РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2008, том 44, № 2

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 681.324

РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ *

В. Г. Хорошевский [1], В. А. Павский [2]

[1] *Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН, г. Новосибирск*
E-mail: khor@isp.nsc.ru

[2] *Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, г. Кемерово*
E-mail: pavvm@kemtipp.ru

Представлен подход, обеспечивающий простоту расчета показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем и позволяющий с единых методологических позиций выводить уравнения для вычисления как вероятностей состояний, так и моментов (начальных и центральных) произвольного порядка для переходного режима функционирования системы. Приведены результаты численного анализа эффективности функционирования вычислительных систем с массовым параллелизмом.

Введение. В теории вычислительных систем (ВС) под показателями эффективности [1, 2] понимают количественные характеристики надежности, живучести и осуществимости параллельного решения задач. В работах [1, 2] введено понятие живучести распределенных ВС и предложен метод расчета показателей эффективности их функционирования (например, функции потенциальной живучести). Статистические исследования функционирования ЭВМ трех поколений показали, что распределение времени безотказной работы машин и их восстановления следует считать экспоненциальным [3–5]. Дальнейшее развитие средств вычислительной техники подтвердило гипотезу об экспоненциальности функции надежности элементарных машин (ЭМ), составляющих ВС. Следовательно, при изучении эффективности функционирования ВС вполне допустимо применение развитого аппарата марковских (в частности, пуассоновских) процессов.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-07-00142, № 06-07-89089, № 08-08-00300, № 08-07-00022) и Совета по грантам Президента РФ (грант № НШ-2121.2008.9).

При анализе функционирования ВС в качестве базовых показателей надежности используются вероятности состояний [2, 4]. Для большемасштабных распределенных систем вводятся показатели живучести (обобщающие показатели надежности систем [5]).

Показатели живучести ВС относятся к интегральным характеристикам. Они позволяют анализировать функционирование ВС в целом и выражаются через математические ожидания случайных величин, характеризующих состояние систем в произвольный момент времени. Ясно, что для повышения точности анализа функционирования ВС необходимо учитывать и моменты (начальные и центральные) высших порядков.

Существующая методика составления дифференциальных уравнений для нахождения математических ожиданий [5] основывается на аналогиях составления уравнений для вероятностей состояний [5–8], что не вполне достаточно для ее обоснования. Именно поэтому отсутствует методика составления дифференциальных уравнений для моментов высших порядков (дисперсии, коэффициента асимметрии и др.).

В данной работе предлагается метод составления дифференциальных уравнений для вычисления как вероятностей состояний ВС, так и моментов произвольного порядка. Метод основан на моделях теории массового обслуживания [7, 8] и аппарате производящих функций [8]. Решения уравнений позволяют осуществлять анализ функционирования ВС в стационарном и переходном режимах [9].

Суть метода. Из теории массового обслуживания известно, что однородный марковский процесс описывается системой дифференциальных уравнений, которая допускает адаптацию к конкретной задаче. Использование производящей функции позволяет свести систему уравнений к одному линейному уравнению: в частных производных, например, функции двух переменных $\mathcal{F}(z, t)$, где z – системная переменная, t – время. Дифференцируя его по переменной z, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения $\omega_1(t)$ – начального момента первого порядка (математического ожидания). Для определения $\omega_j(t)$ (момента порядка j) требуется продифференцировать уравнение в частных производных j раз, причем после каждого дифференцирования получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения момента, порядок которого соответствует порядку дифференцирования. После j-кратного дифференцирования получаем систему из j обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\omega_j(t) + a\omega_j(t) = f(t, \omega_1(t), \dots, \omega_i(t), \dots, \omega_{j-1}(t)),$$

где a – константа, $\omega_s(t)$ – момент порядка s, $s \in E_1^{j-1} = \{1, 2, \dots, j-1\}$, $j \in E_1^{\infty}$. Начальные условия имеют вид

$$\omega_1(0) = i, \quad \omega_s(0) = 0, \ \ \forall s \neq 1, \ s \in E_1^j, \quad i \in E_1^{\infty}.$$

Будем рассматривать ВС, состоящую из N элементарных машин [2, 5], как сложную систему, функционирование которой описывается набором из l случайных функций $\xi_l(k, t)$, $l \in E_1^N = \{1, 2, \dots, N\}$, $k \in E_1^{\infty}$, где индекс k определяет пребывание ВС в состоянии C_k в момент времени $t \in [0, \infty)$. Ясно, что каждая из случайных функций $\xi_l(k, t)$ отражает одну определенную грань сущности системы, а эффективность ВС в целом описывается набором показателей.

Легко заметить, что при определенных выше условиях описание функционирования ВС сводится к однородному марковскому процессу рождения и гибели с конечным или счетным числом состояний.

Пусть $P_k(i,t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \in [0,\infty)$ вычислительная система находится в состоянии C_k при условии, что в начальный момент времени $t=0$ ВС находилась в состоянии C_i, $k, i \in E_0^N = \{0,1,2,\dots,N\}$, $N \in E_0^\infty$. Тогда процесс функционирования ВС описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}P_k(i,t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(i,t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(i,t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(i,t),$$
$$P_r(i,t) = 0, \quad \forall r \in E_{-1}^{-\infty} \cup E_{N+1}^{\infty}, \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P_i(i,0) = 1, \quad P_k(i,0) = 0, \quad i \neq k, \quad i,k \in E_0^N. \tag{2}$$

Вычисление показателей эффективности ВС. *Постановка задачи.* Имеется распределенная ВС, состоящая из N идентичных (по основным своим функциям) элементарных машин [2]. Каждая ЭМ в любой момент времени $t \in [0,\infty)$ может находиться в одном из двух несовместных состояний: работоспособном или неработоспособном.

Время безотказной работы ЭМ является случайной величиной, заданной экспоненциальной функцией распределения с параметром λ – интенсивностью отказов. В случае отказа ЭМ восстанавливается одним из $m \le N$ восстанавливающих устройств (ВУ). Время восстановления каждой ЭМ одним ВУ с интенсивностью μ подчиняется также экспоненциальному закону. В любой момент времени t каждое из ВУ может восстанавливать не более одной ЭМ. Требуется проанализировать работоспособность ВС в условиях отказов и восстановлений ЭМ.

Конкретизируем: пусть $P_k(i,t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \in [0,\infty)$ ВС имеет k ЭМ в состоянии отказа при условии, что в начальный момент времени $t=0$ в состоянии отказа находилось i ЭМ, т. е. выполнены начальные условия (2).

Пусть также $M_i(t)$ – среднее число ЭМ вычислительной системы, находящихся в состоянии отказа в момент времени t, при условии, что в начальный момент времени их было i, $M_i(0) = i$, а $D_i(t)$ – соответствующая дисперсия; по определению $D_i(0) = 0$.

Считаем, что восстановительные операции в вычислительной системе осуществляют m однородных ВУ, $m \in E_1^N$. «Природа» этих ВУ может быть произвольной: это либо специальные аппараты, либо микропрограммные устройства, либо программы, либо композиции из отмеченных средств. Производительность восстанавливающей системы определяется и числом m, и интенсивностью μ восстановления отказавших ЭМ одним ВУ. При этом будем относить восстанавливающую систему к высокопроизводительным, если в любой момент времени среднее число отказавших элементарных машин ВС не превышает общего количества ВУ.

Положим в системе уравнений (1)

$$\lambda_k = (N-k)\lambda; \quad \mu_k = \delta_k^m \mu, \;\; \delta_k^m = \begin{cases} k, & k < m, \\ m, & k \geq m. \end{cases} \tag{3}$$

Случай 1. Восстанавливающая система имеет высокую производительность, тогда $\forall\, t \in [0,\infty) \Rightarrow M_i(t) \leq m,$ следовательно, в системе (1) можно положить $\mu_k = k\mu.$ Введем производящую функцию

$$\mathcal{F}(i,z,t) = \sum_{k=0}^{N} z^k P_k(i,t), \quad \mathcal{F}(i,z,0) = z^i.$$

При сделанных предположениях система уравнений (1) с учетом (3) приводится к следующему уравнению в частных производных [9]:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(i,z,t)}{\partial t} + (z-1)(\lambda z + \mu)\frac{\partial \mathcal{F}(i,z,t)}{\partial z} = N\lambda(z-1)\mathcal{F}(i,z,t),$$

из которого может быть найдено $\mathcal{F}(i,z,t)$. Далее, замечая, что

$$P_k(i,t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\mathcal{F}(i,0,t),$$

имеем с учетом начальных условий (2)

$$P_k(i,t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{i}{j}\binom{N-1}{k-j} \varphi^j(t)[1-\varphi(t)]^{i-j} r^{k-j}[1-r(t)]^{N-k-i+j},$$

$$\varphi(t) = \lambda/(\lambda+\mu) + [\mu/(\lambda+\mu)]\exp[-(\lambda+\mu)t],$$

$$r(t) = \lambda/(\lambda+\mu) - [\lambda/(\lambda+\mu)]\exp[-(\lambda+\mu)t].$$

Вероятности $P_k(i,t)$ задают ряд распределения состояний системы в момент времени $t \in [0,\infty).$ Следовательно, используя стандартные формулы [8], можно найти $M_i(t)$ и $D_i(t)$.

Вычисления значительно упрощаются, если воспользоваться предложенным методом. Действительно из уравнения в частных производных после двукратного дифференцирования по переменной z получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} M_i(t) + (\lambda+\mu) M_i(t) = N\lambda, \\ \dfrac{d}{dt}[D_i(t) + M_i^2(t) - M_i(t)] + 2(\lambda+\mu)[D_i(t) + M_i^2(t) - M_i(t)] = 2(N-1) M_i(t) \end{cases} \tag{4}$$

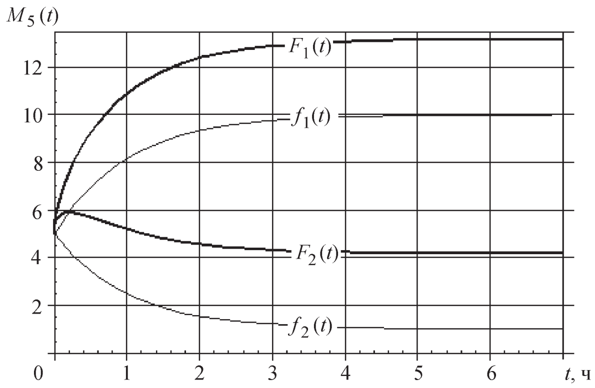

Рис. 1

и учитываем начальные условия

$$M_i(0) = i, \quad D_i(0) = 0, \quad i \le m. \tag{5}$$

Решение системы (4) с учетом (5) имеет вид

$$\begin{cases} M_i(t) = (N - i)r(t) + i\varphi(t), \\ D_i(t) = (N - i)r(t)[1 - r(t)] + i\varphi(t)[1 - \varphi(t)]. \end{cases} \tag{6}$$

В частном случае, при $i = 0$, находим

$$M_0(t) = Nr(t), \quad D_0(t) = Nr(t)[1 - r(t)].$$

Для стационарного режима функционирования ВС (т. е. при $t \to \infty$) имеем

$$M = \lim_{t \to \infty} M_i(t) = \frac{N\lambda}{\lambda + \mu}; \tag{7}$$

$$D = \lim_{t \to \infty} D_i(t) = \frac{N\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

при условии, что $N\lambda/(\lambda + \mu) \le m$ [2].

Скорость вхождения распределенной ВС в стационарный режим при наличии восстанавливающей системы высокой производительности иллюстрирует рис. 1. На этом рисунке представлены зависимости среднего числа $M_5(t)$ отказавших ЭМ от времени t с учетом дисперсии $D_5(t)$, $M_5(0) = 5$. При $N = 10^4$, $\lambda = 10^{-3}$ 1/ч, $\mu = 1$ 1/ч получаем кривые $F_1(t) = M_5(t) + \sigma(t)$, $f_1(t) = M_5(t)$, где $\sigma^2(t) = D_5(t)$. При $N = 10^4$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $\mu = 1$ 1/ч имеем кривые $F_2(t) = M_5(t) + \sigma(t)$, $f_2(t) = M_5(t)$.

Для экспресс-анализа эффективности функционирования ВС можно использовать формулы (7) уже при $t > 5$ ч:

$$M \pm \sqrt{D} = N\lambda/(\lambda + \mu) \pm \sqrt{N\lambda/(\lambda + \mu)} = 10^4 \cdot 10^{-3}/(1 + 10^{-3}) \pm$$

$$\pm\sqrt{10^4\cdot 10^{-3}/(1+10^{-3})}\approx 10+3{,}16.$$

Исследования показывают, что при скрупулезном анализе эффективности функционирования современных ВС требуется учитывать дисперсию числа отказавших ЭМ.

Случай 2. Восстанавливающая система имеет невысокую производительность, т. е. $\forall\, t\in[0,\infty)\Rightarrow M_i(t)\geq m.$ Таким образом, при длительной эксплуатации системы все восстанавливающие устройства всегда заняты. Как следует из предельных теорем теории восстановления [4, 8, 10], параметр $N\lambda - m\mu>0$ можно принять за интенсивность входящего простейшего потока требований при условии, что λ, μ также являются параметрами простейшего потока [8].

Если учесть, что современные распределенные ВС являются большемасштабными (или характеризуются массовым параллелизмом), то можно считать, что в системе уравнений (1)

$$k\to\infty;\quad \lambda_k=k\lambda;\qquad \mu_k=N\lambda-m\mu. \tag{8}$$

Используя производящую функцию

$$\mathcal{F}(i,z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k P_k(i,t),\qquad \mathcal{F}(i,z,0)=z^i, \tag{9}$$

и учитывая (8), систему (1) можно свести к следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial\mathcal{F}(i,z,t)}{\partial t}-\lambda(1-z)\frac{\partial\mathcal{F}(i,z,t)}{\partial z}=-(N\lambda-\mu m)(1-z)\mathcal{F}(i,z,t).$$

Из последнего уравнения получаем систему

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}M_i(t)+\lambda M_i(t)=N\lambda-m\mu,\\[2mm] \dfrac{d}{dt}[D_i(t)+M_i^2(t)-M_i(t)]+2\lambda[D_i(t)+M_i^2(t)-M_i(t)]=2(N\lambda-\mu m)M_i(t).\end{cases} \tag{10}$$

Решение системы (10) с начальными условиями (5) имеет вид

$$\begin{cases}M_i(t)=\dfrac{N\lambda-m\mu}{\lambda}+\left(i-\dfrac{N\lambda-m\mu}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t},\\[2mm] D_i(t)=\dfrac{N\lambda-m\mu}{\lambda}+\left(i-\dfrac{N\lambda-m\mu}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}-i\,\mathrm{e}^{-2\lambda t}.\end{cases} \tag{11}$$

Если $i\geq m$, то решение (11) удовлетворяет условию низкой производительности и является точным. Если $i<m$ при длительной эксплуатации ВС

(постулируя, что первое событие произойдет при $t > 0$), то решение (11) можно считать «асимптотически» точным, что подтверждается практически [5].

Например, при $i = 0$ получаем

$$M_0(t) = \frac{N\lambda - m\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}), \qquad D_0(t) = \frac{N\lambda - m\mu}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Для стационарного режима функционирования ВС имеем

$$M = \lim_{t \to \infty} M_i(t) = \frac{N\lambda - m\mu}{\lambda}; \qquad D = \lim_{t \to \infty} D_i(t) = \frac{N\lambda - m\mu}{\lambda}. \tag{12}$$

Следует заметить, что если в модели функционирования ВС используются простейшие потоки, то все вероятностные характеристики для стационарного режима будут независимы от начальных условий, что и подтверждается формулами (7) и (12), а результирующие потоки, являющиеся линейной комбинацией исходных, также будут простейшими [10].

Скорость вхождения распределенной ВС в стационарный режим функционирования при использовании низкопроизводительной восстанавливающей системы иллюстрирует рис. 2.

Математическое ожидание $M_4(t)$ рассчитано для $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $\mu = 1$ 1/ч, $m = 1$. Кривые $F_2(t) = M_4(t) + \sigma(t)$, $f_2(t) = M_4(t)$ соответствуют $N = 10^4$, а кривые $F_1(t) = M_4(t) + \sigma(t)$, $f_1(t) = M_4(t)$ – значению $N = 10^4 + 16$; $\sigma(t) = \sqrt{D_4(t)}$. Видно, что ВС медленно входит в стационарный режим ($t \approx 6 \times 10^4$ ч) и влияние дисперсии на $M_4(t)$ не столь существенно, как в случае 1. При расчетах для оценки работы ВС следует использовать формулы (11).

Построение моделей, характеризующих процесс функционирования распределенных ВС при наличии восстанавливающих средств различной производительности, основано на несовместных условиях. Следовательно, каждая из формул (6) и (11) имеет строго определенные условия применяе-

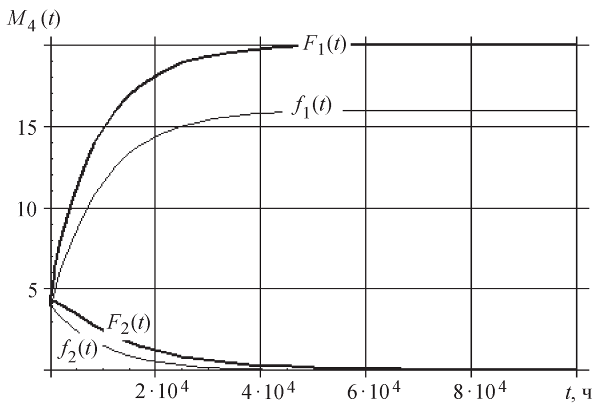

Рис. 2

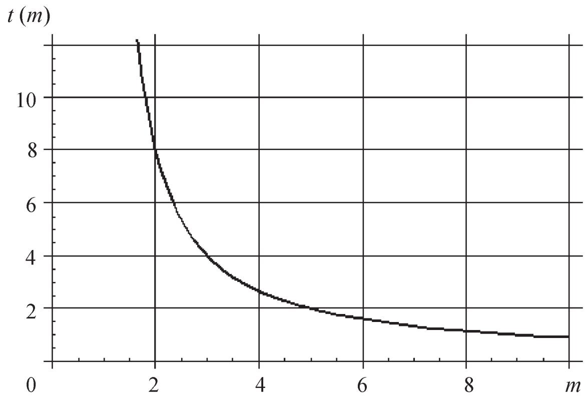

Рис. 3

мости (в частности, и временные). Поэтому интерес представляет время t перехода ВС от «низкопроизводительных» условий восстановления к «высокопроизводительным» [9], т. е. от формул (11) к (6). Следует подчеркнуть, что такая постановка исследования уместна лишь в случае, когда условие высокой производительности восстанавливающей системы ($M_i(t) \le m$) выполняется, но ВС по каким-либо форс-мажорным причинам находилась в начальном состоянии $i = M_i(0) > m$.

Приравнивая правые части в (6) и (11) для $M_i(t)$, находим

$$t = \lambda^{-1} \ln \frac{(\lambda + \mu)[m\mu - (N - i)\lambda]}{\mu[m(\lambda + \mu) - N\lambda]}, \quad t \ge 0. \tag{13}$$

Ясно, что формула (13) справедлива при выполнении условий

$$\begin{cases} i > N\lambda/(\lambda + \mu), \\ m > N\lambda/(\lambda + \mu), \\ m\mu > (N - i)\lambda. \end{cases}$$

На рис. 3 представлены значения времени $t(m)$ перехода ВС от низкопроизводительных условий восстановления к высокопроизводительным в зависимости от числа m ВУ при $N = 10^4$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $\mu = 1$ 1/ч, $i = 9$, причем $t(1) = = 2 < 2 \cdot 10^4$ ч.

График на рис. 4 отражает зависимость времени $t(N)$ перехода ВС от низкопроизводительных условий восстановления к высокопроизводительным при варьировании числа N элементарных машин (значения остальных параметров фиксированы: $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $\mu = 1$ 1/ч, $m = 1$, $i = 20$). Дополнением к графику служат следующие значения: $t(2000) \approx 23$ ч, $t(5000) \approx 39$ ч, $t(10000) \approx 2{,}99 \cdot 10^4$ ч.

График для $t(N)$ подтверждает интуитивно понятную зависимость: чем больше N, тем дольше восстанавливающая система должна устранять отка-

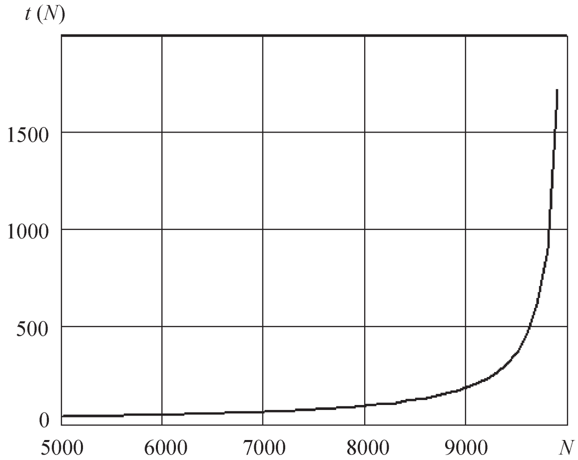

Рис. 4

зы в ВС, начавшей функционировать с чрезвычайно малым количеством работоспособных машин.

Кроме того, из рис. 4 видно, что при постоянном значении интенсивности отказов одной ЭМ и при неизменной производительности восстанавливающей системы, т. е. при $\lambda = \mathrm{const}$ и $m\mu = \mathrm{const}$, существуют пределы для наращивания количества машин в системе. (В рассматриваемой ситуации предельным значением N числа ЭМ в ВС можно считать 10^4.) Выход за эти пределы превращает восстанавливающую систему из высокопроизводительной в низкопроизводительную, не справляющуюся с суммарным потоком отказов в ВС. Однако количество исправных ЭМ и определяет производительность ВС. Следовательно, рост производительности ВС при наращивании количества входящих в нее ЭМ не может осуществляться без адекватного увеличения производительности восстанавливающей системы и/или надежности ЭМ.

Расчет показателей осуществимости решения задач на ВС.

Случай 3. Рассмотрим абсолютно надежную высокопроизводительную распределенную ВС, на которую поступает пуассоновский поток простых задач интенсивностью α; β – интенсивность их решения. (Простая задача представляется последовательной программой [2].) Так как ВС высокопроизводительная, то будем считать, что любая задача, поступившая в систему, сразу начинает обслуживаться.

Требуется вычислить математическое ожидание $A_i(t)$ для числа задач, находящихся в системе [2], и соответствующую дисперсию $D_i(t)$ в момент времени $t \in [0, \infty)$ при начальных условиях

$$A_i(0) = i, \quad D_i(0) \equiv 0, \quad i \in E_0^{\infty}. \tag{14}$$

Пусть $P_k(i, t)$ – вероятность того, что в распределенной ВС в момент времени $t \in [0, \infty)$ на обслуживании находится k задач, а в начальный момент времени $t = 0$ на обслуживании было i задач, $k, i \in E_0^{\infty}$. Полагаем в системе (1)

$$N \to \infty; \quad \lambda_k = \alpha; \quad \mu_k = k\beta. \tag{15}$$

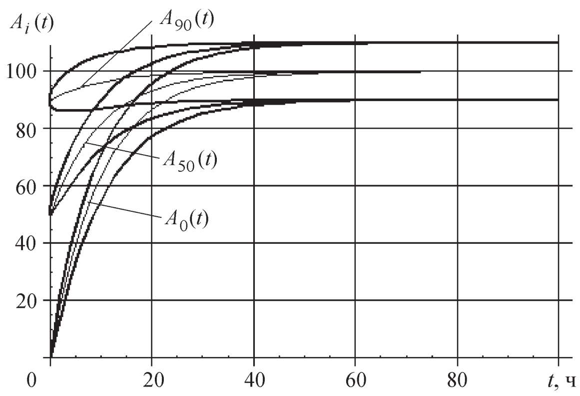

Рис. 5

При использовании производящей функции (9) система (1) сводится к одному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \mathcal{F}(i,z,t)}{\partial t} + (z-1)(\alpha z+\beta)\frac{\partial \mathcal{F}(i,z,t)}{\partial z} = \alpha(z-1)\mathcal{F}(i,z,t), \tag{16}$$

из которого после необходимых преобразований получаем для $A_i(t)$ и $D_i(t)$ систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}A_i(t) + \beta A_i(t) = \alpha, \\ \dfrac{d}{dt}[D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)] + 2\beta[D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)] = 2\alpha A_i(t) \end{cases} \tag{17}$$

с начальными условиями (14).

Решение системы (17) записывается в виде

$$\begin{cases} A_i(t) = (\alpha/\beta)(1-e^{-\beta t}) + i e^{-\beta t}, \\ D_i(t) = (1-e^{-\beta t})(\alpha/\beta + i e^{-\beta t}). \end{cases} \tag{18}$$

Характер вхождения вычислительной системы в стационарный режим работы при обслуживании потока задач иллюстрируют рис. 5 и 6. На рис. 5 приведены графики функций $A_i(t)$ (тонкие линии) и $A_i(t) + \sigma(t)$ (жирные линии) для $\alpha = 10$ 1/ч, $\beta = 0{,}1$ 1/ч, $i = 0, 50, 90$; $\sigma(t) = \sqrt{D_i(t)}$. Стационарный режим функционирования ВС достигается практически через $t = 40$ ч; учет дисперсии существенен, так как $\max \sigma(t) = 10$.

Для практических расчетов можно пользоваться формулами

$$A \pm \sqrt{D} = \lim_{t\to\infty}[A_i(t) \pm \sqrt{D_i(t)}] = \alpha/\beta \pm \sqrt{\alpha/\beta}.$$

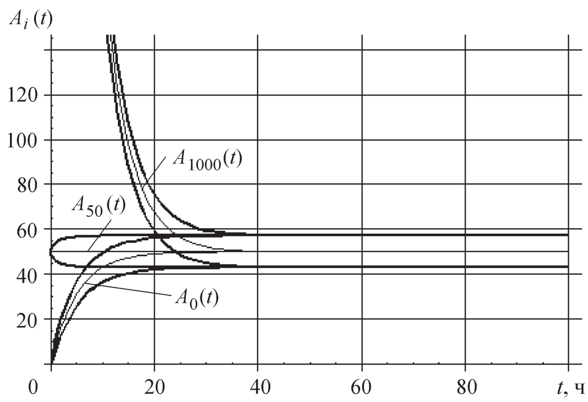

Рис. 6

В ситуации, представленной на рис. 5, имеем $A \pm \sqrt{D} = 100 \pm 10$.

На рис. 6 при $\alpha = 10$ 1/ч, $\beta = 0{,}2$ 1/ч и различных начальных условиях стационарный режим функционирования ВС достигается через $t \approx 35$ ч; $\max \sigma(t) = 10$.

Случай 4. Изучим функционирование ВС невысокой производительности в режиме обработки набора простых задач. Полагая $\alpha = 0, i \le N$ и заменяя β величиной $i\beta$, получаем из системы (1) вместо уравнения (16) следующее уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(i,z,t)}{\partial t} + (z-1)\, i\beta\, \frac{\partial \mathcal{F}(i,z,t)}{\partial z} = 0. \tag{19}$$

Из (19) после необходимых преобразований можно получить систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} A_i(t) + i\beta A_i(t) = 0, \\ \dfrac{d}{dt} [D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)] = 2i\beta A_i(t). \end{cases} \tag{20}$$

Решение системы (20) при начальных условиях (14) имеет вид

$$A_i(t) = i\exp(-i\beta t);$$
$$D_i(t) = i\exp(-i\beta t)[1 - \exp(-i\beta t)]. \tag{21}$$

Вычислим, например, время, через которое от начального набора i задач в ВС останется половина. Из (21) имеем $i/2 = i\exp(-i\beta t)$, тогда $t = \ln 2/(i\beta)$, а дисперсия $D_i(t) = i/4$; $\sigma = \sqrt{i}/2$.

На рис. 7 представлена зависимость числа решенных простых задач от времени t, если начальный набор состоял из $i = 10$ задач, $N = 10, \beta = 0{,}1$ 1/ч. Время, необходимое для решения половины задач, находящихся в системе, составило $t = \ln 2 \approx 0{,}69$ ч; $\sigma \approx 1{,}6$. Следовательно, за 42 мин будет решено от 3,4 до 6,6 задач из 10 при интенсивности решения $N\beta = 1$ 1/ч.

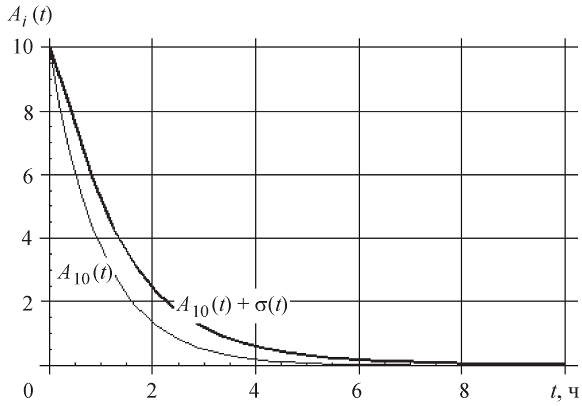

Рис. 7

Случай 5. Рассмотрим решение набора сложных задач на вычислительной системе. Если задача сложная, то она представляется параллельной программой и решается на всем выделенном для нее ресурсе.

Пусть выделенный ресурс составляет n машин. Тогда (20) запишется как система

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} A_i(t) + n\beta = 0, \\ \dfrac{d}{dt}[D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)] = 2n\beta A_i(t), \end{cases}$$

а ее решение при начальных условиях (15) примет вид

$$A_i(t) = i - n\beta t, \quad D_i(t) = n\beta t, \quad t < i/(n\beta), \tag{22}$$

где $A_i(t)$ – среднее число задач, оставшихся в системе к моменту времени t.

Из (22) следует, что среднее время, необходимое для решения i сложных задач набора, $t_{\text{ср}} = i/(n\beta)$ при стандартном отклонении $\sigma = \sqrt{i}$. Например, при выделенном ресурсе $n = 100$ЭМ время, необходимое для решения набора из 400 задач, при $\beta = 0{,}1$ 1/ч составит $t_{\text{ср}} = 400/(100 \cdot 0{,}1) = 40$ ч. С учетом отклонения $\sigma = \sqrt{400} = 20$ получаем $t_{\text{ср. }\sigma} = 20/(100 \cdot 0{,}1) = 2$ ч. Таким образом, среднее время решения набора задач с учетом стандартного отклонения $\tilde{t}_{\text{ср}} = 40 \pm 2$ ч.

Заключение. В данной работе предложен метод расчета моментов случайных величин произвольного порядка и выведены формулы, которые позволяют существенно повысить качество анализа функционирования большемасштабных распределенных вычислительных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Евреинов Э. В., Хорошевский В. Г.** Однородные вычислительные системы. Новосибирск: Наука, 1978.

2. **Хорошевский В. Г.** Инженерный анализ функционирования вычислительных машин и систем. М.: Радио и связь, 1987.
3. **Пирс У.** Построение надежных вычислительных машин. М.: Мир, 1968.
4. **Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.** Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
5. **Хорошевский В. Г.** Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005.
6. **Jonsson G., Boessen C. E.** Transport in membranes // Proc. 6th Intern. Symp. Fresh Water from the Sea. 1978. Vol. 3. P. 157.
7. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.
8. **Саати Т. Л.** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971.
9. **Павский В. А., Павский К. В., Хорошевский В. Г.** Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. 2006. № 4. С. 28.
10. **Кокс Д. Р., Смит В. А.** Теория восстановления. М.: Сов. радио, 1967.

Поступила в редакцию 9 февраля 2007 г.