k = 1, 2. \quad (2.8)$$

Постоянные величины C_k , ω_{0k} определяются из статических граничных условий в точках $r = r_0, r_1$. В частности, если рассматриваются только радиально-симметричные структуры РА ($\tilde{\psi}_2 = -\tilde{\psi}_1$, $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_{01} = \omega_{02}$), то с учетом (2.6) [6]

$$C_k^2 = R_0(\omega_{01})(P_0 - \omega_{01})/[2\omega_{01}(P_0 - \omega_{01})], \quad k = 1, 2,$$

$$2\omega_{01} = [(r_1^2 P_1)^2 - (r_0^2 P_0)^2][r_0^2(r_1^2 - r_0^2)P_0]^{-1}, \quad \omega_{01} = \omega_{02}, \quad (2.9)$$

Таблица 1

$T, ^\circ\text{C}$	Магние́вый сплав МА2 [11]						Волокна бора [10]			
	$E,$ ГПа	$\sigma_{0,2},$ МПа	$\sigma_{в},$ МПа	δ	$\alpha \cdot 10^6,$ К ⁻¹	ν	$E_1,$ ГПа	$\sigma_{в1},$ МПа	δ_1	$\alpha_1 \cdot 10^6,$ К ⁻¹
20	44,5	190	250	0,15	32,4	0,31	416,5	3150	0,002	2,4
150	41,2	98	167	0,22	33,1	0,33				

где

$$R_0(\omega_{01}) = r_0^2(2\omega_{01} - P_0), \quad P_i = (p_{ni} - D_n)/\sigma_1, \quad i = 0, 1, \quad (2.10)$$

значения D_n определяются выражениями (2.3) или (2.5).

Из соотношений (2.7), (2.8) следует, что во всей конструкции будут выполнены физические ограничения (1.20), если они выполнены на внутреннем контуре. Это требование приводит к неравенствам

$$0 \leq [(r_1^2 P_1)^2 - (r_0^2 P_0)^2][r_0^2(r_1^2 - r_0^2)P_0]^{-1} < 1 - a \quad (a = \text{const}, \quad a < 1 - \Omega); \quad (2.11)$$

$$0 < \cos^2 \tilde{\psi}_1(r_0) = P_0/(2\omega_{01}) \leq 1, \quad (2.12)$$

с учетом зависимостей P_0, P_1 от p_{n0}, p_{n1}, θ (см. (2.10)) определяющим в фазовом пространстве (p_{n0}, p_{n1}, θ) область допустимого термосилового нагружения конструкции, при котором может существовать решение задачи РА кольцевых конструкций в случае ОД при $\omega_{01} = \omega_{02}$.

На примере решения задачи РА кольцевой пластины при ОД удобно показать эффективность использования неупругих проектов с равнонапряженной арматурой. Рассмотрим кольцевую пластину, ограниченную окружностями радиусов r_0, r_1 ($r_0/r_1 = 0,5$), изготовленную из магниевого сплава МА2 и армированную двумя семействами волокон бора. Физико-механические характеристики материалов фаз композиции приведены в табл. 1. Распределенные объемные нагрузки не учитываются ($F_i = F_{ki} = 0, i, k = 1, 2$), а на контурах конструкции заданы равномерно распределенные нормальные напряжения

$$p_{n0} = 0,45\sigma_{в1}p, \quad p_{n1} = 0,25\sigma_{в1}p, \quad p_{\tau 0} = p_{\tau 1} = 0 \quad (2.13)$$

($\sigma_{в1}$ — напряжение, равное временному сопротивлению волокон бора; $p > 0$ — параметр нагружения). В пластине реализуется обобщенное ПНС.

Сначала исследуем случай упругого поведения материала связующего (волокна бора ведут себя как упругохрупкие). При этом следует оценить предельную величину механической деформации арматуры ε_1 , при которой в конструкции при ОД интенсивность напряжений в связующем равна пределу текучести ($\sigma_{\tau} = \sigma_{0,2}$). Из (1.21), (2.2) при $\sigma_c = \sigma_{\tau}$ следует уравнение для предельного значения ε_1

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{c11}^2 - \sigma_{c11}\sigma_{c22} + \sigma_{c22}^2} = E|\varepsilon_1 + (\alpha_1 - \alpha)\theta|/(1 - \nu) = \sigma_{\tau}. \quad (2.14)$$

Решение уравнения (2.14) обозначим через ε_1^{τ} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{\tau} &= (1 - \nu)\sigma_{\tau}/E + (\alpha - \alpha_1)\theta & \text{при} & \quad \varepsilon_1^{\tau} + (\alpha_1 - \alpha)\theta > 0, \\ \varepsilon_1^{\tau} &= -(1 - \nu)\sigma_{\tau}/E + (\alpha - \alpha_1)\theta & \text{при} & \quad \varepsilon_1^{\tau} + (\alpha_1 - \alpha)\theta < 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Так как параметр нагружения p в (2.13) предполагается положительным, то при $\theta = 0$ величина ε_1^{τ} задается первым равенством в (2.15).

При температуре конструкции в исходном состоянии ($T_0 = 20 ^\circ\text{C}, \theta = 0 ^\circ\text{C}$) значение $\varepsilon_1^{\tau} = 0,39\varepsilon_{в1}$ ($\varepsilon_{в1} = \sigma_{в1}/E_1$ — предельная деформация волокон бора). Это означает, что

Таблица 2

p	$T = 20 \text{ }^\circ\text{C} (\theta = 0 \text{ }^\circ\text{C})$		$T = 150 \text{ }^\circ\text{C} (\theta = 130 \text{ }^\circ\text{C})$			
			Без учета ТСЭК		С учетом ТСЭК	
	УП	НУП	УП	НУП	УП	НУП
p_{\min}	0,361	0,368	0,361	0,3685	0,1865	0,193
p_{\max}	0,58	1,31	1,193	1,305	0,945	1,25

Примечание. УП — упругое поведение материала связующего, НУП — неупругое поведение.

напряжение в равнонапряженной арматуре при упругом поведении материала связующего не может превышать 39 % предела прочности σ_{B1} . Следовательно, при упругом поведении материала связующего, изготовленного из сплава МА2, несущая способность волокон бора используется частично.

Рассмотрим проекты РА, в которых несущая способность арматуры используется максимально, т. е. $\sigma_k = \sigma_{B1}$. При этом $\varepsilon_1^T < \varepsilon_k = \varepsilon_{B1}$ ($k = 1, 2$), и в случае $\theta = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ в связующем возникают пластические деформации. Для решения неупругой задачи РА предварительно нужно разрешить относительно ε_0 уравнение (2.4), которое с учетом выражений для $g(\varepsilon_u, \theta)$ и ε_u (см. (1.9), (2.3)) преобразуется к виду

$$9K(\varepsilon_0 - \alpha\theta) - 2 \operatorname{sign}(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0)\sigma_u(\varepsilon_u, \theta) = 0. \quad (2.16)$$

Решение уравнения (2.16) зависит от вида зависимости $\sigma_u(\varepsilon_u, \theta)$ для материала связующего. Будем предполагать, что диаграмма $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ имеет участок с линейным упрочнением. Тогда зависимость $\sigma_u(\varepsilon_u, \theta)$ определяется соотношениями [13]

$$\begin{aligned} \sigma_u(\varepsilon_u, \theta) &= E_u(\theta)\varepsilon_u & \text{при} & \quad 0 \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_{uT}(\theta), \\ \sigma_u(\varepsilon_u, \theta) &= \sigma_T(\theta) + E_{uT}(\theta)(\varepsilon_u - \varepsilon_{uT}(\theta)) & \text{при} & \quad \varepsilon_{uT}(\theta) \leq \varepsilon_u \leq \varepsilon_{uB}(\theta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} E_u &= 1,5E/(1 + \nu), & \varepsilon_{uT} &= 2(1 + \nu)\sigma_T/(3E), & \varepsilon_{uB} &= \delta + 2(1 + \nu)\sigma_B/(3E), \\ E_{uT} &= E(\sigma_B - \sigma_T)/[E\delta + 2(1 + \nu)(\sigma_B - \sigma_T)/3]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставляя в уравнение (2.16) второе соотношение (2.17) и учитывая выражение для ε_u (2.3) и (2.18), получим

$$9K(\varepsilon_0 - \alpha\theta) - 2 \operatorname{sign}(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0)(\sigma_T - E_{uT}\varepsilon_{uT}) - 4E_{uT}(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0) = 0. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) имеет два решения:

$$\varepsilon_0 = [9K\alpha\theta + 4E_{uT}(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta) \pm 2(\sigma_T - E_{uT}\varepsilon_{uT})]/(9K + 4E_{uT}). \quad (2.20)$$

Выбор знака в (2.20) зависит от знака неравенства

$$\varepsilon_u = \pm 2(\varepsilon_1 + \alpha_1\theta - \varepsilon_0) > \varepsilon_{uT} > 0. \quad (2.21)$$

При сжатии волокон ($\varepsilon_1 < 0$) в (2.20), (2.21) следует выбирать знак “–”, а при растяжении ($\varepsilon_1 > 0$) — знак “+”. (Такой выбор решения уравнения (2.19) остается справедливым для рассматриваемой композиции в реальном диапазоне температур $-300 \text{ }^\circ\text{C} \leq \theta \leq 1000 \text{ }^\circ\text{C}$.)

При известном из (2.20), (2.21) значении ε_0 по формулам (2.7)–(2.10) можно определить осесимметричную структуру РА кольцевой пластины при ОД в случае неупругого поведения материала связующего.

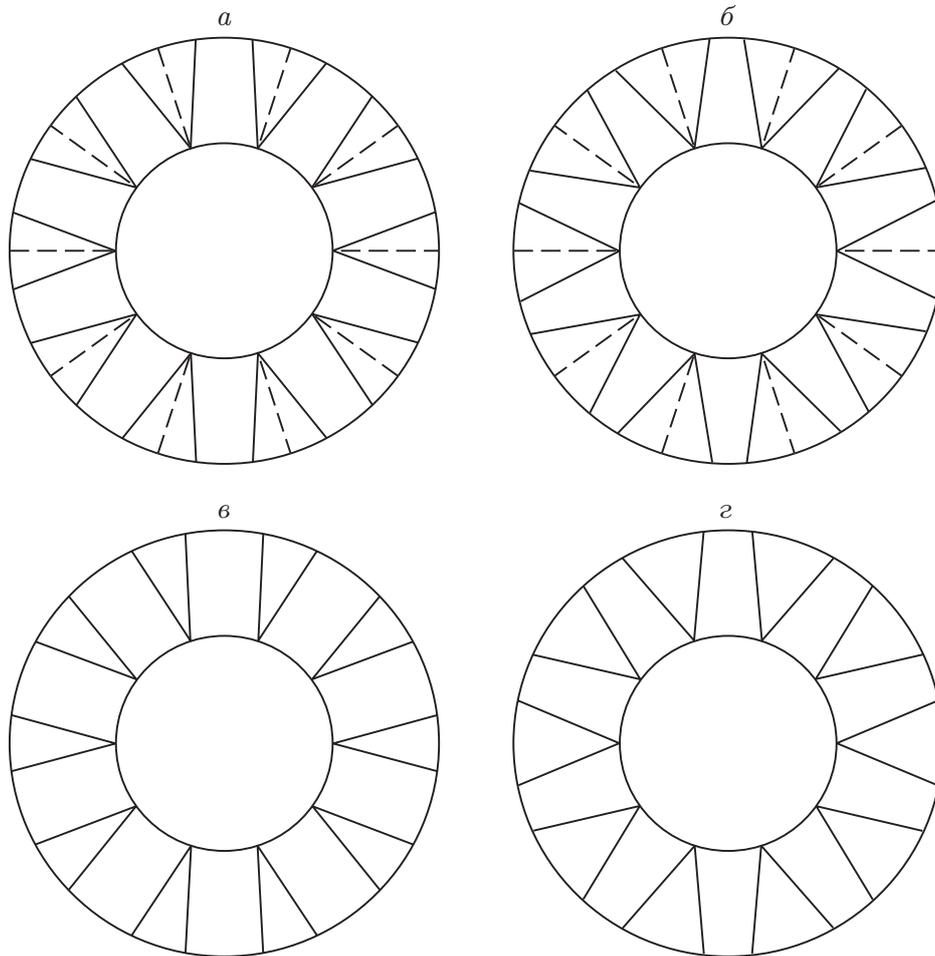


Рис. 1. Структуры РА кольцевых однородно деформируемых пластин при термосиловом нагружении в случае отсутствия теплового воздействия (a – $б$) и при нагреве ($в$):

a — упругое поведение материала связующего, $б$ — неупругое поведение (сплошные линии — $p = p_{\max}$, штриховые — $p = p_{\min}$); $в$, $г$ — упругое и неупругое поведение материала связующего ($p = 0,45$)

По описанной выше схеме проведены расчеты при упругом и неупругом поведении материала связующего, причем предполагалось, что в случае упругого поведения напряженное состояние в связующем достигает предела текучести ($\sigma_u = \sigma_T$), а в случае неупругого напряжения в арматуре достигают временного сопротивления ($\sigma_1 = \sigma_{B1}$). Оказалось, что различным значениям параметра нагружения p в (2.13) соответствуют различные проекты РА в случаях упругого и неупругого поведения материала связующего. В табл. 2 приведены наименьшие (p_{\min}) и наибольшие (p_{\max}) значения параметра p , при которых можно получить решение задачи РА с указанными особенностями напряженного состояния в фазах композиции. При этом значениям p_{\min} соответствует вырождение структуры армирования в радиальную ($\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2 = 0$) (т. е. в ограничении (2.12) имеет место знак равенства), а значениям p_{\max} соответствует предельная концентрация арматуры на внутреннем контуре r_0 (т. е. $2\omega_{01} = 1 - a$ (см. (2.9), (2.11)); в расчетах принималось $a = 0,3$, поэтому предельное значение ω_{01} равно 0,35).

На рис. 1, a , $б$ приведены структуры РА кольцевой пластины при ОД в случаях упругого и неупругого поведения материала связующего соответственно при температуре

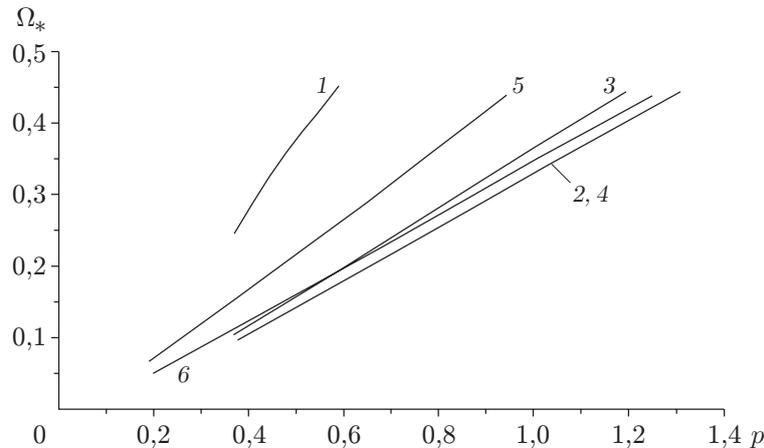


Рис. 2. Зависимость относительного объема волокон в однородно деформируемых пластинах от параметра нагружения при $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ (1, 2) и $T = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$ (3–6):

1 — упругое поведение материала связующего, 2 — неупругое поведение, 3 — упругое поведение (без учета ТСЭК), 4 — неупругое поведение (без учета ТСЭК), 5 — упругое поведение (с учетом ТСЭК), 6 — неупругое поведение (с учетом ТСЭК)

$T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($\theta = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$) (штриховыми линиями показаны структуры РА, соответствующие наименьшим значениям параметра нагружения $p = p_{\min}$, сплошными — наибольшим значениям $p = p_{\max}$).

Из табл. 2 следует, что при $\theta = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ наибольшая нагрузка, которую может выдержать конструкция со структурой РА, при неупругом поведении материала связующего в 2,26 раза больше, чем при упругом. Это объясняется тем, что в упругом проекте, как отмечено выше, напряжение в арматуре не превышает 39 % предела прочности $\sigma_{в1}$, а в неупругом равно $\sigma_{в1}$. Кроме того, из табл. 2 следует, что при $0,368 \leq p \leq 0,58$ и $\theta = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ можно получить решение задачи РА как в упругом, так и в неупругом случаях. В этом диапазоне значений p целесообразно сопоставить количество арматуры, используемой в упругом и неупругом проектах. Относительная объемная концентрация волокон Ω_* в конструкции определяется формулой

$$\Omega_* = \frac{1}{S_G} \sum_k \iint_G \omega_k dx_1 dx_2 = \frac{2}{S_G} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} \omega_k r dr d\varphi, \quad S_G = \pi(r_1^2 - r_0^2).$$

На рис. 2 приведены зависимости $\Omega_*(p)$ для упругих и неупругих проектов РА при различных значениях температуры. Кривые 1, 2 получены при $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ в упругом и неупругом случаях соответственно. Сопоставление этих кривых на интервале $0,368 \leq p \leq 0,58$ показывает, что в упругом случае общий расход арматуры в проекте РА более чем в два раза превышает ту же величину в неупругом проекте. На рис. 1, в показана структура РА, полученная при $p = 0,45$ и $\theta = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$. При таком нагружении траектории РА в упругом и неупругом проектах визуально практически не различаются, а Ω_* в упругом проекте в 2,65 раза больше, чем в неупругом.

Следует отметить, что $p_{\min} > 0$ (см. табл. 2). Однако проекты РА можно получить и при значениях $0 \leq p < p_{\min}$. Действительно, при определении p_{\min} в упругом случае предполагалось, что $\sigma_u = \sigma_T$, поэтому $p_{\min} > 0$. Если в упругом случае получена структура РА при некотором значении $p = p_0$ из интервала $p_{\min} \leq p_0 \leq p_{\max}$, то, “зафиксировав” эту структуру и варьируя p в диапазоне $0 \leq p < p_0$, получим плоскую задачу линейной теории упругости для анизотропной среды. Тогда напряженно-деформированное состояние

в фазах композиции также будет изменяться пропорционально p (в частности, напряжения в арматуре и связующем будут постоянными всюду в G и пропорциональными p). Таким образом можно получить проекты РА и при $0 \leq p < p_{\min}$, причем в них $\sigma_u < \sigma_T$. Очевидно, что при изменении p в диапазоне $0 \leq p < p_0$ целесообразно использовать упругий проект РА, соответствующий значению $p_0 = p_{\min}$, так как в этом случае общий расход арматуры наименьший (кривая 1 на рис. 2).

Исследуем влияние теплового воздействия на несущую способность рассматриваемой конструкции. Предположим, что пластина нагрета до температуры $T = 150^\circ\text{C}$ ($\theta = 130^\circ\text{C}$) и ТСЭК не учитывается, т. е. расчет будем проводить при значениях физико-механических характеристик фаз композиции, приведенных в первой строке табл. 1. Наименьшие (p_{\min}) и наибольшие (p_{\max}) значения параметра p , полученные в этом случае при упругом и неупругом поведении материала связующего, приведены в третьей и четвертой графах табл. 2. Сопоставление значений p_{\min} , p_{\max} в неупругом случае при отсутствии ($T = 20^\circ\text{C}$) и наличии ($T = 150^\circ\text{C}$) теплового воздействия показывает, что наличие температурного поля без учета ТСЭК практически не влияет на несущую способность конструкции при РА. Напротив, при упругом поведении материала связующего значение p_{\max} в термоупругом проекте ($T = 150^\circ\text{C}$) в 2,06 раза больше, чем в упругом ($T = 20^\circ\text{C}$), хотя значения p_{\min} в этих случаях одинаковы. Резкое увеличение несущей способности термоупругой конструкции при РА объясняется более полным использованием в ней несущей способности арматуры. Действительно, предельная механическая деформация ε_1^T , определяемая по формуле (2.15), при $\theta = 130^\circ\text{C}$ равна $\varepsilon_1^T = 0,905\varepsilon_{B1}$. Это означает, что напряжения в арматуре термоупругого проекта составляют 90,5 % предела прочности, т. е. в 2,32 раза больше, чем в упругой конструкции, в которой $\varepsilon_1^T = 0,39\varepsilon_{B1}$.

Зависимости $\Omega_*(p)$ в упругом и неупругом случаях при $T = 150^\circ\text{C}$ показаны на рис. 2 кривыми 3, 4 соответственно, причем кривая 4 практически совпадает с кривой 2. Кривые 3, 4 расположены ближе друг к другу, чем кривые 1, 2, полученные при $T = 20^\circ\text{C}$. Это вызвано тем, что в термоупругом случае (кривая 3) несущая способность волокон в конструкции используется более полно, чем в упругом (кривая 1).

Однако неучет ТСЭК при наличии теплового воздействия может привести к существенно завышенным или заниженным результатам расчета, так как прочностные характеристики $\sigma_{0,2}$, σ_B сплава МА2 с повышением температуры резко уменьшаются и при $T \approx 500^\circ\text{C}$ несущая способность такого материала практически равна нулю [11] (в частности, при $T = 150^\circ\text{C}$ предел текучести $\sigma_T = \sigma_{0,2}$ почти в два раза меньше, чем при $T = 20^\circ\text{C}$ (см. табл. 1)). Поэтому для случая $T = 150^\circ\text{C}$ целесообразно провести дополнительный расчет с учетом ТСЭК (значения физико-механических характеристик фаз композиции для этого случая приведены во второй строке табл. 1). Полученные при этом предельные значения параметра нагружения p_{\min} , p_{\max} приведены в пятой и шестой графах табл. 2. Сопоставление этих значений в неупругом случае при $T = 20^\circ\text{C}$ и $T = 150^\circ\text{C}$ показывает, что при наличии теплового воздействия и учете ТСЭК нижний предел нагружения p_{\min} уменьшается в 1,91 раза, а верхний предел p_{\max} уменьшается на 4,6 %, т. е. максимальная несущая способность неупругой конструкции в целом остается почти такой же, как при температуре конструкции в исходном состоянии, несмотря на резкое уменьшение прочностных характеристик связующего при повышении температуры. Это объясняется тем, что механические характеристики волокон бора в рассматриваемом диапазоне температур не зависят от T (см. табл. 1) и напряжения в арматуре как при $T = 20^\circ\text{C}$, так и при $T = 150^\circ\text{C}$ равны пределу прочности ($\sigma_1 = \sigma_{B1}$), а связующее фактически осуществляет лишь перераспределение нагрузок на элементарные волокна. Поэтому ухудшение механических характеристик связующего при повышении температуры практически не влияет на несущую способность конструкции в целом.

Сопоставление значений p_{\min} в упругом ($T = 20\text{ }^\circ\text{C}$) и термоупругом ($T = 150\text{ }^\circ\text{C}$) случаях показывает, что при нагреве (с учетом ТСЭК) нижний предел нагружения уменьшается в 1,94 раза. Верхний предел p_{\max} при нагреве увеличивается в 1,63 раза. Это объясняется тем, что несущая способность арматуры в термоупругом проекте используется более полно, чем в упругом. Действительно, несмотря на резкое уменьшение при нагреве предела текучести связующего σ_T , предельная деформация в арматуре ε_1^T (см. (2.15)) возрастает и при $\theta = 130\text{ }^\circ\text{C}$ равна $\varepsilon_1^T = 0,745\varepsilon_{B1}$, т. е. напряжение в арматуре составляет 74,5 % предела прочности σ_{B1} и в 1,91 раза больше, чем в упругом проекте. (При охлаждении рассматриваемой конструкции напряжения в арматуре уменьшаются. Так, при $T = -30\text{ }^\circ\text{C}$ ($\theta = -50\text{ }^\circ\text{C}$) и значениях физико-механических характеристик, приведенных в первой строке табл. 1, напряжения в арматуре составляют 19,1 % предела прочности, а при $\theta = -98,2\text{ }^\circ\text{C}$ напряжения в арматуре термоупругой конструкции равны нулю. В последнем случае несущая способность конструкции определяется только свойствами связующего.)

Зависимости $\Omega_*(p)$ в упругом и неупругом случаях при $T = 150\text{ }^\circ\text{C}$ с учетом ТСЭК показаны на рис. 2 кривыми 5, 6 соответственно. Эти кривые расположены ближе друг к другу, чем кривые 1, 2, полученные при $T = 20\text{ }^\circ\text{C}$, так как в термоупругом случае (кривая 5) напряжение в арматуре составляет 74,5 %, а в упругом (кривая 1) — 39 % предела прочности, в то время как в неупругих проектах напряжения в арматуре равны временному сопротивлению.

Из табл. 2 и рис. 2 следует, что при $T = 150\text{ }^\circ\text{C}$ и $0,193 \leq p \leq 0,945$ можно получить решение задачи РА в случаях как упругого, так и неупругого поведения материала связующего с учетом ТСЭК. На рис. 1, 2 показана структура армирования конструкции, полученная при $p = 0,45$ и $T = 150\text{ }^\circ\text{C}$ с учетом ТСЭК, причем траектории армирования в этом случае в термоупругом и неупругом проектах визуально практически не различаются, а общий расход арматуры в термоупругом проекте на 34,9 % больше, чем в неупругом.

Сопоставление значений p_{\min} , p_{\max} , полученных при $T = 150\text{ }^\circ\text{C}$ с учетом и без учета ТСЭК, показывает, что неучет термочувствительности приводит к увеличению наименьшего значения параметра нагружения p_{\min} почти в два раза как при упругом, так и при неупругом поведении материала связующего, а верхнего предела p_{\max} — на 26,2 % в термоупругом случае и на 4,4 % в неупругом.

Таким образом, на основе проведенного анализа можно сделать следующие выводы: использование конструкций РА при неупругом поведении материалов фаз композиции позволяет в некоторых случаях в несколько раз повысить несущую способность пластины по сравнению со случаем упругого поведения материалов всех фаз композиции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боган Ю. А., Немировский Ю. В. О распределении напряжений в упругой равнонапряженно-армированной пластине // Прикл. механика. 1976. Т. 12, № 7. С. 33–38.
2. Боган Ю. А., Немировский Ю. В. Плоская задача теории упругости для среды с двумя семействами равнонапряженной волокнистой арматуры // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 1. С. 150–159.
3. Бушманов С. Б., Немировский Ю. В. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композит. материалов. 1983. № 2. С. 278–284.
4. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О некоторых свойствах решений плоских термоупругих задач рационального армирования композитных конструкций // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 2. С. 312–321.

5. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Проектирование плоских термоупругих композитных конструкций с равнонапряженной арматурой // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 213–223.
6. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Об одной задаче целевого управления структурами армирования термоупругих плоских композитных конструкций // Механика композиц. материалов и конструкций. 1998. Т. 4, № 3. С. 9–27.
7. **Брызгалин Г. И.** К рациональному армированию анизотропных плоских тел со слабым связующим // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 4. С. 123–131.
8. **Брызгалин Г. И., Копейкин С. Д.** О многоцелевом проектировании волокнистых композитных материалов // Механика композит. материалов. 1980. № 3. С. 404–408.
9. **Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др.** Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Машгиз, 1959. Т. 3.
10. **Композиционные материалы:** Справ. Киев: Наук. думка, 1985.
11. **Лебедев А. А., Портной К. И.** Магниевые сплавы (свойства и технология): Справ. М.: Металлургиздат, 1952.
12. **Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике:** Справ. М.; Л.: Энергия, 1967.
13. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968.
14. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Равнонапряженное армирование термочувствительных неупругих плоских композитных конструкций // Пробл. прочности и пластичности. 2001. Вып. 63. С. 91–104.
15. **Джураев Т. Д.** Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.

Поступила в редакцию 27/XI 2001 г.
