

УДК 517.941.1; 532.529.5

## АДВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ

С. Н. Аристов, К. Г. Шварц\*

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь, Россия

\* Российская академия народного хозяйства и государственной службы

при Президенте Российской Федерации, 119571 Москва, Россия

E-mails: asn@icmm.ru, kafedramend@mail.ru

Представлено новое точное решение уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска, описывающее термокапиллярное адвективное течение в медленно вращающемся плоском горизонтальном слое несжимаемой жидкости со свободными границами. Такое течение возникает в случае линейного распределения температуры по горизонтальным координатам либо потока тепла на границах слоя. Исследовано влияние чисел Тейлора, Марангони, Грасгофа и Био на профили скорости течения и температуры.

Ключевые слова: термокапиллярная адвекция, вращение, точное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20160121

**Введение.** Адвективные течения появляются в плоском горизонтальном слое жидкости под действием продольного градиента температуры [1]. Их особенность состоит в отсутствии вертикальной компоненты скорости, при этом вектор скорости потока ориентирован перпендикулярно силе плавучести. Это свойство остается неизменным при различных граничных условиях для скорости, о чем свидетельствуют, например, аналитические и численные исследования термокапиллярного адвективного течения, возникающего в горизонтальных слоях жидкости и газа со свободной границей между ними в условиях микрогравитации [2].

В случае когда температура на границе слоя является линейной функцией:  $T_1 = Ax$  ( $x$  — продольная координата;  $A$  — постоянный горизонтальный градиент температуры на границах слоя), течение описывается аналитически и является точным решением уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска. Впервые адвективное течение при наличии гравитации описано аналитически в работе [3]. В [4] адвективные течения, возникающие в плоском горизонтальном слое с твердыми границами или со свободной верхней границей, представлены в виде точного решения уравнений Навье — Стокса. В [5, 6] приведен обзор таких плоскопараллельных адвективных течений при различных граничных условиях. Рассматривались стационарные и, как правило, замкнутые течения с нулевым расходом. В работе [7] построены точные решения уравнений Обербека — Буссинеска, описывающие движения в горизонтальной полосе и круглой вращающейся трубе в случае, когда продольный градиент температуры зависит от времени.

Адвективные течения во вращающемся слое жидкости, направленные перпендикулярно его оси вращения, впервые аналитически описаны в [8]. Рассматривался тонкий плоский

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-96001 р-урал-а).

слоем вращающейся жидкости с твердой нижней границей и свободной недеформируемой верхней границей. Точное решение использовалось для вывода квазидвумерных уравнений для осредненных поперек слоя скорости и температуры, изучались адвективные волны и солитоны, при этом рассматривался лишь случай быстрого вращения. Обобщение на случай проводящей жидкости было проведено в работе [9]. В [10] представлен широкий класс новых адвективных течений во вращающемся плоском слое несжимаемой жидкости и предложена процедура получения точных решений с использованием комплексных функций как в случае быстрого, так и в случае медленного вращения, т. е. при любом значении числа Тейлора. В частности, в [10] аналитически описано адвективное течение во вращающемся горизонтальном слое жидкости с твердыми границами, устойчивость которого исследовалась в работах [11–13], и рассмотрено течение со свободной верхней границей, устойчивость которого изучалась в [14]. В работе [15] приведен обзор исследований влияния вращения на устойчивость адвективных течений. Как и в случае отсутствия вращения, адвективные течения не имеют вертикальной составляющей скорости, а вектор скорости, направленный по нормали к силе плавучести, имеет обе горизонтальные составляющие.

В работе [16] аналитически описано адвективное течение в плоском слое с продольным градиентом температуры, возникающим в условиях невесомости под действием линейных высокочастотных вибраций. В [10] показано, что адвективные течения, формирующиеся под действием продольных вибраций, подобны течениям, возникающим под действием вращения. В работе [17] изучено плоскопараллельное термокапиллярное течение во вращающемся слое жидкости со свободной верхней границей, являющееся частным случаем решения, описанного в [18, 19], и исследована устойчивость этого течения. В [20] проведен теоретический анализ двумерной стационарной осесимметричной термокапиллярной конвекции, возникающей в медленно вращающемся кольцевом цилиндрическом контейнере со свободной верхней границей при нагреве внешней стенки в условиях земного притяжения. Термокапиллярное течение силиконового масла (число Прандтля  $Pr = 0,011$ ) в медленно вращающейся мелкой кольцевой кювете, внешняя поверхность боковой стенки которой нагревается, а внутренняя охлаждается, исследовано путем численного моделирования [21]. Результаты численных расчетов позволяют более полно описать процесс формирования структур и колебательное поведение гидротермических волн, а также условия их зарождения.

Адвективное термокапиллярное течение в условиях невесомости в слабовращающемся тонком слое несжимаемой жидкости с двумя плоскими свободными границами, теплоотдача на которых удовлетворяет закону Ньютона, аналитически описано в работе [22]. Исследовалась устойчивость течения при  $Pr = 6,7$ . Численно изучено поведение конечно-амплитудных возмущений за пределами области устойчивости.

Данная работа, являющаяся продолжением работы [22], посвящена описанию термокапиллярного течения в медленно вращающемся слое со свободными границами, находящемся под действием гравитационного поля.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим во вращающейся декартовой системе координат  $Oxyz$  плоский слой несжимаемой жидкости толщиной  $2h$ , слабовращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ . Ось вращения совпадает с вертикальной осью координат, направленной вверх. Число Фруда  $\Omega_0^2 l/g \ll 1$  ( $l$  — горизонтальный масштаб движения жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения) [23] полагается настолько малым, что на достаточно большом расстоянии от вертикальной оси центробежной силой можно пренебречь. Обе границы слоя свободные и считаются плоскими при медленном вращении, на них действует касательная термокапиллярная сила Марангони. Коэффициент поверхностного натяжения

линейно зависит от температуры жидкости  $T$ :

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_1)$$

( $\gamma$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения).

Выбирая в качестве характерных размерных масштабов длины, времени, скорости, температуры и давления соответственно  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $\gamma Ah/(\rho_0\nu)$ ,  $Ah$ ,  $\gamma A$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\rho_0$  — средняя плотность), получаем уравнения термокапиллярных течений в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Mn} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \sqrt{\text{Ta}} v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{Mn} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \sqrt{\text{Ta}} u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v; \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{Mn} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w + WT; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{Mn} \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T \quad (5)$$

с граничными условиями

$$z = \pm 1: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial T}{\partial y}, \quad w = 0, \quad p = 0, \quad (6)$$

где  $p$  — отклонение внешнего давления от гидростатического;  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости;  $t$  — время;  $\text{Mn} = \gamma Ah^2/(\rho_0\nu^2)$  — число Марангони;  $\text{Ta} = (2\Omega_0 h^2/\nu)^2$  — число Тейлора;  $W = \text{Gr}/\text{Mn}$ ;  $\text{Pr} = \nu/\chi$ ;  $\text{Gr} = g\beta Ah^4/\nu^2$  — число Грасгофа;  $\beta$  — коэффициент теплового расширения;  $\chi$  — температуропроводность. Граничные условия для температуры определены ниже.

**2. Адвективное течение.** С учетом граничных условий (6) точное решение системы (1)–(5) будем искать в виде

$$u = u_0(z), \quad v = v_0(z), \quad w \equiv 0, \quad T = T_0 \equiv x\tau_0(z) + \tau_1(z), \quad p = p_0(x, z). \quad (7)$$

Подставляя формулы (7) в систему (1)–(5), получаем систему уравнений в частных производных для давления, горизонтальных компонент скорости и температуры:

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = WT_0; \quad (8)$$

$$-\sqrt{\text{Ta}} v_0(z) = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + u_0''(z); \quad (9)$$

$$\sqrt{\text{Ta}} u_0(z) = v_0''(z); \quad (10)$$

$$\text{Mn Pr } u_0(z)\tau_0(z) = x\tau_0''(z) + \tau_1''(z). \quad (11)$$

Граничные условия записываются в виде

$$z = -1: \quad u_0' = 1, \quad v_0' = 0, \quad p_0 = 0; \quad (12)$$

$$z = 1: \quad u_0' = -1, \quad v_0' = 0, \quad p_0 = 0. \quad (13)$$

Интегрируя уравнение для давления (8) поперек слоя, с учетом граничных условий (12), (13) получаем

$$p_0 = W \int_{-1}^z T_0 d\zeta.$$

Это равенство справедливо только в случае, если средняя поперек слоя температура равна

нулю:  $\int_{-1}^1 T_0 d\zeta = 0$ , т. е.  $\int_{-1}^1 \tau_0(\zeta) d\zeta = 0$  и  $\int_{-1}^1 \tau_1(\zeta) d\zeta = 0$ . Из уравнения (11) следует

$$\tau_0''(z) = 0, \quad \text{Mn Pr } u_0(z)\tau_0(z) = \tau_1''(z). \quad (14)$$

Здесь с учетом равенства нулю средней поперек слоя температуры  $\tau_0(z) = z$ . Это означает, что для  $T_0$  и соответственно для  $\tau_0(z)$  и  $\tau_1(z)$  возможно несколько вариантов граничных условий.

1. На границах вдоль слоя температура может быть определена в форме линейной функции в заданной системе координат:

$$z = \mp 1: \quad T_0 = \mp x, \quad (15)$$

при этом  $\tau_0(\mp 1) = \mp 1$ ,  $\tau_1(\mp 1) = 0$ ,  $T_1 = \mp x$ .

2. На границах задаются потоки тепла в виде

$$z = \mp 1: \quad \frac{\partial T_0}{\partial z} = x. \quad (16)$$

Тогда  $\tau_0'(\mp 1) = 1$ ,  $\tau_1'(\mp 1) = 0$ ,  $T_1 = \mp x + \tau_1(\mp 1)$ .

3. Теплоотдача на границах осуществляется по закону Ньютона:

$$z = \mp 1: \quad \frac{\partial T_0}{\partial z} = \pm \text{Bi} (T_0 \pm A_1 x). \quad (17)$$

Здесь  $\text{Bi} = bh/\kappa$  — число Био;  $b$  — коэффициент теплоотдачи;  $\kappa$  — теплопроводность. Тогда  $\tau_1'(\mp 1) = \pm \text{Bi} \tau_1(\mp 1)$ , если  $\text{Bi} \neq 0$ ,  $A_1 = (1 + \text{Bi})/\text{Bi}$ ,  $T_1 = \pm(1 + \text{Bi})x/\text{Bi} + \tau_1(\mp 1)$ .

Во всех случаях давление равно

$$p_0(x, z) = W \left( x \frac{z^2 - 1}{2} + \int_{-1}^z \tau_1(\zeta) d\zeta \right).$$

Для определения горизонтальных компонент скорости  $u$ ,  $v$  введем комплексную функцию  $M(z) = u_0(z) + iv_0(z)$  ( $i$  — мнимая единица). Умножим уравнение (10) на мнимую единицу и сложим с уравнением (9). В результате получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения относительно комплексной скорости

$$M''(z) - i\sqrt{\text{Ta}} M(z) = W \frac{z^2 - 1}{2}, \quad M'(\mp 1) = \pm 1. \quad (18)$$

Решив задачу (18), получаем аналитическую формулу для двух ненулевых компонент скорости термокапиллярного течения

$$M(z) = u_0(z) + iv_0(z) = -\frac{\text{ch}(\lambda z)}{\lambda \text{sh}(\lambda)} + \frac{W}{\lambda^2} \left( \frac{\text{ch}(\lambda z)}{\lambda \text{sh}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{z^2 - 1}{2} \right), \quad (19)$$

где  $\lambda = \sqrt[4]{\text{Ta}/4}(1 + i)$ . Как и в [22], первое слагаемое в (19) описывает термокапиллярный эффект, второе — влияние гравитации на движение жидкости во вращающемся

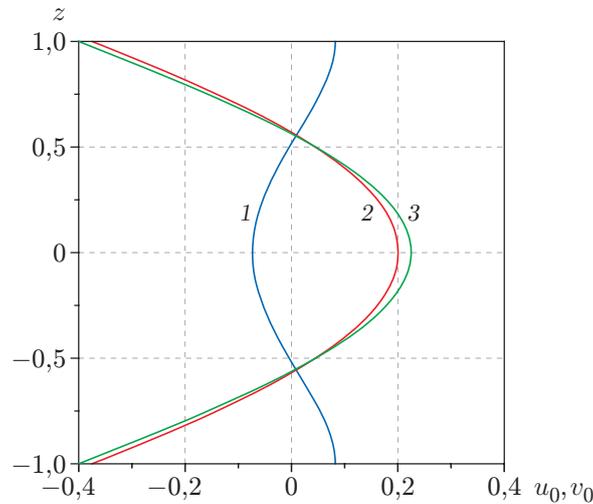


Рис. 1. Профили компонент скорости  $u_0(z)$  (1, 3) и  $v_0(z)$  (2):  
1, 2 — при наличии вращения ( $W = 3$ ,  $Ta = 10$ ), 3 — при отсутствии вращения

горизонтальном слое. Анализ решения (19) показал, что компоненты скорости имеют параболический, симметричный относительно вертикальной оси профиль (рис. 1), форма которого практически не меняется при медленном вращении. На границах слоя выполняется условие  $M(-1) = M(1)$ , с увеличением числа Тейлора вблизи свободных границ начинает формироваться пограничный слой. Скорость достигает максимального значения в середине слоя, где формируется струя. Максимальная величина скорости линейно зависит от параметра  $W$  в рассматриваемом диапазоне значений числа Тейлора  $0 \leq Ta \leq 10$ . С увеличением  $Ta$  скорость уменьшается.

При отсутствии вращения ( $Ta = 0$ ) горизонтальные компоненты скорости равны

$$u_0(z) = W \frac{5z^4 - 30z^2 + 9}{120}, \quad v_0(z) \equiv 0, \quad (20)$$

причем выполнение граничных условий (12), (13) возможно только в случае, если  $W = 3$ . Заметим, что для функции скорости в (20) выполняется условие замкнутости, она симметрична, в центре слоя  $u_0(z) = 0,225$ , а на его границах  $u_0(z) = \pm 0,4$ . При  $z = \pm \sqrt{3 - 6\sqrt{5}/5}$   $u_0(z) = 0$ .

Из формулы (10) следует, что компонента скорости вдоль оси  $x$  равна  $u_0(z) = v_0''(z)/\sqrt{Ta}$ . Для того чтобы определить температуру жидкости в слое, подставим это выражение во второе уравнение системы (14). В результате получаем уравнение

$$\frac{Mn Pr}{\sqrt{Ta}} z v_0''(z) = \tau_1''(z).$$

Введем обозначение  $f(z) = \int v(z) dz$ . Учитывая, что  $M(-1) = M(1)$ ,  $f(-1) = -f(1)$ ,

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = 0, \quad \int_{-1}^1 z v(z) dz = 0, \quad \text{получаем распределение температуры при граничных условиях (15)}$$

$$T(z) = xz + \frac{Mn Pr}{\sqrt{Ta}} [z(v(z) - v(-1)) - 2(f(z) + zf(-1))]. \quad (21)$$

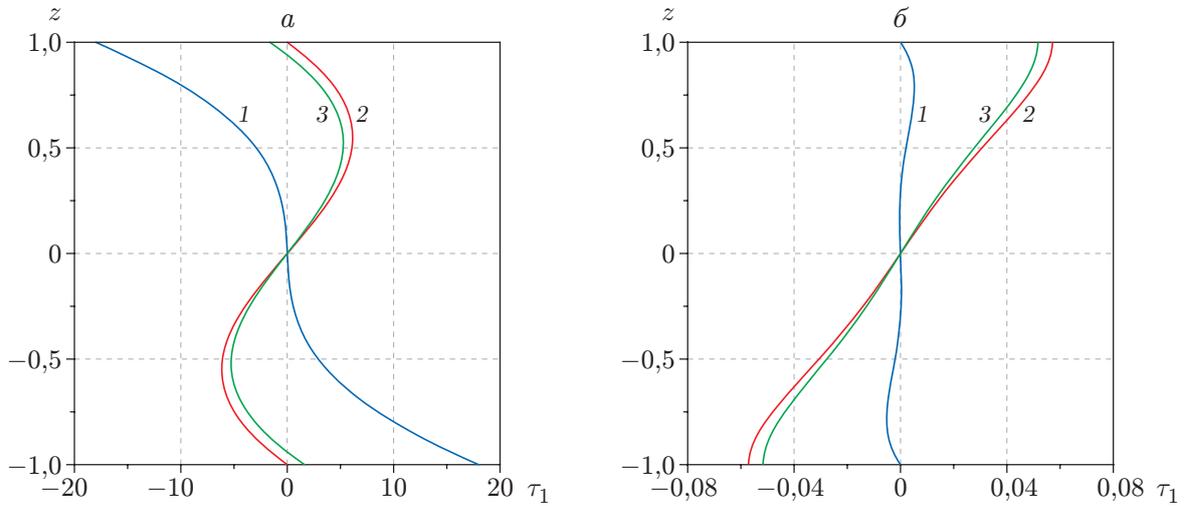


Рис. 2. Профили  $\tau_1(z)$  при линейном распределении температуры (1), а также при наличии потока тепла в виде линейной функции (2) и теплообмена ( $Bi = 0,1$ ) на границах слоя (3):  
 а —  $W = 3, Ta = 10$ ; б —  $Ta = 0$

При отсутствии вращения ( $Ta = 0$ ) формула (21) принимает вид

$$T(z) = xz + Mn Pr \frac{5z^7 - 63z^5 + 63z^3 - 5z}{1680}. \tag{22}$$

В случае если на границах вращающегося слоя задаются потоки тепла в виде (16), температура равна

$$T(z) = xz + \frac{Mn Pr}{\sqrt{Ta}} [z(v(z) + v(-1)) - 2f(z)].$$

В частности, при  $Ta = 0$

$$T(z) = xz + Mn Pr \frac{5z^7 - 63z^5 + 63z^3 + 91z}{1680}.$$

В случае если теплоотдача на границах осуществляется по закону Ньютона в виде (17), справедлива формула

$$T(z) = xz + \frac{Mn Pr}{\sqrt{Ta}} \left[ z \left( v(z) + \frac{1 - Bi}{1 + Bi} v(-1) \right) - 2 \left( f(z) + z \frac{2 Bi}{1 + Bi} f(-1) \right) \right],$$

при отсутствии вращения

$$T(z) = xz + Mn Pr \frac{5z^7 - 63z^5 + 63z^3 + (91 - 5 Bi)z / (1 + Bi)}{1680}.$$

Во всех указанных выше случаях граничных условий профиль  $\tau_1(z)$  антисимметричен (рис. 2).

При наличии вращения с увеличением параметра  $W$  температура монотонно возрастает в случае (15), (21), в случаях (16), (17) она монотонно убывает в рассматриваемом диапазоне значений числа Тейлора. Максимальная температура монотонно убывает с увеличением  $Ta$ . С ростом числа Био максимум температуры на нижней границе слоя увеличивается, а локальный максимум в центре слоя уменьшается и смещается к середине. Эта зависимость сохраняется во всем рассматриваемом диапазоне значений  $W$ .

При отсутствии вращения горизонтального слоя для случая граничных условий для температуры (15), (22) в верхней половине слоя температура выше, чем в нижней (см. рис. 2, б),  $\tau_1 = 0$  при  $z = 0$ ,  $z = \pm 1$  и  $z = \pm 0,294715$ . Ее максимальное значение 0,000 327 232 Mn Pr достигается при  $z = -0,166 531$ . В случаях граничных условий (16), (17) зависимость  $\tau_1(z)$  является практически линейной.

**3. Выводы.** Рассмотрено новое точное решение уравнений Навье — Стокса, аналитически описывающее термокапиллярное адвективное течение в медленно вращающемся плоском слое несжимаемой жидкости со свободными границами. Заметим, в частности, что решение может быть описано и при отсутствии вращения. В случае слабого вращения можно пренебречь центробежной силой и считать, что границы остаются плоскими на достаточно большом расстоянии от оси вращения. В случае если на свободных границах отклонение внешнего давления от гидростатического равно нулю, средняя поперек слоя температура также должна быть равна нулю. Профили компонент скорости симметричны относительно середины слоя и в центральной части слоя являются параболическими. Профиль температуры антисимметричен. С увеличением числа Тейлора максимумы скорости и температуры термокапиллярного течения монотонно убывают.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Гершуни Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.
2. **Goncharova O. N., Kabov O. A.** Gas flow and thermocapillary effects on fluid flow dynamics in a horizontal layer // *Microgravity Sci. Technol.* 2009. V. 21, suppl. 1. P. 129–137.
3. **Остроумов Г. А.** Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.
4. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *ПМТФ.* 1966. № 3. С. 69–72.
5. **Андреев В. К.** Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Красноярск, 2010. (Препр. / Ин-т вычисл. моделирования СО РАН; № 1-10).
6. **Андреев В. К., Бекежанова В. Б.** Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // *ПМТФ.* 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20.
7. **Пухначев В. В.** Нестационарные аналоги решения Бириха // *Изв. Алт. гос. ун-та.* 2011. № 1/2. С. 62–69.
8. **Аристов С. Н., Зимин В. Д.** Адвективные волны во вращающемся шаровом слое. Свердловск, 1986. (Препр. / Ин-т механики сплошных сред УНЦ АН СССР; № 145).
9. **Аристов С. Н., Пичугин А. М.** Течение и теплообмен в слое вязкой проводящей жидкости между вращающимися пластинами с горизонтальными градиентами температуры в поперечном магнитном поле // *ПМТФ.* 1990. № 4. С. 124–128.
10. **Аристов С. Н.** Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости / С. Н. Аристов, К. Г. Шварц. Пермь: Перм. ун-т, 2006.
11. **Шварц К. Г.** Влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости при малом значении числа Прандтля // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2005. № 2. С. 29–38.
12. **Чиклаев Д. Г., Шварц К. Г.** Исследование линейной устойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости с твердыми границами методом дифференциальной прогонки // *Вестн. Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика.* 2011. Вып. 3. С. 42–46.

13. **Чикулаев Д. Г., Шварц К. Г.** Влияние слабого вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твердыми границами при малых числах Прандтля // Вестн. Перм. ун-та. Физика. 2012. Вып. 4. С. 188–192.
14. **Shvarts K. G., Boudlal A.** Effect of rotation on stability of advective flow in horizontal liquid layer with a free upper boundary // J. Phys. Conf. Ser. 2010. V. 216, N 1. 012005.
15. **Шварц К. Г.** Исследование устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости // Вестн. Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 1. С. 54–61.
16. **Бирих Р. В.** О вибрационной конвекции в плоском слое с продольным градиентом температуры // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 4. С. 12–15.
17. **Zebib A.** Thermocapillary instabilities with system rotation // Phys. Fluids. 1996. V. 8, N 12. P. 3209–3211.
18. **Аристов С. Н., Фрик П. Г.** Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости. Свердловск, 1987. (Препр. / УрО АН СССР; № 99).
19. **Аристов С. Н.** Вихревые течения в тонких слоях жидкости / С. Н. Аристов, К. Г. Шварц. Киров: Вят. гос. ун-т, 2011.
20. **Bauer H. F., Eidel W.** Axisymmetric thermocapillary convection in a slowly rotating annular cylindrical container // Heat Mass Transfer. 1998. V. 34, N 1. P. 79–90.
21. **Shi W. Y., Imaishi N.** Thermocapillary convection in a shallowannular pool of silicone oil // Engng Sci. Rep. Kyushu Univ. 2006. V. 28, N 1. P. 1–8.
22. **Шварц К. Г.** Устойчивость термокапиллярного адвективного течения в медленно вращающемся слое жидкости в условиях невесомости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 1. С. 44–58.
23. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972.

*Поступила в редакцию 7/X 2013 г.,  
в окончательном варианте — 22/X 2014 г.*

---