

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

А.Ф. Мاستрюков, Б.Г. Михайленко

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6, Россия*

Представлен спектральный метод решения двумерных уравнений Максвелла в анизотропных средах с релаксацией электромагнитных параметров. Метод основан на разложении решения уравнений по функциям Лагерра во временной области.

Операция свертки функций сводится к сумме произведений гармоник. Уравнения Максвелла переходят в систему линейных алгебраических уравнений для гармоник решения. Матрица системы уравнений не зависит от номера гармоники, она одна и та же для всех гармоник. Это применяется для упрощения численного алгоритма и повышения эффективности решения задачи.

В алгоритме используется внутренний параметр преобразования Лагерра. Большие значения этого параметра сдвигают решение в область высоких гармоник, формально это соответствует лучевому приближению.

Показано, что метод Лагерра сравним с конечно-разностным методом высокого порядка точности.

Метод устойчив как в волновой области распространения поля, где проводимость близка к нулю и где спектральный метод Фурье неустойчив, так и в диффузной области распространения поля, где проводимость велика и явный конечно-разностный метод требует очень малого шага по времени.

Уравнения Максвелла, электромагнитные волны, анизотропный, время релаксации, проводимость, диэлектрическая проницаемость, метод Лагерра, конечно-разностный метод, система линейных уравнений.

NUMERICAL SOLUTION OF MAXWELL'S EQUATIONS FOR ANISOTROPIC MEDIA USING THE LAGUERRE TRANSFORM

A.F. Mastryukov and B.G. Mikhailenko

We apply the spectral Laguerre transform in the time domain to solve 2D Maxwell's equations for propagation of electromagnetic waves in lossy anisotropic media. The new algorithm is simple and efficient as Maxwell's equations are reduced to a harmonic series of linear algebraic equations where the matrix is independent of the harmonic order and is the same for all harmonics.

The efficiency of the algorithm is improved by fitting a specially introduced free parameter of the Laguerre transform. If it is large, the solution spectrum shifts toward higher harmonics, which is formally equivalent to the case of ray approximation.

The Laguerre solution is comparable with high-order accurate finite-difference time-domain (FDTD) solutions. The method is stable both in the region of the wavefield, where conductivity approaches zero and the spectral Fourier method is unstable, and in the high-conductivity region, where the explicit FDTD code requires a too small time step.

Maxwell's equations, electromagnetic waves, anisotropic media, relaxation time, conductivity, dielectric permittivity, Laguerre transform, finite-difference time-domain method, linear equation system

ВВЕДЕНИЕ

Известно [Электроразведка, 1980; Физические свойства..., 1984], что существует много веществ, электрические свойства которых зависят от направления распространения и поляризации волн, например, лед, кварц, гипс, кальцит. К анизотропным средам относятся осадочные породы, где проводимость вдоль пласта отличается от проводимости вкrest напластованию. Коэффициент анизотропии здесь может достигать величины 30—40 %. Для некоторых минералов расхождение значений диэлектрической проницаемости по разным кристаллографическим направлениям составляет 30 %.

Анизотропные свойства вещества описываются симметричными тензорами диэлектрической проницаемости и проводимости. Это тензоры второго ранга и в общем случае имеют шесть независимых компонент. Можно перейти в систему координат, где эти оба тензора имеют диагональный вид и задаются только тремя независимыми компонентами каждый. Для одноосных кристаллов, таких как лед и кварц, две из трех компонент совпадают, и здесь тензор задается только двумя компонентами.

Как диэлектрическая проницаемость, так и проводимость среды являются инерционными величинами, и их значения зависят от времени. Поляризация среды и ток проводимости обуславливаются различными физическими механизмами. Соответственно времена инерции, релаксации для них могут быть существенно различными. Число физических механизмов может достигать нескольких десятков, а

времена релаксации различаться на несколько порядков. Для соленой воды времена релаксации для разных физических механизмов возникновения тока проводимости меняются от 10^{-9} с до сотен минут. Поэтому для осадочных пород учет инерционности необходим уже с частот, начиная с 1 Гц. Для частот выше 100 КГц существенны инерционные свойства минералов.

Электромагнитные волны такого диапазона применяются в разведочной геофизике для зондирования ионосферы, верхних слоев поверхности Земли, в системах космического мониторинга поверхности Земли, в системах экологического контроля окружающей среды [Кашкин, Сухинин, 2001].

Существуют разные математические модели представления релаксационных процессов [Turner, Siggins, 1994]. Используют дифференциальные и интегральные формы представления, где для задания параметров среды вводятся дополнительные переменные, которые задаются в виде дифференциальных или интегральных уравнений соответственно. Система уравнений для сред с релаксацией может быть системой чисто дифференциальных уравнений и системой интегродифференциальных уравнений. Для описания каждого компонента тензора и каждого релаксационного процесса система уравнений Максвелла дополняется одним уравнением. В конечном итоге такая система может состоять из десятков уравнений.

Конечно-разностный метод решения такой системы уравнений широко используется [Carcione, 1996; Bergmann et al., 1999], но имеет ряд ограничений. В первую очередь, это ограничение на величину шага разностной сетки по времени. При диффузионном характере распространения поля и для сред с сильно изменяющимися в пространстве электромагнитными параметрами, каким является проводимость, это ведет к большим вычислительным затратам. При решении смешанного интегродифференциального уравнения с использованием явных разностных схем приходится интеграл аппроксимировать суммой, что ведет к увеличению размерности задачи.

В частотной области с использованием преобразования Фурье по времени эти проблемы преодолеваются введением комплексных параметров среды. После применения преобразования Фурье по времени и аппроксимации пространственных производных, например, конечно-разностным методом либо методом конечных элементов задача сводится к системе алгебраических уравнений большой размерности. Так как матрица этой системы зависит от частоты, то при решении системы матрицу нужно трансформировать для каждой частоты, что представляет чрезвычайно трудоемкую процедуру.

В работах [Конюх, Михайленко, 1998; Mikhailenko et al., 2003] для решения волнового уравнения и задач сейсмоки с релаксацией упругих параметров среды был предложен метод, основанный на разложении решения по полиномам Лагерра во временной области. Эффективность метода обусловлена тем, что у получающейся после преобразования системы уравнений для гармоник Лагерра левая часть системы не зависит от номера гармоники, а меняется только правая часть этой системы. Это свойство преобразования позволяет строить эффективные численные алгоритмы.

В настоящей работе метод, основанный на разложении Лагерра, предлагается для решения двумерных уравнений Максвелла в анизотропных и релаксационных средах. Этот метод для таких задач устойчив и достаточно эффективен. Ранее этот метод использовался для решения как одномерных [Мастрюков, Михайленко, 2003], так и двумерных [Мастрюков, Михайленко, 2006] уравнений Максвелла в изотропных средах с релаксацией электромагнитных параметров среды.

По времени проводится преобразование Лагерра, пространственные производные аппроксимируются конечными разностями высокого порядка точности. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для гармоник Лагерра. Для ее решения использовался итерационный метод решения. Точность метода иллюстрируется сравнением численного решения с точным и решением явным конечно-разностным методом.

Эффективность метода достигается за счет введения дополнительного параметра в формулу для преобразования Лагерра. Большие значения этого параметра сдвигают спектр решения в область высоких гармоник, где применимо приближение геометрической оптики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид [Ландау, Лифшиц, 1982]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_s, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

где \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{D} — электрическая индукция, \mathbf{J} — ток проводимости, \mathbf{J}_s — ток внешнего источника, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ — магнитная индукция.

Будем полагать, что магнитная проницаемость μ изотропна и постоянна во времени, а релаксационные свойства среды задаются зависимостью от времени тензоров диэлектрической проницаемости

ε и проводимости σ . Связь электрической индукции и тока проводимости с напряженностью электрического поля выражается соотношениями [Bergmann et al., 1999]

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} * \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} * \mathbf{E},$$

где знак $*$ означает свертку.

Для большого числа реальных сред одновременно присутствуют разные механизмы релаксации, которые в сумме обуславливают поляризацию или ток проводимости. Поэтому зависимость от времени диэлектрической проницаемости задается в виде суммы релаксационных функций

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_s \left(1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) \right) H(t), \quad (3)$$

где ε_s — статическое значение диэлектрической проницаемости, τ_{El} — время релаксации напряженности электрического поля, τ_{Dl} — время релаксации электрической индукции, L — число механизмов релаксации. Здесь каждый механизм характеризуется двумя временами релаксации $\tau_{Dl} \cdot \tau_{El}$.

Зависимость от времени проводимости среды бралась в виде

$$\sigma(t) = \sigma_s (H(t) + \tau_\sigma \delta(t)), \quad (4)$$

где σ_s — статическое значение проводимости, τ_σ — время релаксации проводимости, характеризующее сдвиг проводимости по фазе, $H(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, $\delta(t)$ — дельта-функция. Здесь ε_s и σ_s , а также все времена τ_{Dl} , τ_{El} , τ_σ являются тензорами второго ранга. Каждая компонента тензоров диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(t)$ и проводимости $\sigma_{ij}(t)$ характеризуется своими статическими значениями ε_{sij} и σ_{sij} , и соответственно своими временами релаксации τ_{Dlij} , $\tau_{El ij}$, $\tau_{\sigma ij}$. Поскольку индексы ij у этих величин совпадают, они опущены для простоты вида формул.

При таком определении $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ выражения для тока смещения и тока проводимости имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_s \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon_s \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\tau_{Dl}} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \mathbf{E} + \varepsilon_s \sum_{l=1}^L \mathbf{m}_l,$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} * \mathbf{E} = \sigma_s \left(\mathbf{E} + \tau_\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

где

$$\mathbf{m}_l = -\frac{1}{L} \left(\frac{1}{\tau_{Dl}^2} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) H(t) \right) * \mathbf{E}.$$

Выбор модели для $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ в виде (3) и (4) существенно важен для конечно-разностного метода решения, поскольку он приводит к удобному для численной реализации виду. Для решения с использованием разложения Лагерра вид зависимости от времени $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ не важен. В этом случае выражения (2) для свертки двух функций сводятся к простой сумме произведений гармоник Лагерра от этих функций [Мастрюков, Михайленко, 2003].

Будем считать, что тензоры ε и σ имеют диагональный вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

В двумерном случае уравнения Максвелла расщепляются на две системы уравнений. Уравнение для поперечно-магнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_{11}^e \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_{11}^e E_x + \varepsilon_{s11} \sum_{l=1}^L m_{l11} + J_x,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_{33}^e \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_{33}^e E_z + \varepsilon_{s33} \sum_{l=1}^L m_{l33} + J_z,$$

$$\frac{\partial m_{11}}{\partial t} = - \left(\frac{m_{11}}{\tau_{Dl11}} + \frac{1}{\tau_{Dl11}^2} \left(1 - \frac{\tau_{El11}}{\tau_{Dl11}} \right) \right) E_x,$$

$$\frac{\partial m_{33}}{\partial t} = - \left(\frac{m_{33}}{\tau_{Dl33}} + \frac{1}{\tau_{Dl33}^2} \left(1 - \frac{\tau_{El33}}{\tau_{Dl33}} \right) \right) E_z.$$

Здесь введены эффективные значения диэлектрической проницаемости ε^e и проводимости σ^e

$$\varepsilon_{ii}^e = \varepsilon_{sii} \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{Elil}}{\tau_{Dlil}} \right) + \sigma_{sii} \tau_{\sigma ii},$$

$$\sigma_{ii}^e = \sigma_{sii} + \varepsilon_{sii} \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\tau_{Dlil}} \left(1 - \frac{\tau_{Elil}}{\tau_{Dlil}} \right) \right),$$

J_x, J_z — x, z - компоненты внешнего источника.

В дальнейшем, для простоты, будем полагать, что есть только один механизм релаксации, $L = 1$, и потому будем опускать индекс l в уравнениях.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАГЕРРА

Будем использовать преобразование Лагерра в форме [Конюх, Михайленко, 1998]

$$\phi_n = \int_0^\infty \phi(t) (ht)^{\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (6)$$

$$\phi(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n l_n^\alpha(ht), \quad (7)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра степени n :

$$\int_0^\infty l_n^\alpha(ht) l_m^\alpha(ht) d(ht) = \delta_{nm} \frac{(n+\alpha)!}{n!},$$

α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра.

Преобразование производной от функции выражается формулой, в которой явно не содержится номер гармоники

$$\Lambda_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{h}{2} \phi_n + \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k, \quad \Lambda_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{h}{2} \phi_0, \quad \Lambda_n(\phi) = \phi_n,$$

$$\Lambda_n \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = \frac{h^2}{4} \phi_n + h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k + h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{k-1} \phi_p, \quad \Lambda_0 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = \frac{h^2}{4} \phi_0.$$

Именно это свойство преобразования позволяет строить эффективные численные алгоритмы решения для широкого класса дифференциальных уравнений.

Ортогональные функции Лагерра связаны с решением следующего дифференциального уравнения [Справочник..., 1979]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{2n+\alpha+1}{2x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4} \right) y = 0, \quad (8)$$

где $y = x^{\frac{1}{2}} l_n^\alpha(x)$, $x = ht$.

Функция $I_n^\alpha(x)$ — это осциллирующая функция, имеющая $n + 1$ нулей, в том числе в точке $x = 0$ и при $x \rightarrow \infty$. Расстояние между нулями функции растет с ростом аргумента функции x и с ростом параметра α .

Хотя $I_n^\alpha(x)$ определена на промежутке $[0, \infty]$, по существу она является конечной величиной только на промежутке от 0 до $x_k = 2(2n + \alpha + 1)$. В этой области ортогональные функции Лагерра имеют вид

$$I_n^\alpha = a_n^\alpha x^{\frac{1}{2}} \exp(-x/2), \quad a_n^\alpha = \text{const} \quad (9)$$

и потому здесь они экспоненциально малы. Исходя из этого и вида уравнения (8), можно сделать некоторые заключения о спектре Лагерра.

Если функция $\phi(x)$ на промежутке $[0, x_a]$ равна нулю, то в ее спектре Лагерра гармоники с номерами меньше чем $(x_a/2 - \alpha - 1)/2$ должны быть экспоненциально малы. Число гармоник Лагерра, необходимых для аппроксимации функции в виде ряда (15) в точке x_b , должно быть больше чем $(x_b/2 - \alpha - 1)/2$.

Если функция ненулевая только в промежутке $[x_a, x_b]$, то номера гармоник спектра удовлетворяют условию

$$\left(\frac{x_a}{2} - \alpha - 1\right)/2 < n < \left(\frac{x_b}{2} - \alpha - 1\right)/2. \quad (10)$$

Если в это выражение подставить значения $x_a = ht_a, x_b = ht_b$, то видно, что спектр движется во времени в сторону больших n . В то же время большие значения параметра h также сдвигают спектр в область высоких гармоник. Как известно [Ландау, Лифшиц, 1982], для гармоник Фурье в высокочастотной области применимо лучевое приближение.

Получим аналог лучевого приближения для гармоник Лагерра, удовлетворяющих условию (10), в рамках волнового уравнения. Уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению в случае однородной и изотропной среды. Для любой компоненты вектора электрического поля можно, опуская индексы, записать

$$\Delta E = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Проведем преобразование Лагерра этого уравнения

$$\Delta \mathbf{E}_n = \mu\epsilon \left(\frac{h^2}{4} \mathbf{E}_n + h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_k + h^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{k-1} \mathbf{E}_p \right) - \mu\sigma \left(\frac{h}{2} \mathbf{E}_n + h \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}_k \right).$$

Произведем замену $E_n = V_n \exp(h\psi/2)$ и соберем члены с одинаковыми степенями h . Получим два уравнения при первой и второй степенях h

$$\begin{aligned} \text{div} (V_n^2 \nabla \psi) &= 2\mu\sigma V_n \left(\frac{V_n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} V_k \right), \\ V_n (\nabla \psi)^2 &= 4\mu\epsilon \left(\frac{V_n}{4} + \sum_{k=0}^{n-1} V_k + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{k-1} V_p \right). \end{aligned}$$

Поскольку эти уравнения должны выполняться для любого n из промежутка (10), то должно выполняться соотношение

$$(\nabla \psi)^2 = \mu\epsilon \quad (11)$$

и тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_k + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{k-1} V_p = 0.$$

Отсюда следует, что амплитуда каждой гармоники является комбинацией младших гармоник

$$V_{n-1} = - \sum_{k=0}^{n-2} (n-k) V_k. \quad (12)$$

Уравнение для ψ — это классическое уравнение эйконала, основное уравнение геометрической оптики. Решение уравнения эйконала в однородной среде имеет вид $\psi = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$. Представим поле E в виде ряда (7), используя это выражение для ψ , и формулу (9) для асимптотики функции I_n^α . Для значения параметра $\alpha = 1$, при котором проводились приведенные в работе расчеты, получим

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} V_n a_n^\alpha \exp\left(\frac{h}{2}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - t)\right).$$

Здесь поле представляет сумму бегущих гармоник Лагерра, движущихся с одинаковой фазовой скоростью, равной $1/|q|$, независимо от „частоты“ гармоник.

Подобное „лучевое“ приближение можно получить и для случая анизотропной среды, но тогда выражения становятся существенно более громоздкими.

Для численного решения важны именно большие значения параметра h и эти выражения дают физическую интерпретацию решения при этих значениях.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Применим преобразование (6) к системе уравнений (5). В результате получим следующую систему уравнений для n -й гармоники электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{nz}}{\partial z} - \frac{\partial E_{nx}}{\partial x} &= \mu \left(\frac{h}{2} H_{ny} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{ky} \right), \\ -\frac{\partial H_{ny}}{\partial z} &= \varepsilon_{11}^e \left(\frac{h}{2} E_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kx} \right) + \sigma_{11}^e E_{nx} + \varepsilon_{s11} m_{n11} + J_{nx}, \\ \frac{\partial H_{ny}}{\partial x} &= \varepsilon_{33}^e \left(\frac{h}{2} E_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kz} \right) + \sigma_{33}^e E_{nz} + \varepsilon_{s33} m_{n33} + J_z, \\ m_{n11} &= -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_{D11})} \left(h \sum_{k=0}^{n-1} m_{k11} + \frac{1}{\tau_{D11}^2} \left(1 - \frac{\tau_{E11}}{\tau_{D11}} \right) E_{nx} \right), \\ m_{n33} &= -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_{D33})} \left(h \sum_{k=0}^{n-1} m_{k33} + \frac{1}{\tau_{D33}^2} \left(1 - \frac{\tau_{E33}}{\tau_{D33}} \right) E_{nz} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Если представить эту систему уравнений для n -й гармоники в операторном виде $A\mathbf{u}_n = \mathbf{b}_n$, где A — оператор, \mathbf{u}_n — n -я гармоника решения, то младшие гармоники будут входить только в правую часть \mathbf{b}_n , а оператор A не будет зависеть от номера гармоники и будет один и тот же для всех гармоник.

Будем искать решение (13) в прямоугольной области x, z на равномерной разностной сетке. Для достижения высокой точности аппроксимации уравнений разностную схему необходимо правильно центрировать. Для этого величину H_y определим в четных точках сетки по x и четных точках сетки по z , величину E_x определим в четных точках сетки по x и нечетных точках по z , величину E_z определим в нечетных точках по x и четных точках по z . Это сетка типа „staggered“, она позволяет аппроксимировать уравнения с высоким порядком точности по шагу сетки. Она взята из статьи [Fornberg, Ghrist, 1999], где она подробно описана. Из этой же работы взяты шаблон и формулы аппроксимации пространственных производных.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (13) сводится к системе алгебраических уравнений $Au = b$, где A является матрицей, а u есть вектор, компонентами которого являются значения решения в точках разностной сетки (здесь опущены индексы номера гармоник у u_n и b_n). Матрица A является сильно разреженной ленточной матрицей, поэтому здесь непригодны прямые методы решения алгебраических уравнений, и надо обращаться к итерационным методам. В качестве такового использовался вариант метода сопряженных градиентов из работы [Paige, Saunders, 1982], основанный на процедуре двух диагонализаций.

Для повышения эффективности метода сопряженных градиентов использовался свободный параметр h преобразования Лагерра (6), который можно менять произвольно. Поскольку h является внутренним параметром преобразования Лагерра, то в общем случае он может быть любой положительной величиной. При численном решении происходит потеря точности решения при очень больших значениях ($h \geq 10^4$), и очень малых значениях ($h \leq 10^{-2}$). Но относительно большие значения h делают алгоритм более эффективным.

В матрицу A этот параметр входит только в элементы, стоящие на главной диагонали. При описанной выше разностной схеме величины, отвечающие за аппроксимацию пространственных производных, в матрице A находятся вне главной диагонали. Большие значения h означают преобладание диагональных элементов над внедиагональными, т. е. над пространственными производными. Физически это соответствует малости дифракции и лучевому приближению.

Математически преобладание диагональных элементов матрицы способствует понижению числа обусловленности [Голуб, Ван Лоун, 1999] матрицы A и соответственно повышению скорости сходимости метода сопряженных градиентов [Фаддеев, Фаддеева, 1963].

Поскольку матрица A не зависит от номера гармоники, значение параметра h подбирается очень просто. Его достаточно выбрать больше обратной величины пространственного шага разностной сетки. Чем больше h , тем меньше число обусловленности.

Решение, полученное с помощью разложения Лагерра, сравнивалось с решением, полученным конечно-разностным методом. В этом случае система уравнений (5) заменой переменных сводилась к системе уравнений волнового типа

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= f(t, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} = (H_y, m_{11} \exp(t/\tau_{D11}), m_{33} \exp(t/\tau_{D33})), \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= g(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{v} = (E_x \exp(\sigma_{11}t/\varepsilon_{11}), E_z \exp(\sigma_{33}t/\varepsilon_{33})). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь пространственные производные находятся в правых частях и уравнения записаны в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

Запись в таком виде [Ghrist et al., 2000] позволяет строить разностные схемы высокого порядка точности по времени как обычно это делается для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разностные производные удается правильно центрировать, и погрешности решения здесь минимальны.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Численные расчеты проводились для частот электромагнитного поля от 100 МГц до 1 ГГц. Эти частоты характерны для радаров, используемых для исследования поверхностных слоев Земли.

Источник тока брался в виде

$$\begin{aligned} J_x &= f(t) \delta(z - z_s), \\ f(t) &= J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \end{aligned} \quad (15)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника.

На границах области решения задавались поглощающие граничные условия, исключающие образование отраженной от границ волны. Производные по пространству аппроксимировались с 4-м порядком точности [Fornberg, Ghrist, 1999].

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением вида

$$D(t) = \frac{\int_0^\infty |H_y(z, t) - H_{0y}(z, t)| dz}{\int_0^\infty |H_{0y}(z, t)| dz}, \quad (16)$$

здесь H_y — решение, полученное численно, H_{0y} — точное решение уравнений.

На рис. 1 показано распространение плоской волны (H_y — компоненты поля) в однородной среде, рассчитанное с использованием разложения Лагерра (а), явным конечно-разностным методом 3-го порядка точности по времени (б) и явным конечно-разностным методом 2-го порядка точности по времени (в).

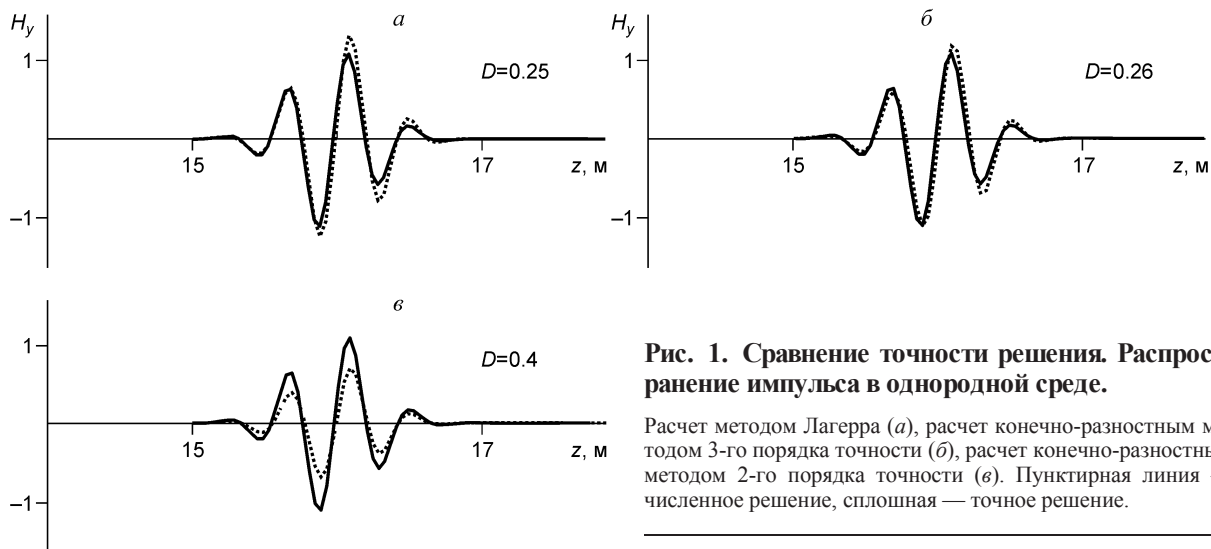


Рис. 1. Сравнение точности решения. Распространение импульса в однородной среде.

Расчет методом Лагерра (а), расчет конечно-разностным методом 3-го порядка точности (б), расчет конечно-разностным методом 2-го порядка точности (в). Пунктирная линия — численное решение, сплошная — точное решение.

Среда имеет следующие параметры [Carcione, 1996]: $\varepsilon_{s11} = 15\varepsilon_0$, $\varepsilon_{s33} = 10\varepsilon_0$, $\sigma_{s11} = 0.001$ См/м, $\sigma_{s33} = 0.003$ См/м, $\tau_{D11} = 0.163$ нс, $\tau_{E11} = 0.155$ нс, $\tau_{D33} = 0.257$ нс, $\tau_{E33} = 0.098$ нс, $\tau_{\sigma11} = 0$, $\tau_{\sigma33} = 0$, ε_0 и μ_0 — значения диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости вакуума соответственно.

Сплошная линия соответствует точному решению, штриховая — численному решению. Указана величина погрешности D . Частота источника f_0 составляла 200 МГц. В преобразовании Лагерра использовались 560 гармоник, параметр $\alpha = 1$. Число точек разностной схемы на длину волны бралось равным восьми. Это предельно малое число точек, но оно выбрано умышленно, чтобы наиболее выразительно была видна точность разных методов решения.

Параметр $h = 100$ в этом и во всех других приведенных здесь расчетах.

На рис. 1 показано решение после пробега импульсом расстояния примерно 50 длин волн. На такой длине пробега погрешность решения D методом Лагерра имеет такую же точность, как и разностный метод решения, где использовалась численная схема 3-го порядка точности по времени. Точность решения разностным методом, использующим схему 2-го порядка точности по времени (см. рис. 1, в) ниже, чем в методе Лагерра в 1.5 раза.

Здесь, во всех трех случаях (а) — (в) использовался 4-й порядок аппроксимации пространственных производных. Но если вместо этого использовать 6-й или 8-й порядок аппроксимации, то точность решения методом Лагерра (а) и разностным методом 3-го порядка (б) повышалась в 2 раза, а в случае решения разностным методом 2-го порядка (в) практически не менялось. Это означает, что здесь основной вклад в погрешность решения вносят погрешности аппроксимации по времени, а не по пространству. Шаг по времени в разностных схемах составлял $0.8\tau_c$, где τ_c — верхняя граница устойчивости алгоритма.

Во всех расчетах точность метода Лагерра сравнима с точностью разностного метода 3-го порядка и превосходит точность разностного метода 2-го порядка.

На рис. 2 показаны спектральные характеристики решения методом Лагерра, приведенного на рис. 1, а. На верхнем графике показан спектр источника тока. На следующих графиках последовательно (а) — (в) показан спектр магнитного поля на расстоянии 5, 15 и 30 длин волн от источника соответственно.

Спектр магнитного поля движется вдоль оси n . Это движение, в соответствии с соотношением (8), пропорционально времени и движению импульса по координате z . Импульсу, бегущему по координате z , соответствует бегущий „импульс“ спектра в пространстве номеров n . Если спектр источника находится в промежутке $[0, 100]$ гармоник, то после пробега 30 длин волн спектр смещается в промежуток $[200, 300]$ гармоник. При движении происходит уширение спектра из-за дифракционного распыливания импульса и падение амплитуд спектра из-за поглощения.

Спектр характерен наличием приблизительно одного числа положительных и отрицательных амплитуд. Согласно формуле (12), при большом значении параметра h амплитуда каждой гармоники представляет комбинацию амплитуд младших гармоник.

Вычисление амплитуд по этой формуле дает относительно хорошее совпадение с численными результатами.

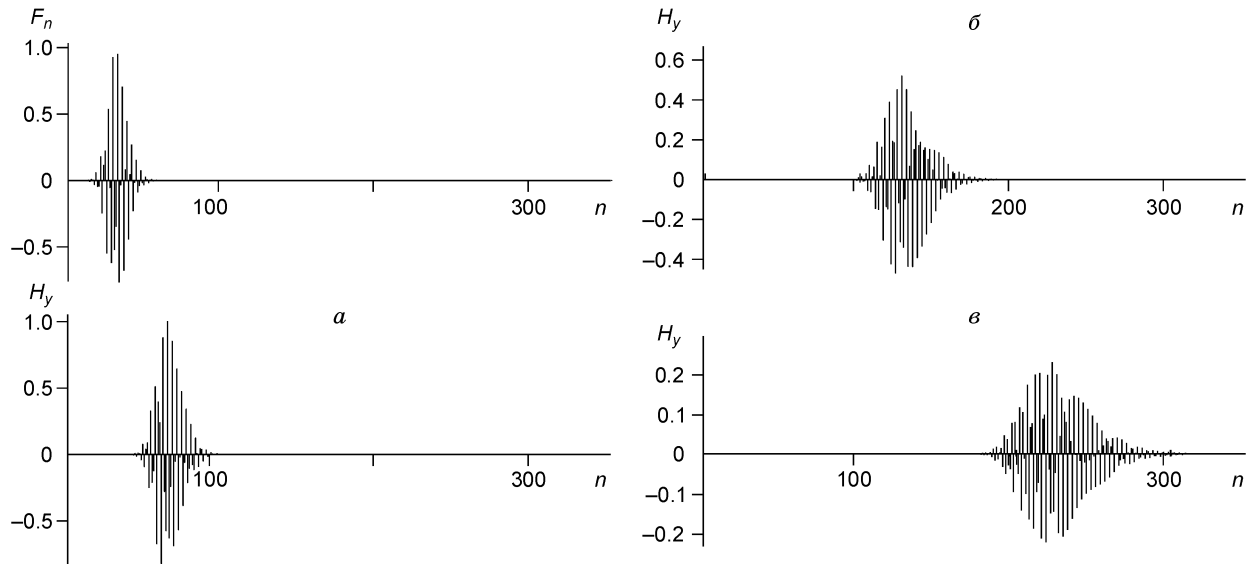


Рис. 2. Спектр источника тока F_n , спектр магнитного поля на расстоянии 5 (а), 15 (б), 30 (в) длин волн от источника.

На рис. 3 показана модель среды, для которой были проведены расчеты как методом Лагерра, так и явным конечно-разностным методом. Слой песка с параметрами $\epsilon_{s11} = 25\epsilon_0$, $\epsilon_{s33} = 20\epsilon_0$, $\sigma_{s11} = 0.001$ См/м, $\sigma_{s33} = 0.003$ См/м, $\tau_{D11} = 0.161$ нс, $\tau_{E11} = 0.156$ нс, $\tau_{D33} = 0.165$ нс, $\tau_{E33} = 0.153$ нс, $\tau_{\sigma11} = 0$, $\tau_{\sigma33} = 0$.

Включения, заполненные плотной непроводящей, нерелаксационной жидкостью, расположены в слое песка и имеют [Brewster, Annan, 1994] следующие параметры: $\epsilon_{s11} = 13.4\epsilon_0$, $\epsilon_{s33} = 13.4\epsilon_0$, $\sigma_{s11} = 10^{-6}$ См/м, $\sigma_{s33} = 10^{-6}$ См/м. Ниже слоя песка расположен слой глины с параметрами $\epsilon_{s11} = 8\epsilon_0$, $\epsilon_{s33} = 5\epsilon_0$, $\sigma_{s11} = 0.3$ См/м, $\sigma_{s33} = 0.6$ См/м, $\tau_{D11} = 0.160$ нс, $\tau_{E11} = 0.158$ нс, $\tau_{D33} = 0.161$ нс, $\tau_{E33} = 0.157$ нс, $\tau_{\sigma11} = 0$, $\tau_{\sigma33} = 0$. Выше слоя песка находится воздух, источник тока расположен на границе раздела воздух—песок.

На рис. 4 представлены магнитограммы поля (H_y — компоненты поля) для случая распространения плоской волны для этой модели среды, рассчитанные методом Лагерра. На рис. 4, а показаны результаты расчетов для изотропной среды, когда компоненты тензоров (11) равны компонентам тензоров (33). На рис. 4, б приведены расчеты для анизотропной среды для той же модели среды, что и для рис. 4, а.

Два верхних включения распознаются на магнитограммах как два отдельных, поскольку расстояние между ними больше длины волны. Два включения, расположенные слева на расстоянии меньше длины волны друг от друга, на обеих магнитограммах идентифицируются как одно.

В случае, если включения располагались в слое глины, они не распознавались на магнитограммах как в изотропном, так и в анизотропном случаях. Глина имеет высокую проводимость, поэтому высокочастотное поле здесь затухает на длине волны.

Для сравнения, вариант задачи, приведенной на рис. 4, просчитывался конечно-разностным методом. Наличие области с высокой проводимостью требует в этом случае малого шага разностной схемы по времени, что ведет к падению эффективности конечно-разностного алгоритма.

Эффективность метода Лагерра растет с ростом параметра преобразования h . При значении параметра $h = 300$ время счета методом Лагерра сравнимо со временем счета конечно-разностным методом 4-го порядка точности [Ghrist et al., 2000]. Эффективность конечно-разностных методов более высокого порядка точности ниже эффективности метода Лагерра.

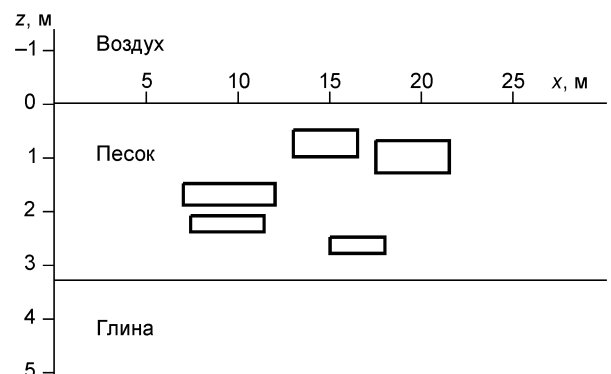


Рис. 3. Модель среды с пятью включениями в слое песка.

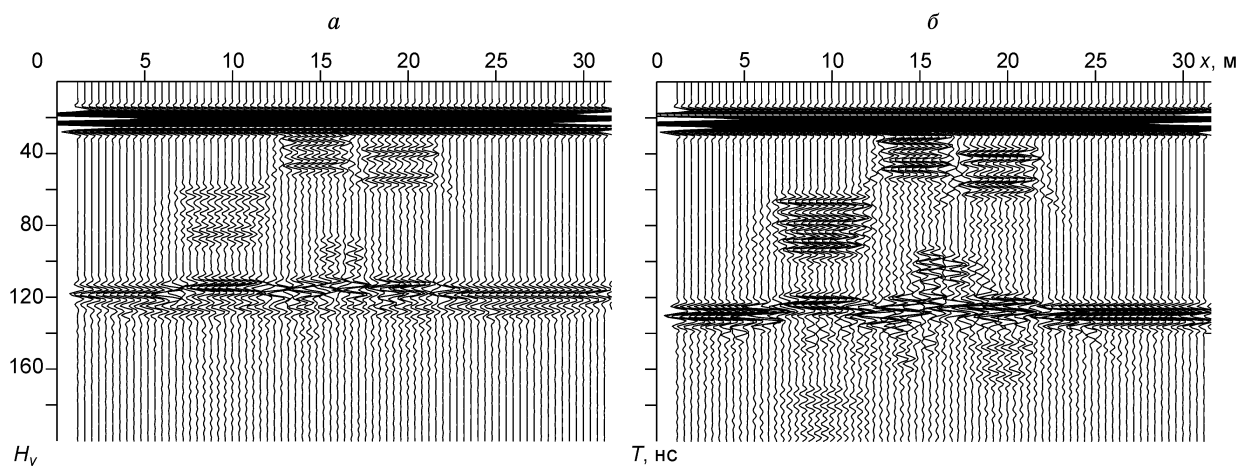


Рис. 4. Распространение плоской волны в среде с включениями для модели среды на рис. 3.

Магнитограммы поля. Изотропная среда (а), компоненты (11) равны компонентам (33), анизотропная среда (б).

Заметим также, при сравнении конечно-разностного метода с методом, использующим преобразование Лагерра, мы ограничились лишь одним механизмом релаксации $L = 1$. Ясно, что при использовании двух и более механизмов затухания метод, основанный на преобразовании Лагерра, становится намного более эффективным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении распространения высокочастотных электромагнитных волн в анизотропных и инерционных средах применение спектрального преобразования Лагерра дает эффективный метод численного решения задачи.

Метод Лагерра существенно упрощает вид уравнений Максвелла в анизотропных средах с релаксацией электромагнитных параметров. Он сводит операцию свертки функций, которая используется для описания каждого механизма релаксации, к простой сумме произведений гармоник.

Точность решения спектральным методом Лагерра сравнима с точностью решения конечно-разностным методом высокого порядка точности.

Эффективность метода повышается введением дополнительного параметра h преобразования Лагерра. Большие значения параметра h сдвигают спектр решения в область высоких гармоник Лагерра. Формально это эквивалентно „лучевому“ приближению.

Большие значения h необходимы при численном решении для повышения точности и эффективности алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

- Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М., Мир, 1999, 548 с.
- Кашкин В.Б., Сухинин Ф.И. Дистанционное зондирование Земли из космоса. М., Логос, 2001, 264 с.
- Конюх Г.В., Михайленко Б.Г. Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмологии // Математическое моделирование в геофизике. Новосибирск, 1998, № 5, с. 107—112. (Гр. ИВМиМГ).
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982, 620 с.
- Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г. Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика, 2003, т. 44 (10), с. 1060—1069.
- Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г. Моделирование распространения электромагнитных волн в релаксационных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика, 2006, т. 47 (3), с. 397—407.
- Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., Наука, 1979, 832 с.
- Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Наука, 1963, 734 с.

Физические свойства горных пород. Справочник геофизика / Ред. Н.Б. Дортман. М., Недра, 1984, 455 с.

Электроразведка. Справочник геофизика / Ред. А.Г. Тархов. М., Недра, 1980, 137 с.

Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K. A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // *Geophysics*, 1999, v. 64, p. 1369—1377.

Brewster M.L., Annan P.A. Groud-penetrating radar monitoring of controlled DNAPL release: 200 MHz radar // *Geophysics*, 1994, v. 59, p. 1211—1221.

Carcione J.M. Ground-penetrating radar. Wave theory and numerical simulation in lossy anisotropic media // *Geophysics*, 1996, v. 61, p. 1664—1677.

Fornberg B., Ghrist M. Spatial finite difference approximation for wave-type equations // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1999, v. 37, p. 105—130.

Ghrist M., Fornberg B., Driscoll T.A. Staggered time integrator for wave equations // *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, v. 38, p. 718—741.

Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // *Pure Appl. Geophys.*, 2003, v. 160, p. 1207—1224.

Paige C.C., Saunders M.A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // *ACM Transaction on mathematical software*, 1982, v. 8, p. 43—71.

Turner G., Siggins A.F. Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // *Geophysics*, 1994, v. 59, p. 1192—1200.

*Рекомендована к печати 26 декабря 2007 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 19 апреля 2007 г.,
после доработки — 3 октября 2007 г.*