

УДК 539.375

НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛА УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ В КОНЦЕВОЙ ОБЛАСТИ ФИЗИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ ЕГО БЕРЕГОВ

В. В. Глаголев, А. А. Маркин

Тульский государственный университет, 300600 Тула

E-mails: vadim@tsu.tula.ru, markin@uic.tula.ru

Предложена модель, описывающая напряженно-деформированное состояние в окрестности физического разреза при произвольном распределении внешней нагрузки по его берегам. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние материала слоя, ограниченного продолжениями берегов разреза. В результате взаимодействия слоя и внешних полуплоскостей получена замкнутая система интегродифференциальных уравнений для средних компонент напряжений в слое, которая распадается на два уравнения для нормальных средних напряжений и уравнение для среднего сдвигового напряжения. Приведены численные решения системы для случаев симметричного и антисимметричного нагружения берегов сосредоточенными силами. Рассмотрены условия перехода концевой области разреза в состояние пластичности и разрушения.

Ключевые слова: характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость, трещина, разрушение.

Введение. В механике разрушения напряженно-деформированное состояние концевой области трещины исследуется в рамках конкретных моделей трещины. Основной моделью трещиноподобного дефекта в сплошной среде является математический разрез [1–5]. Главный недостаток данного подхода — сингулярность поля напряжений в концевой точке разреза. Эта особенность поля напряжений дает возможность прогнозировать трещиностойкость конструкций в рамках модели квазихрупкого разрушения, но не позволяет определять нагрузку, соответствующую переходу материала из упругого состояния в пластическое, что является важной характеристикой процесса разрушения [6], особенно в случае циклического нагружения [7]. Вариант описания процесса докритического роста трещины нормального отрыва на основе модели математического разреза рассмотрен в работе [8]. В этом случае в модель вводятся силы сцепления между берегами разреза. Наиболее хорошо изученным является предельное состояние трещины нормального отрыва, для которого в силу симметрии задачи можно изначально задать направление взаимодействия сил сцепления. Однако нарушение симметрии в распределении внешней нагрузки не позволяет априорно задать направление сил сцепления, что приводит к возникновению ряда проблем при решении задач. Отметим подход, при котором в концевой области трещины вводится зона предразрушения [9, 10] с параметрами, определяемыми с помощью дискретно-интегрального критерия хрупкого разрушения типа критерия Нейбера — Новожилова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-97500).

© Глаголев В. В., Маркин А. А., 2012

В отличие от перечисленных выше подходов, в которых используется математический разрез, предлагаются альтернативная модель описания трещины в виде физического разреза [11–14] и дискретный подход к описанию процесса разрушения [15, 16]. Под физическим разрезом понимается разрез с предельным расстоянием между берегами, при котором отсутствует их взаимодействие. Взаимодействие материальной области, которую можно считать продолжением физического разреза, со сплошной средой моделируется силами сцепления, но в этом случае их распределение не задается априори, а определяется в процессе решения. В отличие от модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [2–4] предлагаемая модель позволяет выделить диапазон значений внешней нагрузки, соответствующий упругому деформированию концевой области [14], и вычислить значение нагрузки, при котором начинается образование зон пластичности. При этом основной проблемой является определение ширины разреза. В результате термомеханического анализа продвижения физического разреза, проведенного в работе [17], показано, что толщина слоя взаимодействия может быть найдена по формуле $\delta_0 = 2\gamma/\Delta\psi_{cr}$, где $\Delta\psi_{cr}$ — критическое значение приращения удельной (отнесенной к единице начального объема) свободной энергии; γ — поверхностная энергия на единицу площади. В [18] установлена связь толщины слоя взаимодействия с вязкостью разрушения, а также предложен метод обработки экспериментальных данных для двухконсольных балок, позволяющий находить толщину слоя взаимодействия. Показано, что значение толщины слоя находится в диапазоне $\delta_0 \approx 10^{-4} \div 10^{-6}$ м.

Корректное описание взаимодействия в концевой области слоя позволяет определить предельный переход материала слоя из упругого состояния в упругопластическое. При этом возникает вопрос, какую геометрию будет иметь кончик трещины: часть прямоугольника либо часть окружности или эллипса? В случае строгого решения задачи при одном и том же внешнем воздействии будут получены разные напряженные состояния в концевой области трещины рассматриваемой геометрии, следовательно, моменты перехода из упругого состояния в упругопластическое также будут разными. Поэтому актуальным является построение моделей, в которых форма кончика трещины не влияет на напряженное состояние в ее концевой области.

При моделировании трещины физическим разрезом и слоем толщиной δ_0 на его продолжении для определения напряженно-деформированного состояния вне слоя можно использовать методы механики сплошной среды (методы граничных интегральных уравнений, конечных элементов и т. д.). Для определения напряженно-деформированного состояния в слое предлагается использовать следствия условий равновесия, связывающие граничные и средние напряжения. Использование средних характеристик в слое предельного размера в качестве неизвестных позволяет не учитывать форму кончика трещины.

В работах [13, 14] с использованием гипотезы однородности по толщине слоя напряжений отрыва и напряжений, действующих в направлении плоскости отрыва, рассматривались постановки и решения задач типа задачи о нормальном отрыве. В данной работе предлагается общая постановка задачи в случае произвольного распределения внешней нагрузки по берегам физического разреза линейно-упругой плоскости. Задача сводится к двум интегродифференциальным уравнениям для двух средних нормальных напряжений и интегродифференциальному уравнению для среднего касательного напряжения. С использованием дискретного представления распределения средних напряжений вдоль слоя задачи сводятся к системам линейных алгебраических уравнений.

Постановка задачи. Рассмотрим нагружение берегов физического разреза в бесконечной линейно-упругой плоскости системой сосредоточенных сил (рис. 1).

Используем следующие обозначения для напряжений на границах слоя: $\sigma_{12}^+(x_2) = \sigma_{12}(\delta_0/2, x_2)$, $\sigma_{12}^-(x_2) = \sigma_{12}(-\delta_0/2, x_2)$, $\sigma_{11}^+(x_2) = \sigma_{11}(\delta_0/2, x_2)$, $\sigma_{11}^-(x_2) = \sigma_{11}(-\delta_0/2, x_2)$.

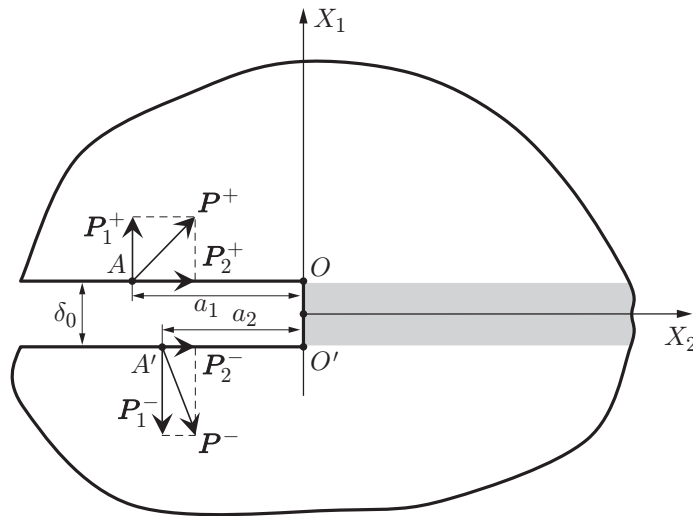


Рис. 1. Схема нагружения берегов разреза

Предполагается, что $x_2 = x$. Величины, имеющие размерность длины, отнесены к толщине слоя δ_0 , а величины, имеющие размерность напряжений, — к параметру $\beta = \pi E[2(1 - \nu^2)]$, для функций, соответствующих полуплоскостям на границе со слоем, используется верхний индекс p .

Пусть векторы напряжений на границах слоя равны и направлены противоположно векторам напряжений на сопряженных границах полуплоскостей. Тогда компоненты тензора напряжений удовлетворяют условию

$$\sigma_{12}^{(p)\pm} = \sigma_{12}^{\pm}, \quad \sigma_{11}^{(p)\pm} = \sigma_{11}^{\pm}. \quad (1)$$

Имеют место условия жесткого сцепления границ

$$\mathbf{u}^{(p)\pm} = \mathbf{u}^{\pm} \quad (2)$$

и непрерывности функции перемещения по границе слоя.

Связь между напряжениями и деформациями представим в виде закона Гука для случая плоского деформирования:

$$\varepsilon_{11} = A\sigma_{11} - B\sigma_{22}; \quad (3)$$

$$\varepsilon_{22} = A\sigma_{22} - B\sigma_{11}; \quad (4)$$

$$\sigma_{12} = C\varepsilon_{12}. \quad (5)$$

Здесь $A = \pi/2$; $B = \nu\pi/[2(1 - \nu)]$; $C = 2(1 - \nu)/\pi$; ν — коэффициент Пуассона.

Средние напряжения и деформации в слое определяем через их граничные значения:

$$\bar{\sigma}_{21}(x) = \bar{\sigma}_{12}(x) = (\sigma_{12}^-(x) + \sigma_{12}^+(x))/2; \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(x) = (\sigma_{11}^-(x) + \sigma_{11}^+(x))/2; \quad (7)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x) = u_1^+(x) - u_1^-(x); \quad (8)$$

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + \frac{\partial u_2^-}{\partial x} \right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Считаем, что в пределах слоя распределение перемещений $u_2(x)$ является линейным по координате x_1 . В этом случае

$$\frac{\partial \bar{u}_2(x)}{\partial x_1} = u_2^+(x) - u_2^-(x). \quad (11)$$

Из (10), (11) получаем выражение

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(u_2^+(x) - u_2^-(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x} \right) \right). \quad (12)$$

Запишем условия равновесия в проекциях на оси x и x_1 соответственно:

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0. \quad (14)$$

В результате интегрирования уравнений (13), (14) по толщине слоя получаем

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(x)}{\partial x} = \sigma_{12}^-(x) - \sigma_{12}^+(x); \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x)}{\partial x} = \sigma_{11}^-(x) - \sigma_{11}^+(x), \quad (16)$$

где

$$\bar{\sigma}_{21}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{21}(x, x_1) dx_1, \quad \bar{\sigma}_{22}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{22}(x, x_1) dx_1.$$

Решение задачи Фламана о распределении перемещений точек на границах верхней и нижней полуплоскостей под действием нагрузок, действующих со стороны слоя, с учетом (1), (2) представим в форме [19], удобной для последующей численной реализации:

$$u_1(x, x_1)|_{x_1=1/2} = u_1^+(x) = -P_1^+ \ln \left(\frac{x + a_1}{L + a_1} \right) + \int_0^L \sigma_{11}^+(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi; \quad (17)$$

$$u_2(x, x_1)|_{x_1=1/2} = u_2^+(x) = -P_2^+ \ln \left(\frac{x + a_1}{L + a_1} \right) + \int_0^L \sigma_{12}^+(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi; \quad (18)$$

$$u_1(x, x_1)|_{x_1=-1/2} = u_1^-(x) = P_1^- \ln \left(\frac{x + a_2}{L + a_2} \right) - \int_0^L \sigma_{11}^-(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi; \quad (19)$$

$$u_2(x, x_1)|_{x_1=-1/2} = u_2^-(x) = -P_2^- \ln \left(\frac{x + a_2}{L + a_2} \right) - \int_0^L \sigma_{12}^-(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi. \quad (20)$$

Здесь a_1, a_2 — расстояние от вершины разреза до точки приложения безразмерных сил, проекции которых равны $P_i^+ = P_r^+ / (\delta_0 \beta)$, $P_i^- = P_r^- / (\delta_0 \beta)$ соответственно; $i = r = 1, 2$; P_r^+, P_r^- — компоненты вектора силы, отнесенные к толщине образца; L — расстояние

от начала координат до точки, в которой перемещение равно нулю (данную точку будем ассоциировать с бесконечно удаленной точкой).

Вычитая из (18) уравнение (20), с учетом (11) получаем

$$\frac{\partial \bar{u}_2(x)}{\partial x_1} = -P_2^+ \ln \left(\frac{x+a_1}{L+a_1} \right) + P_2^- \ln \left(\frac{x+a_2}{L+a_2} \right) + \int_0^L (\sigma_{12}^+(\xi) + \sigma_{12}^-(\xi)) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi. \quad (21)$$

Продифференцируем (17) и (19) по x :

$$\frac{\partial u_1^+(x)}{\partial x} = -\frac{P_1^+}{x+a_1} + \int_0^L \frac{\sigma_{11}^+(\xi)}{x-\xi} d\xi; \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_1^-(x)}{\partial x} = \frac{P_1^-}{x+a_2} - \int_0^L \frac{\sigma_{11}^-(\xi)}{x-\xi} d\xi. \quad (23)$$

С учетом соотношений (21)–(23) из (12) следует интегродифференциальное уравнение для средней сдвиговой деформации в слое

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{21}(x) = & \frac{C}{4} \left(-\frac{P_1^+}{x+a_1} + \frac{P_1^-}{x+a_2} - \int_0^L \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{x-\xi} d\xi \right) + \\ & + \frac{C}{2} \left(-P_2^+ \ln \left(\frac{x+a_1}{L+a_1} \right) + P_2^- \ln \left(\frac{x+a_2}{L+a_2} \right) + 2 \int_0^L \bar{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi \right) \end{aligned} \quad (24)$$

с граничным условием

$$\bar{\sigma}_{21}|_{x=0} = q_1. \quad (25)$$

Подставляя (17), (19) в выражение (8), с учетом (7) и (3) получаем связь между средними напряжениями слоя

$$A\bar{\sigma}_{11} - B\bar{\sigma}_{22} = \left(-P_1^+ \ln \left(\frac{x+a_1}{L+a_1} \right) - P_1^- \ln \left(\frac{x+a_2}{L+a_2} \right) + 2 \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi \right). \quad (26)$$

Продифференцируем (18) и (20) по x :

$$\frac{\partial u_2^+(x)}{\partial x} = -\frac{P_2^+}{x+a_1} + \int_0^L \frac{\sigma_{12}^+(\xi)}{x-\xi} d\xi; \quad (27)$$

$$\frac{\partial u_2^-(x)}{\partial x} = -\frac{P_2^-}{x+a_2} - \int_0^L \frac{\sigma_{12}^-(\xi)}{x-\xi} d\xi. \quad (28)$$

С учетом (9), (4) из (27), (28) следует

$$A\bar{\sigma}_{22} - B\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{2} \left(-\frac{P_2^+}{x+a_1} - \frac{P_2^-}{x+a_2} + \int_0^L \frac{\sigma_{12}^+(\xi) - \sigma_{12}^-(\xi)}{x-\xi} d\xi \right). \quad (29)$$

Учитывая (15), из (29) получаем интегродифференциальное уравнение

$$A\bar{\sigma}_{22} - B\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{2} \left(-\frac{P_2^+}{x+a_1} - \frac{P_2^-}{x+a_2} - \int_0^L \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{x-\xi} d\xi \right) \quad (30)$$

с граничным условием

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x=0} = q_2. \quad (31)$$

Таким образом, уравнения (26), (30) образуют систему интегрального и интегродифференциального уравнений для средних нормальных напряжений.

В отсутствие нагрузки на торец слоя $q_1 = q_2 = 0$.

После нахождения средних напряжений из уравнений (6), (7), (15), (16) определяем граничные напряжения $\sigma_{12}^+(x)$, $\sigma_{11}^+(x)$, $\sigma_{12}^-(x)$, $\sigma_{11}^-(x)$.

При решении задачи используем численную процедуру дискретного подхода, рассмотренного в работах [13, 14]. В этом случае полагаем, что разрушение твердого тела представляет собой дискретный процесс, поэтому в пределах элемента слоя взаимодействия, имеющего длину δ_0 или единичную безразмерную длину, напряженное состояние полагается однородным.

Для построения решения задачи в рамках дискретной модели верхнюю и нижнюю границы полуплоскостей от начала координат до точки, в которой перемещение равно нулю, разобьем на n единичных элементов. Каждый элемент границы k с координатами ξ_{k-1} , ξ_k , где $k = \overline{1, n}$, характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжения в середине элемента. При этом система уравнений (6), (7), (15), (16), (26), (30) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений. Увеличивая n , получаем значения напряжений в элементах слоя. Как показывают расчеты, предлагаемый метод обеспечивает достаточно хорошую сходимость решения системы: при $n > 1000$ результат расчета отличается от результата расчета при $n = 1000$ менее чем на 0,01 %.

Рассмотрим полученную систему для двух наиболее важных для механики разрушения случаев: нормального отрыва и поперечного сдвига.

2. Нормальный отрыв. Случай нормального отрыва характеризуется граничными условиями $P_1^+ = P_1^-$, $P_2^+ = P_2^- = 0$, $a_1 = a_2$. Из уравнения (24) для слоя следует тривиальное решение $\bar{\sigma}_{21} = 0$, а из (16), (6) — решения $\sigma_{11}^+(x) = \sigma_{11}^-(x)$, $\sigma_{12}^+(x) = -\sigma_{12}^-(x)$. Таким образом, получаем систему трех интегральных и дифференциальных уравнений относительно неизвестных $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{11}$, σ_{12}^+

$$A\bar{\sigma}_{11} - B\bar{\sigma}_{22} = -2 \left(P_1^+ \ln \left(\frac{x+a_1}{L+a_1} \right) - \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{L-\xi} d\xi \right), \quad (32)$$

$$A\bar{\sigma}_{22} - B\bar{\sigma}_{11} = \int_0^L \frac{\sigma_{12}^+(\xi)}{x-\xi} d\xi, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(x)}{\partial x} = -2\sigma_{12}^+(x)$$

с граничным условием $\bar{\sigma}_{22}|_{x=0} = 0$.

Отметим, что система (32) совпадает с системой, полученной в работах [13, 14].

3. Поперечный сдвиг. В случае поперечного сдвига имеют место граничные условия $P_2^+ = -P_2^-$, $P_1^+ = P_1^- = 0$, $a_1 = a_2$. Система (24), (26), (30) преобразуется в систему вида

$$\bar{\sigma}_{21}(x) = \frac{C}{4} \left(- \int_0^L \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x - \xi} \right) + C \left(- P_2^+ \ln \left(\frac{x + a_1}{L + a_1} \right) + \int_0^L \bar{\sigma}_{21}(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi \right),$$

$$A\bar{\sigma}_{11} - B\bar{\sigma}_{22} = 2 \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x - \xi|}{L - \xi} d\xi, \quad (33)$$

$$A\bar{\sigma}_{22} - B\bar{\sigma}_{11} = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{x - \xi} d\xi,$$

которая дополняется граничными условиями (25), (31):

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x=0} = 0; \quad (34)$$

$$\bar{\sigma}_{21}|_{x=0} = 0. \quad (35)$$

Для определения остальных четырех неизвестных задачи $\sigma_{21}^+(x)$, $\sigma_{11}^+(x)$, $\sigma_{21}^-(x)$, $\sigma_{11}^-(x)$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x) &= (\sigma_{11}^-(x) + \sigma_{11}^+(x))/2, & \bar{\sigma}_{21}(x) &= (\sigma_{12}^-(x) + \sigma_{12}^+(x))/2, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}(x)}{\partial x} &= \sigma_{12}^-(x) - \sigma_{12}^+(x), & \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}(x)}{\partial x} &= \sigma_{11}^-(x) - \sigma_{11}^+(x). \end{aligned} \quad (36)$$

На рис. 2 представлено численное решение системы (33)–(36) при $n = 1000$ для первых 10 элементов. Значения напряжений отнесены к значению напряжения σ_{12}^+ на первом элементе. Для напряжений справедливы соотношения $\sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^-$, $\sigma_{11}^+ = -\sigma_{11}^-$. Как показывают расчеты, ни расстояние от вершины разреза до точки приложения внешней нагрузки, ни коэффициент Пуассона не оказывают существенного влияния на распределение напряжений (меняется только абсолютное значение напряжений на первом элементе).

Отрицательное значение напряжения σ_{11}^+ на первом элементе является следствием выполнения условия равновесия (16): на левой границе элемента выполняется условие (35), на правой границе $\bar{\sigma}_{21} > 0$, напряжения σ_{11}^+ и σ_{11}^- асимметричны. Начиная со второго элемента вследствие монотонного уменьшения напряжения σ_{12}^+ знак компоненты σ_{11}^+ меняется на противоположный.

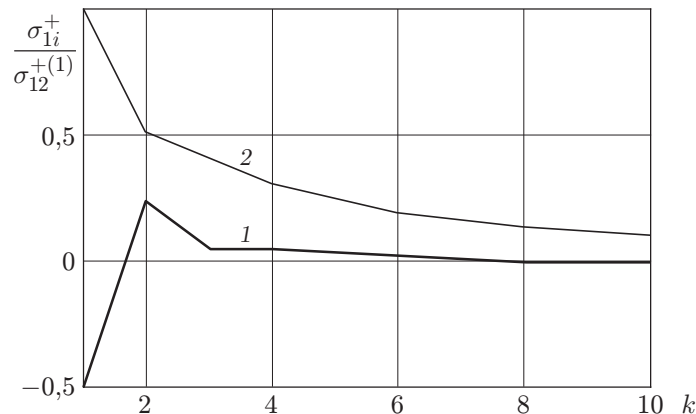


Рис. 2. Распределения напряжений σ_{11}^+ (1) и σ_{12}^+ (2) на первых 10 элементах

4. Сравнение результатов расчетов. Рассмотрим решения двух представленных задач с использованием классической модели трещины Гриффитса. Согласно [20] в случае симметрично приложенных к берегам полубесконечного математического разреза сосредоточенных сил отличными от нуля являются напряжения

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = P_1^+ \sqrt{a} / [\pi(a+r)\sqrt{r}], \quad (37)$$

а в случае поперечного сдвига —

$$\sigma_{12} = P_2^+ \sqrt{a} / [\pi(a+r)\sqrt{r}]. \quad (38)$$

Сравним средние напряжения в слое в предлагаемой модели и напряжения (37), (38) при соответствующих нагружениях берегов трещины.

На рис. 3 для нагружения типа нормального отрыва представлены результаты расчетов по формулам (37) (кривая 1) и (32) (кривые 2, 3). Результаты решения системы (32) получены в срединных точках единичных элементов. Расчет проведен при следующих значениях параметров: $P_1^+ = P_1^- = 1$, $P_2^+ = P_2^- = 0$, $a_1 = a_2 = 5$, $\nu = 0,25$. Все напряжения отнесены к значению напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ на первом элементе слоя. Из рис. 3 следует, что изменение коэффициента Пуассона ν практически не оказывает влияния на распределение напряжений $\bar{\sigma}_{11}$, а при $\nu = 0$ $\bar{\sigma}_{22} = 0$ по всей длине слоя.

В случае нагружения берегов разреза, соответствующего поперечному сдвигу, при $P_2^+ = -P_2^- = 1$, $P_1^+ = P_1^- = 0$, $a_1 = a_2 = 5$ из решения системы (33)–(35) следует, что $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = 0$ по всей длине слоя, а отличным от нуля будет только сдвиговое напряжение $\bar{\sigma}_{12}$. На рис. 4 приведены результаты расчетов напряжения $\bar{\sigma}_{12}$ и сдвигового напряжения σ_{12} (по формуле (38)).

Из рис. 3, 4 следует, что кривые, полученные с использованием модели математического разреза, расположены несколько выше кривых, построенных с помощью предлагаемой модели, однако на расстоянии от вершины разреза, составляющем 80–90 характерных единиц, результаты практически совпадают.

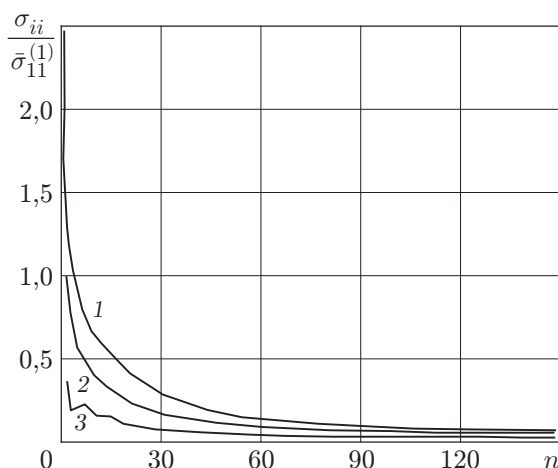


Рис. 3

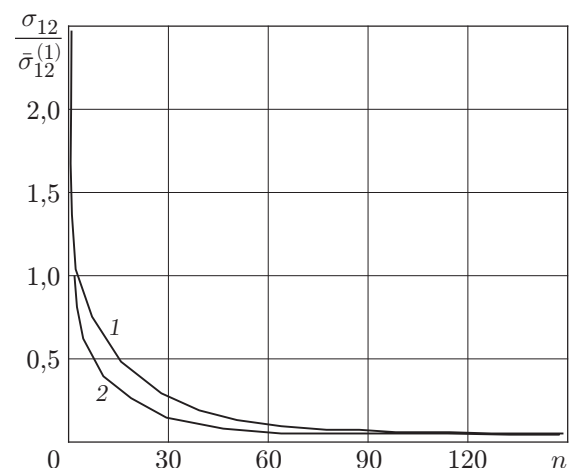


Рис. 4

Рис. 3. Распределения напряжений в окрестности вершины трещины нормального отрыва:

1 — $\sigma_{11} = \sigma_{22}$; 2 — $\bar{\sigma}_{11}$; 3 — $\bar{\sigma}_{22}$

Рис. 4. Распределения напряжений при поперечном сдвиге:

1 — σ_{12} (расчет по формуле (38)); 2 — $\bar{\sigma}_{12}$

5. Определение критических состояний. Согласно дискретной модели [16] переход из упругого состояния в пластическое или в состояние разрушения будем рассматривать для неделимого элементарного объекта — квадрата, длина стороны которого равна δ_0 . В данном материальном объеме напряженно-деформированное состояние характеризуется средними компонентами тензоров напряжений и деформаций. Переход элемента в состояние разрушения предлагается рассматривать с помощью энергетического критерия. В работах [14, 17] показано, что в рамках дискретного подхода при разрушении свободная энергия элемента слоя переходит в поверхностную энергию. Таким образом, необходимым условием разрушения квадратного элемента с длиной стороны δ_0 является достижение удельной свободной энергией критического значения, равного удвоенной поверхностной энергии.

В отличие от модели Леонова — Панасюка — Дагдейла предлагаемая модель позволяет установить момент перехода концевой элемента слоя из упругого состояния в пластическое. В частности, в случае нормального отрыва ($P_1^+ = P_1^- = 1$, $P_2^+ = P_2^- = 0$, $a_1 = a_2 = 5$) получены следующие значения отличных от нуля средних напряжений первого элемента: $\bar{\sigma}_{11} = 0,216$, $\bar{\sigma}_{22} = 0,057$. В случае поперечного сдвига ($P_2^+ = -P_2^- = 1$, $P_1^+ = P_1^- = 0$, $a_1 = a_2 = 5$) отличной от нуля компонентой является $\bar{\sigma}_{21} = 0,186$. Если в качестве критерия перехода в состояние пластичности использовать критерий Треска, то при нормальном отрыве главное касательное напряжение будет определяться значением $\tau_{\max} = (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})/2 = 0,08$, а при сдвиге — значением $\tau_{\max} = \bar{\sigma}_{21} = 0,186$. Следовательно, в случае поперечного сдвига пластическое деформирование первого элемента произойдет быстрее.

В случае плоской деформации момент разрушения определяет свободная энергия линейно-упругого элемента

$$\bar{\Psi} = (\bar{\sigma}_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\sigma}_{22}\bar{\varepsilon}_{22} + 2\bar{\sigma}_{21}\bar{\varepsilon}_{21})/2.$$

В безразмерном виде с учетом связей (3)–(5) выражение для свободной энергии принимает вид

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{4}\pi(\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2) - \frac{1}{2}\frac{\nu\pi\bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22}}{1-\nu} + \frac{1}{2}\frac{\nu\pi\bar{\sigma}_{21}}{1-\nu}. \quad (39)$$

Таким образом, в случае нормального отрыва из (39) получаем $\bar{\Psi}_1 = 0,033$, а в случае поперечного сдвига — $\bar{\Psi}_2 = 0,090$. Так как $\bar{\Psi}_1 < \bar{\Psi}_2$, то в случае поперечного сдвига хрупкое разрушение произойдет быстрее, чем хрупкое разрушение нормального отрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ивлев Д. Д.** О теории трещин квазихрупкого разрушения // ПМТФ. 1967. № 6. С. 88–128.
2. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
4. **Черных К. Ф.** Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996.
5. **Справочник** по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1.
6. **Клевцов Г. В., Ботвина Л. Р.** Микро- и макрозона пластической деформации как критерии предельного состояния материала при разрушении // Пробл. прочности. 1984. № 4. С. 24–28.
7. **Новожилов В. В., Рыбакина О. В.** О перспективах построения критерия прочности при сложном нагружении // Прочность при малом числе циклов нагружения. М.: Наука, 1969. С. 71–80.

8. **Лавит И. М.** Рост трещины в условиях квазихрупкого разрушения при монотонно возрастающей и циклической нагрузках // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 2. С. 109–120.
9. **Корнев В. М.** Распределение напряжений и раскрытие трещин в зоне предразрушения (подход Нейбера — Новожилова) // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, № 3. С. 53–62.
10. **Корнев В. М., Кургузов В. Д.** Многопараметрический достаточный критерий квазихрупкой прочности для сложного напряженного состояния // Физ. мезомеханика. 2006. Т. 9, № 5. С. 43–52.
11. **Макклиток Ф.** Пластические аспекты разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
12. **Googier J. N., Kanninen M.** Crack propagation in a continuum model with nonlinear atomic separation law: Tech. Rep. / Stanford Univ.; N 165. Stanford, 1966.
13. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** О распространении тонких пластических зон в окрестности трещины нормального отрыва // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 206–217.
14. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Модели процесса деформирования и разделения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 2. С. 148–157.
15. **Андреев А. Н.** Механика — от дискретного к сплошному / А. Н. Андреев, С. В. Астафуров, Е. В. Ворожцов и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
16. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. № 2. С. 212–222.
17. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Определение термомеханических характеристик процесса разделения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 101–112.
18. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Оценка толщины слоя взаимодействия как универсального параметра материала // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 5. С. 177–186.
19. **Крауч С.** Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. М.: Мир, 1987.
20. **Слепян Л. И.** Механика трещин. 2-е изд., перераб. и доп. Л.: Судостроение, 1990.

*Поступила в редакцию 6/VI 2011 г.,
в окончательном варианте — 21/XII 2011 г.*
