

УДК 532.591; 539.3.371

## Динамическая податливость многослойных покрытий\*

В.М. Кулик

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E- mail: vkulik@itp.nsc.ru

Разработан алгоритм расчета динамической податливости многослойных покрытий. Модуль податливости и фазовое отставание перемещения поверхности покрытия от действующего давления зависят от вязкоупругих свойств материалов, отношения длины волны к толщине слоя  $\lambda H$  и отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых колебаний в базовом слое  $V/C_{t,2}^0$ . Проведен расчет динамической податливости двухслойного покрытия, состоящего из толстого базового слоя и тонкого прочного внешнего слоя. Модуль упругости внешнего слоя варьировался до восьмикратного значения модуля упругости внутреннего слоя, при этом плотность внешнего слоя оставались либо равной плотности внутреннего слоя, либо увеличивалась пропорционально модулю упругости. В зависимости от величины  $V/C_{t,2}^0$  выделены два сценария взаимодействия податливого покрытия с турбулентным потоком — резонансное и широкополосное. Показано, что колебательные свойства двухслойных покрытий могут быть существенно лучше, чем у однослойных. Это позволяет либо увеличить прочность покрытий, либо эффективно работать на более низких скоростях.

**Ключевые слова:** вынужденная деформация, плоская волна давления, податливое покрытие, многослойность, динамическая податливость, отношение модулей упругости и плотностей различных слоев.

Информация о податливости покрытия необходима для выбора покрытий с определенными свойствами, которые способны снижать трение в турбулентном течении [1–3] или затягивать ламинарно-турбулентный переход [4]. В свою очередь, расчет податливости основывается на знании вязкоупругих свойств материалов. Методика измерения этих свойств в широком частотном диапазоне при малых относительных деформациях описана в работах [5, 6].

Для практического использования покрытий необходимо, чтобы они обладали достаточной прочностью, т.е. имели как можно больший модуль упругости ( $E > 1$  МПа). С другой стороны, модуль упругости не должен быть слишком большим, чтобы обеспечить достаточную податливость покрытия. Компромисс этих противоположных требований был найден в работе [1] и заключается в обеспечении требования:  $V/C_t^0 \approx 1 \div 1,5$ .

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00052).

### Постановка задачи

В настоящей работе выполнен расчет динамической податливости покрытия, состоящего из  $N$  слоев вязкоупругого материала толщиной  $H_n$  с коэффициентом Пуассона  $\sigma$ , одинаковым для всех слоев, плотностью  $\rho_n$  и комплексным модулем упругости  $E_n = E_n^0 (1 - i\mu_n)$ , где  $\mu$  — коэффициент потерь. Нижний слой ( $n = N$ ) приклеен к твердому основанию. Порядок расположения слоев показан на рис. 1. Рассмотрен установившийся режим деформации этого покрытия под действием плоской монохроматической волны давления с частотой  $\omega$ , распространяющейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ ,

$$P = P_0 e^{i(kx - \omega t)}, \text{ где } k = \omega/V.$$

Смещение частиц среды определяется зависимостью

$$\xi = i\zeta + j\eta = f(y) e^{i(kx - \omega t)},$$

здесь  $\zeta$ ,  $\eta$  — компоненты смещения, направленные соответственно вдоль покрытия и перпендикулярно ему.

Общее уравнение движения имеет вид [7]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = C_{l,n}^2 \Delta \xi + (C_{l,n}^2 - C_{t,n}^2) \text{grad div } \xi, \quad (1)$$

где,  $C_{l,n} = [E_n(1 - \sigma)/(\rho_n(1 + \sigma)(1 - 2\sigma))]^{1/2}$  — скорость волны сжатия-растяжения в безграничном пространстве, заполненном материалом слоя с номером  $n$ ,  $C_{t,n} = [E_n/2\rho_n(1 + \sigma)]^{1/2}$  — скорость сдвиговой волны в таких же условиях.

Граничными условиями являются отсутствие смещения на твердой стенке

$$\zeta = \eta = 0 \text{ при } y = H = \sum_{n=1}^N h_n, \quad (2)$$

и равенство напряжений на внешней границе

$$C_{l,1}^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + (C_{l,1}^2 - 2C_{t,1}^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{P}{\rho_1} e^{i(kx - \omega t)}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (3)$$

На границах слоев при  $y = H_n = \sum_{k=1}^n h_k$  выполняется равенство смещений и напряжений:

$$\zeta_n = \zeta_{n+1}, \quad \eta_n = \eta_{n+1}; \quad (4)$$

$$\sigma_n^{yy} = \sigma_{n+1}^{yy}, \quad (5)$$

$$\sigma_n^{xy} = \sigma_{n+1}^{xy}. \quad (6)$$

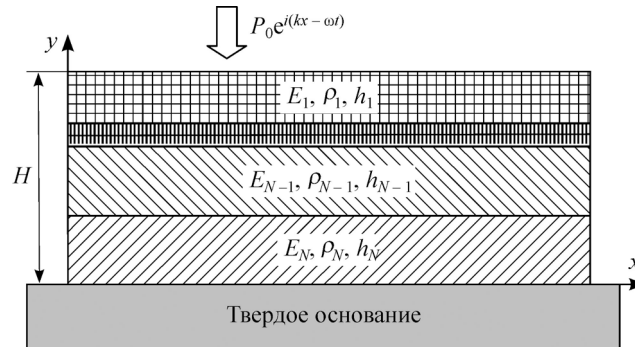


Рис. 1. Схема многослойного покрытия.

Для решения уравнения (1) использовался метод разделения смещения на градиентную и роторную части. Были введены две скалярные функции  $\Phi$  и  $\Psi$ , такие что

$$\zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (7)$$

После подстановки их в (1) были получены два уравнения:

$$\partial^2\Phi/\partial t^2 - C_l^2\Delta\Phi = 0 \quad \text{и} \quad \partial^2\Psi/\partial t^2 - C_t^2\Delta\Psi = 0,$$

решение которых для каждого слоя имеет вид

$$\Phi_n = [A_{1,n} \frac{\sinh(\omega\alpha_n y/V)}{\omega\alpha_n/V} + B_{1,n} \cosh(\omega\alpha_n y/V)] e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\Psi_n = [A_{2,n} \frac{\sinh(\omega\beta_n y/V)}{\omega\beta_n/V} + B_{2,n} \cosh(\omega\beta_n y/V)] e^{i(kx - \omega t)},$$

здесь  $\alpha_n = [1 - (V/C_{l,n})^2]^{1/2}$ ,  $\beta_n = [1 - (V/C_{t,n})^2]^{1/2}$ . Используя граничные условия (2), (3) и условия шивки между слоями (4), (5), (6), получим  $2N$  уравнений для определения  $2N$  неизвестных ( $A_{j,1}, \dots, A_{j,N}, B_{j,1}, \dots, B_{j,N}$ ,  $j = 1, 2$ ). Для однослойного покрытия образуется матрица размером  $4 \times 4$ , составленная из граничных условий (2) и (3). В работе [8] для этого случая приведены явные выражения для  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . Для двухслойного покрытия матрица определения ( $A_{j,1}, \dots, A_{j,2}, \dots, B_{j,1}, \dots, B_{j,2}$ ,  $j = 1, 2$ ) состоит из  $8 \times 8$  элементов, для трехслойного —  $12 \times 12$  элементов и так далее.

Условие (2) записывается в виде равенств:

$$(i/\alpha_N) \sinh(\alpha_N kH) A_{1,N} + ik \cosh(\alpha_N kH) B_{1,N} + \cosh(\beta_N kH) A_{2,N} + \beta_N k \sinh(\beta_N kH) B_{2,N} = 0,$$

$$\cosh(\alpha_N kH) A_{1,N} + \alpha_N k \sinh(\alpha_N kH) B_{1,N} - i/\beta_N \sinh(\beta_N kH) A_{2,N} - ik \cosh(\beta_N kH) B_{2,N} = 0.$$

Условие (3) будет иметь вид:

$$2iA_{1,1} + k(1 + \beta_1^2)B_{2,1} = 0, \quad -2iA_{2,1} + k \left[ 2 - (v/c_{t,1})^2 \right] B_{1,1} = P e^{i(kx - \omega t)} / (\rho_N C_{t,1}^2).$$

На границе слоев при  $y = H_n$ , где  $H_n = \sum_{k=1}^n h_k$ , выполняются условие равенства касательных напряжений (5)

$$\frac{E_n}{1 + \sigma} \left( \frac{\partial\zeta_n}{\partial y} + \frac{\partial\eta_n}{\partial x} \right) = \frac{E_{n+1}}{1 + \sigma} \left( \frac{\partial\zeta_{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial\eta_{n+1}}{\partial x} \right) \quad (8)$$

и условие равенства нормальных напряжений (6)

$$\frac{\partial\eta_n}{\partial y} + \frac{\sigma}{1 - \sigma} \cdot \frac{\partial\zeta_n}{\partial x} = \frac{E_{n+1}}{E_n} \left[ \frac{\partial\eta_{n+1}}{\partial y} + \frac{\sigma}{1 - \sigma} \cdot \frac{\partial\zeta_{n+1}}{\partial x} \right]. \quad (9)$$

Используя соотношения (7), для компонент смещения поверхности покрытия получим выражения

$$\eta_{y=0} = \left( A_{1,1} - i \frac{2\pi}{\lambda} B_{2,1} \right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \zeta_{y=0} = \left( i \frac{2\pi}{\lambda} B_{1,1} + A_{2,1} \right) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Податливость покрытия есть отношение деформации его поверхности к приложенному давлению. Соответственно смещениям поверхности податливость будет

иметь две компоненты: перпендикулярную к поверхности —  $C_{\perp} = \eta / P = |C_{\perp}| e^{i\theta_{\perp}}$ , и параллельную ей —  $C_{\parallel} = \zeta / P = |C_{\parallel}| e^{i\theta_{\parallel}}$ . Здесь  $|C_{\perp}|$  и  $|C_{\parallel}|$  — модули соответствующих компонент динамической податливости, а  $\theta_{\perp}$  и  $\theta_{\parallel}$  — фазовые отставания соответствующих компонент смещения поверхности от действующего давления.

Для расчетов и анализа удобно пользоваться безразмерными комплексами. В случае однослойного покрытия [1, 3, 8] динамическая податливость обезразмеривалась статической податливостью  $H/E$ , что физически означает податливость столбика высотой  $H$ , изготовленного из материала с модулем упругости  $E$ , поперечный размер которого в несколько раз превышает высоту [9]. В случае многослойного покрытия его статическая податливость есть сумма статических податливостей отдельных слоев:  $C_{\text{стат}} = \sum_{k=1}^N (h_k / E_k)$ ,

а безразмерная податливость  $C_{\perp}^* = |C_{\perp}| / C_{\text{стат}}$ .

Для однослойного покрытия компоненты безразмерной податливости зависят только от величин  $\lambda/H$  — отношения длины волны к толщине покрытия — и от  $V/C_t^0$  — отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых возмущений в безграничной среде, заполненной материалом с модулем упругости  $E$ , но не имеющим вязких потерь ( $\mu = 0$ ).

Поскольку  $C_{t,n}^0 = \sqrt{E_n^0 / (2\rho_n(1+\sigma))}$ , т.е. скорость сдвиговой волны определяется отношением модуля упругости материала к его плотности, это является причиной слабой зависимости податливости от вариации свойств материала покрытия путем его вспенивания или добавления порошков тяжелых металлов или их окислов. При таких модификациях материала его плотность и модуль упругости изменяются практически пропорционально, что не приводит к изменению  $E/\rho$ . В случае многослойного покрытия ситуация изменяется, что существенно расширяет возможности экспериментаторов. Это следует из условий равенства напряжений на границах слоев (8) и (9), в которые напрямую входит отношение модулей упругости контактирующих материалов. Поскольку  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны гармоники пульсации давления, то аргументы гиперболических функций равны  $2\pi(H/\lambda)$  и  $2\pi(H_n/H)(H/\lambda)$ , умноженные на соответствующие  $\alpha_n$  или  $\beta_n$ . Скорость распространения волны  $V$  логично пронормировать на скорость сдвиговой волны во внутреннем слое —  $C_{t,N}$ . Тогда скорость сдвиговой волны в слое с номером  $n$  будет равна  $C_{t,n}^2 = C_{t,N}^2 (E_n / E_N) / (\rho_n / \rho_N)$ , а параметры  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  будут иметь следующий вид:

$$\beta_n = \left[ 1 - \left( \frac{V}{C_{t,N}} \right)^2 \frac{\rho_n / \rho_N}{E_n / E_N} \right]^{0,5}, \quad \alpha_n = \left[ 1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \left( \frac{V}{C_{t,N}} \right)^2 \frac{\rho_n / \rho_N}{E_n / E_N} \right]^{0,5}.$$

Для двухслойного покрытия коэффициенты  $A_{1,n}$ ,  $A_{2,n}$ ,  $B_{1,n}$ ,  $B_{2,n}$  определяются из решения матричного уравнения

$$(A_{1,1}, A_{1,2}, B_{1,1}, B_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}, B_{2,1}, B_{2,2}) = \mathbf{M}^{-1} \cdot (0, -(1+\sigma)/(E_1(1-i\mu_1)), 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

где транспонированная матрица  $\mathbf{M}^T$  имеет вид:

$$\mathbf{M}^T =$$

$2i$	$0$	$\cosh(\alpha_1 kh_1)$	$\frac{i}{\alpha_1} \sinh(\alpha_1 kh_1)$	$2i \cosh(\alpha_1 kh_1)$	$\left( \alpha_1 - \frac{1-\sigma}{\alpha_1} \right) \sinh(\alpha_1 kh_1)$	$0$	$0$
$0$	$-i$	$\frac{-i}{\beta_1} \sinh(\beta_1 kh_1)$	$\cosh(\beta_1 kh_1)$	$\frac{1+\beta_1^2}{\beta_1} \sinh(\beta_1 kh_1)$	$-\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \cosh(\beta_1 kh_1)$	$0$	$0$
$0$	$k - \frac{kV/C_{t,2}^2}{2(1-i\mu_1)}$	$k\alpha_1 \sinh(\alpha_1 kh_1)$	$ik \cosh(\alpha_1 kh_1)$	$2ik\alpha_1 \sinh(\alpha_1 kh_1)$	$\left( \alpha_1^2 - \frac{\sigma}{1-\sigma} \right) k \cosh(\alpha_1 kh_1)$	$0$	$0$
$k(1+\beta_1^2)$	$0$	$-ik \cosh(\beta_1 kh_1)$	$k\beta_1 \sinh(\beta_1 kh_1)$	$k(1+\beta_1^2) \cosh(\beta_1 kh_1)$	$-i\beta_1 \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} k \sinh(\beta_1 kh_1)$	$0$	$0$
$0$	$0$	$-\cosh(\alpha_2 kh_1)$	$\frac{-i}{\alpha_2} \sinh(\alpha_2 kh_1)$	$-\frac{E_2}{E_1} \frac{2i}{\alpha_2} \cosh(\alpha_2 kh_1)$	$-\frac{E_2}{E_1} \left( \alpha_2 - \frac{1-\sigma}{\alpha_2} \right) \sinh(\alpha_2 kh_1)$	$\cosh(\alpha_2 kh_1)$	$\frac{i}{\alpha_2} \sinh(\alpha_2 kh_1)$
$0$	$0$	$\frac{i}{\beta_2} \sinh(\beta_2 kh_1)$	$-\cosh(\beta_2 kh_1)$	$-\frac{E_2}{E_1} \frac{1+\beta_2^2}{\beta_2} \sinh(\beta_2 kh_1)$	$i \frac{E_2}{E_1} \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \cosh(\beta_2 kh_1)$	$-\frac{i}{\beta_2} \sinh(\beta_2 kh_1)$	$\cosh(\beta_2 kh_1)$
$0$	$0$	$-k\alpha_2 \sinh(\alpha_2 kh_1)$	$-ik \cosh(\alpha_2 kh_1)$	$-\frac{E_2}{E_1} \frac{2i}{\alpha_2} \alpha_2 k \sinh(\alpha_2 kh_1)$	$-\frac{E_2}{E_1} \left( \alpha_2^2 - \frac{\sigma}{1-\sigma} \right) k \cosh(\alpha_2 kh_1)$	$k\alpha_2 \sinh(\alpha_2 kh_1)$	$ik \cosh(\alpha_2 kh_1)$
$0$	$0$	$ik \cosh(\beta_2 kh_1)$	$-k\beta_2 \sinh(\beta_2 kh_1)$	$-\frac{E_2}{E_1} k(1+\beta_2^2) \cosh(\beta_2 kh_1)$	$i\beta_2 \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} k \sinh(\beta_2 kh_1)$	$-ik \cosh(\beta_2 kh_1)$	$k\beta_2 \sinh(\beta_2 kh_1)$

### Пример расчета для двухслойного покрытия

Для двухслойного покрытия компоненты безразмерной податливости зависят от  $\lambda/H$  — отношения длины волны к толщине покрытия, от  $V/C_{t,2}^0$  — отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых возмущений в материале нижнего слоя, от отношения модулей упругости  $E_1/E_2$  и плотностей  $\rho_1/\rho_2$  материалов слоев, а также от отношения толщины верхнего слоя к общей толщине покрытия  $h_1/H$ .

Рассмотрим два варианта изменения  $E_1/E_2$  и  $\rho_1/\rho_2$ : первый, когда плотность материала тонкого верхнего слоя ( $h_1/H = 0,1$ ) покрытия изменяется пропорционально его модулю упругости  $\rho_1/\rho_2 = E_1/E_2$ ; второй, когда плотность остается постоянной и равной плотности нижнего слоя  $\rho_1/\rho_2 = 1$ .

В обоих вариантах для расчета взяты коэффициенты потерь  $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$  и коэффициент Пуассона  $\sigma = 0,475$ , что соответствует параметрам большинства кремнийорганических резин. На рис. 2 представлены данные расчета нормальной компоненты безразмерной динамической податливости по первому варианту, когда плотность изменяется пропорционально модулю упругости.

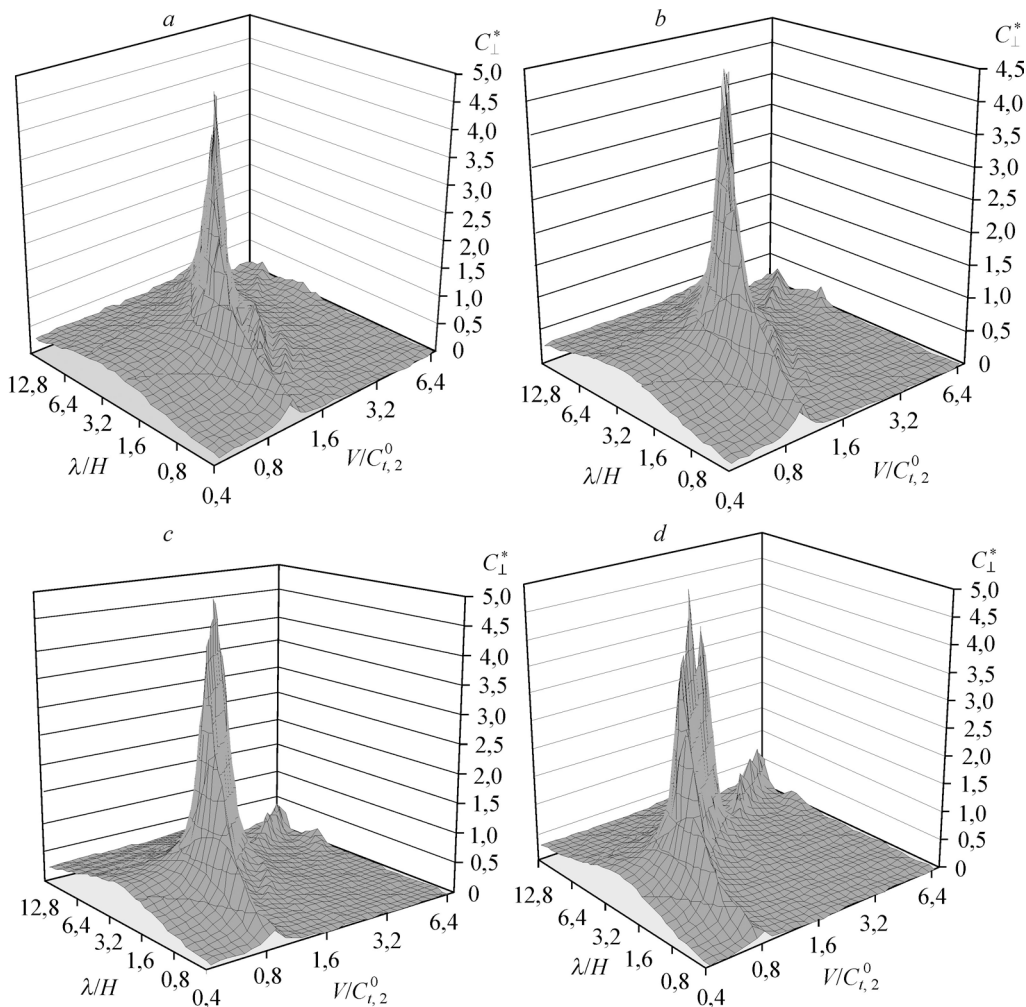


Рис. 2. Модуль нормальной компоненты безразмерной динамической податливости при  $\rho_1/\rho_2 = E_1/E_2$ .

$E_1/E_2 = 1$  (a), 2 (b), 4 (c), 8 (d);  $E_2 = 1$  МПа,  $\rho_2 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $H = 10$  мм,  $h_2/h_1 = 9$ .

Таблица 1

Нормальная компонента динамической податливости при вариации модуля упругости внешнего слоя при одинаковом отношении  $E/\rho = 10^3$  (м/с)<sup>2</sup> материалов слоев при  $h_2/h_1 = 9$ ,  $H = 10$  мм,  $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$ ,  $\sigma = 0,475$

Параметры	$E_1/E_2 = 1,$ $\rho_1/\rho_2 = 1$	$E_1/E_2 = 2,$ $\rho_1/\rho_2 = 2$	$E_1/E_2 = 4,$ $\rho_1/\rho_2 = 4$	$E_1/E_2 = 8,$ $\rho_1/\rho_2 = 8$	
Высокочастотный гребень, $V/C_{t,2}^0$	0,95 при $\lambda/H = 1,3$	0,87 при $\lambda/H = 1,3$	0,75 при $\lambda/H = 0,9$	0,6 при $\lambda/H = 0,6$	
Низкоскоростной гребень, при $V/C_{t,2}^0 = 0,4$ ; $\lambda/H$	2,85	2,8	2,5	2,3	
Максимум податливости	$\lambda/H$	3,5	3,5	2,5	3,2
	$V/C_{t,2}^0$	1,75	1,6	1,35	1,15
Фаза 90°	$\lambda/H$	< 0,4	> 0,4	> 0,6	> 0,85
	$V/C_{t,2}^0$	> 0,95	> 0,85	> 0,75	> 0,65

Модуль податливости  $|C_{\perp}^*|$  имеет форму пика с двумя боковыми гребнями: в сторону малых значений  $V/C_{t,2}^0$  (низкоскоростной гребень) и в сторону малых значений  $\lambda/H$  (высокочастотный гребень). При увеличении модуля упругости верхнего слоя (а соответственно и его плотности) пик податливости смещается в сторону меньших значений  $V/C_{t,2}^0$  и  $\lambda/H$ , это видно на рис. 2 и показано в табл. 1. Высокочастотный гребень также смещается в сторону меньших скоростей с  $V/C_{t,2}^0 = 0,95$  при  $E_1/E_2 = 1$  до  $V/C_{t,2}^0 = 0,6$  при  $E_1/E_2 = 8$ . При этом его величина уменьшается, и он разворачивается в сторону высоких частот. Низкоскоростной гребень смещается в сторону меньших значений  $\lambda/H$  (в сторону высоких частот пульсационного давления) с  $\lambda/H = 2,85$  при  $E_1/E_2 = 1$  до  $\lambda/H = 2,3$  при  $E_1/E_2 = 8$ .

Фаза податливости (отставание перемещения поверхности покрытия от приложенного давления) при малых значениях скорости, а также при больших значениях  $\lambda/H$  имеет малую величину ( $\theta_{\perp} < 10^\circ$ ) и изменяется слабо, т.е. имеет вид плато. С ростом  $V/C_{t,2}^0$  происходит быстрое изменение фазы примерно до  $180^\circ$ , и далее имеют место ее колебательные изменения. Это связано с кратными резонансами и антирезонансами, когда по толщине покрытия укладывается нечетное или четное число полуволн деформаций, что было показано в работах [3, 8]. Фаза податливости также смещается в сторону меньших скоростей с ростом модуля упругости внешнего слоя, как показано на рис. 3 и в табл. 1.

Результаты расчета по второму варианту, когда плотности слоев постоянны, а изменяется только модуль упругости внешнего слоя, представлены на рис. 4–6 и в табл. 2. В этом случае высокочастотный гребень смещается к большим скоростям, т.е. в противоположную сторону. Так  $V/C_{t,2}^0 = 0,95$  при  $E_1/E_2 = 1$ , но  $V/C_{t,2}^0 = 1,6$  при  $E_1/E_2 = 8$ . С ростом модуля упругости верхнего слоя высокочастотный гребень становится ниже и с уменьшением  $\lambda/H$  (ростом частоты) отклоняется в сторону высоких скоростей (рис. 4d). Низкоскоростной гребень имеет слабую тенденцию к уменьшению  $\lambda/H$  с ростом  $E_1/E_2$ , т.е. ведет себя примерно так же, как и в первом варианте. Пик податливости так же, как и в первом случае, смещается в сторону меньших значений  $V/C_{t,2}^0$  и  $\lambda/H$  с ростом  $E_1/E_2$ .

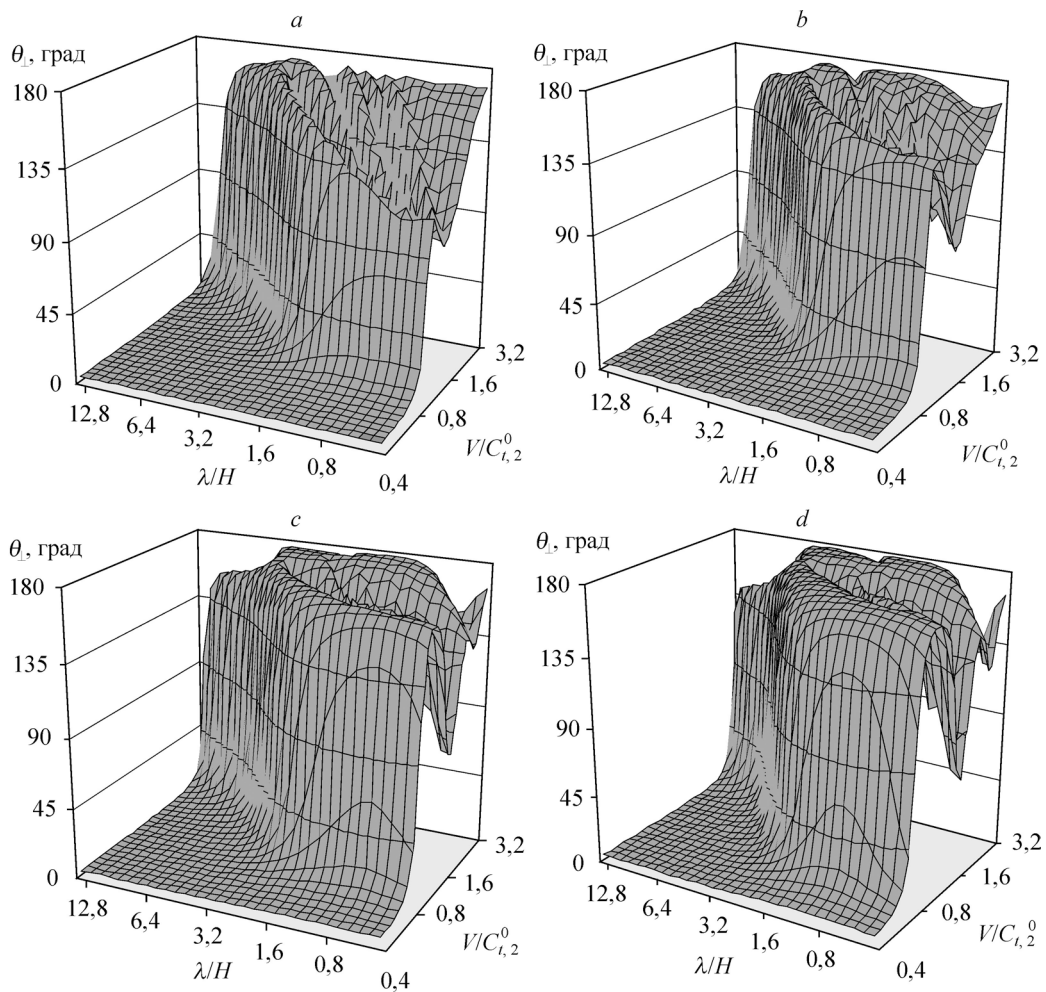


Рис. 3. Фаза нормальной компоненты безразмерной динамической податливости при  $\rho_1/\rho_2 = E_1/E_2$ . Значения параметров см. на рис. 2.

Изменение фазы с ростом модуля упругости верхнего слоя показано на рис. 6. При значениях  $\lambda/H > 2$  отставание перемещения поверхности покрытия не реагирует на изменение модуля упругости верхнего слоя. Наибольшие изменения наблюдаются при  $\lambda/H \approx 1$ , а при дальнейшем уменьшении  $\lambda/H$  значение фазы снова возвращается на уровень плато (рис. 5b–5d). С ростом  $E_1/E_2$  изменение фазы в области малых  $\lambda/H$  происходит более интенсивно по сравнению со случаем равенства  $E_1$  и  $E_2$  (рис. 5a), где при  $\lambda/H < 0,8$  фаза при  $V/C_{t,2}^0 < 1$  выходит на полку.

На основании вышеизложенного можно предположить два сценария взаимодействия покрытия с потоком, проиллюстрированных на рис. 7. Первый сценарий реализуется, когда  $V/C_{t,2}^0$  соответствует пику податливости. При этом взаимодействие покрытия с потоком является наиболее интенсивным, но происходит в узкой области частот. Такое взаимодействие можно назвать резонансным. Влияние тяжелого верхнего слоя в обоих рассмотренных выше случаях очень позитивно для практики — оно приводит к уменьшению значения  $V/C_{t,2}^0$ , что позволяет использовать материалы с большим модулем упругости, либо работать на более низких скоростях ( $U \approx 20\div 30$  м/с). Второй сценарий реализуется, когда  $V/C_{t,2}^0$  совпадает с высокочастотным гребнем.



Таблица 2

Нормальная компонента динамической податливости при вариации модуля упругости внешнего слоя при одинаковой плотности материалов слоев при  $h_2/h_1 = 9$ ,  $H = 10$  мм,  $\mu_1 = \mu_2 = 0,1$ ,  $\sigma = 0,475$

Параметры	$E_1/E_2 = 1$	$E_1/E_2 = 2$	$E_1/E_2 = 4$	$E_1/E_2 = 8$	
Высокочастотный гребень, $V/C_{t,2}^0$	0,61	0,69	0,8	1,12	
Низкочастотный гребень, $\lambda/H$	2,85	2,8	2,55	2,5	
Максимум податливости	$\lambda H$	3,5	3,2	3,0	2,8
	$V/C_{t,2}^0$	1,75	1,6	1,5	1,45

При этом полоса частот взаимодействия покрытия с потоком наиболее широка и сдвинута в высокие частоты, однако величина податливости невелика ( $|C_{\perp}^*| < 1$ ). Такое взаимодействие можно назвать широкополосным.

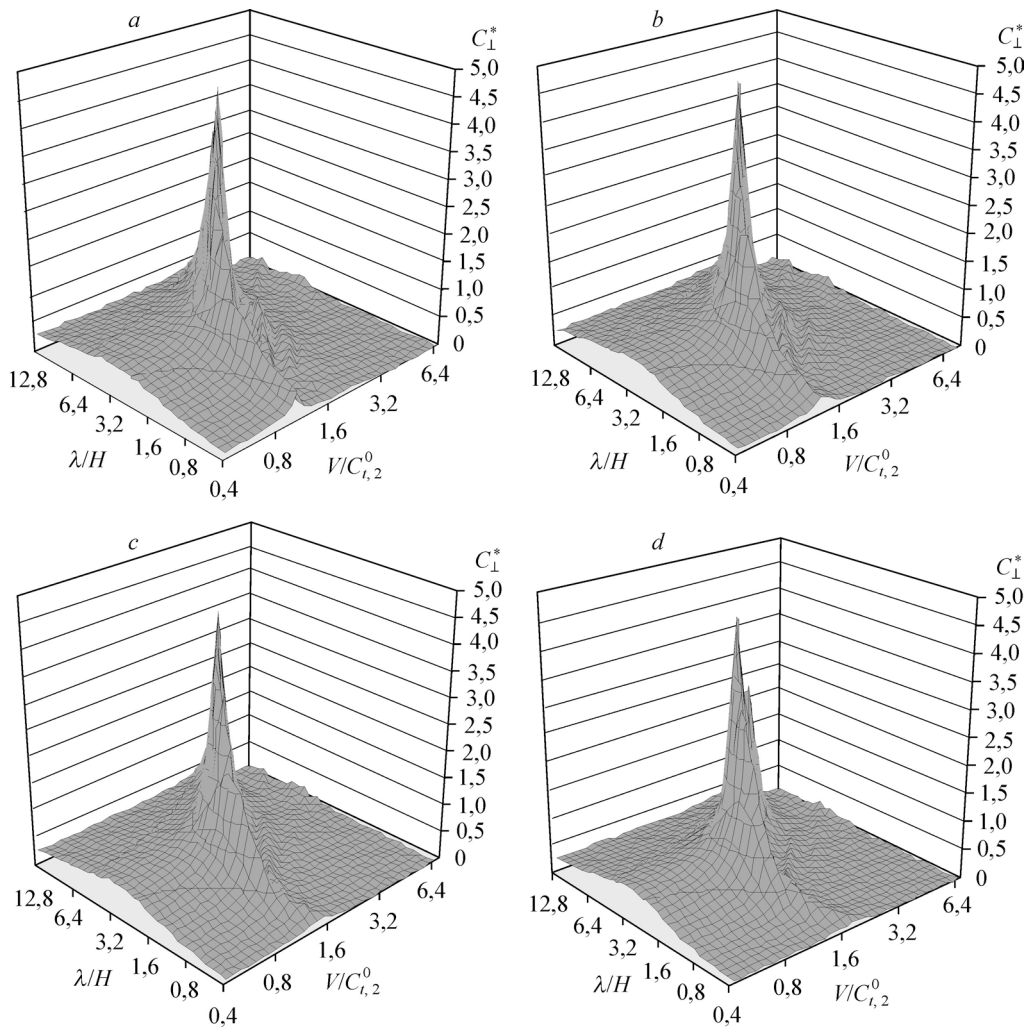


Рис. 4. Модуль нормальной компоненты безразмерной динамической податливости при вариации  $E_1/E_2$  и одинаковой плотности слоев  $\rho_1/\rho_2 = 1$ .

Значения параметров см. на рис. 2.

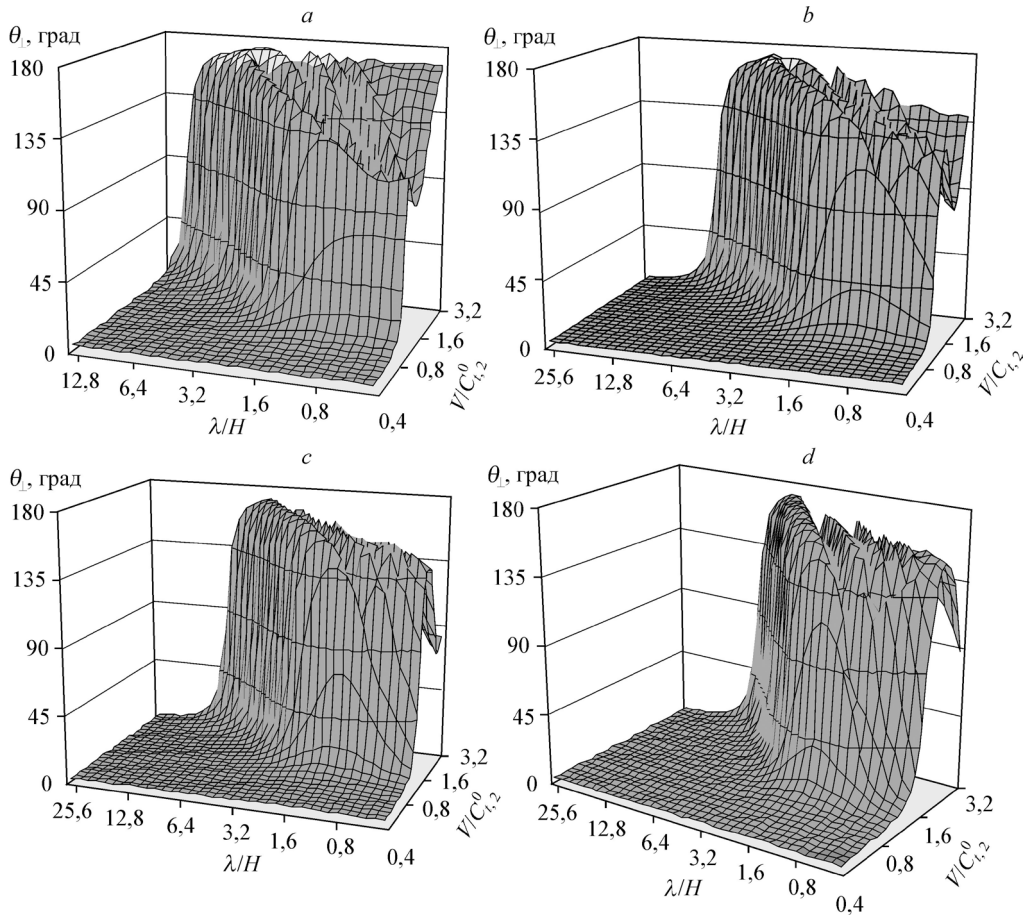


Рис. 5. Фаза нормальной компоненты безразмерной динамической податливости при вариации  $E_1/E_2$  и одинаковой плотности слоев  $\rho_1/\rho_2 = 1$ .  
Значения параметров см. на рис. 2.

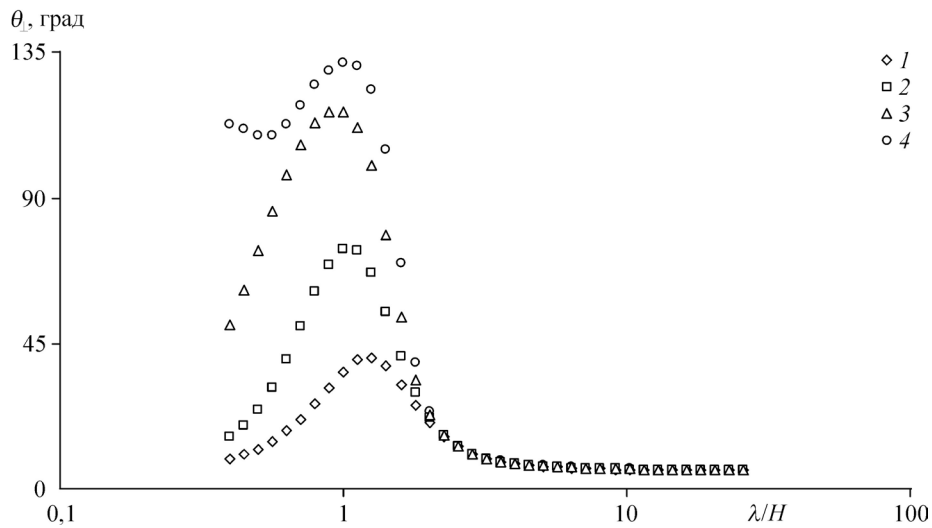


Рис. 6. Зависимость фазы податливости от  $\lambda/H$  при вариации отношения модулей упругости слоев в случае  $\rho_1/\rho_2 = 1$ .  
 $\mu_1 = \mu_2 = 0,1, \sigma = 0,475, E_1/E_2 = 1$  (1), 2 (2), 4 (3), 8 (4).

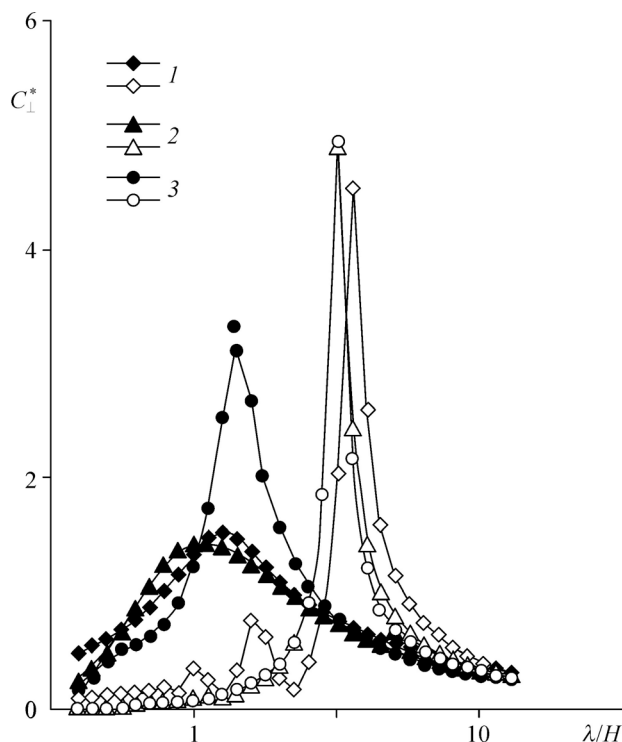


Рис. 7. Модуль динамической податливости при резонансном (светлые символы) и широкополосном (темные символы) взаимодействии податливого покрытия с потоком при пропорциональном изменении плотности и модуля упругости слоев.  
 1 —  $V/C_{t,2}^0 = 1,75, E_1/E_2 = 1$ ; 2 —  $V/C_{t,2}^0 = 1,35, E_1/E_2 = 4$ ; 3 —  $V/C_{t,2}^0 = 1,15, E_1/E_2 = 8; E_1 = 1 \text{ МПа}, \mu_1 = \mu_2 = 0,1, \sigma = 0,475$ .

### Заключение

В работе [10] в рамках одномерной модели деформации было показано, что тонкий тяжелый верхний слой в двухслойном покрытии улучшает его фазочастотную характеристику. В настоящей работе была использована двумерная модель деформации покрытия и рассчитаны модуль динамической податливости двухслойного покрытия и фазовое отставание смещения его поверхности от приложенной волны давления. Фаза и безразмерная податливость (динамическая податливость, нормированная на статическую податливость) зависят от двух безразмерных параметров: отношения длины волны к общей толщине покрытия —  $\lambda/H$ , и отношения скорости волны к скорости распространения сдвиговых возмущений в нижнем слое покрытия —  $V/C_{t,2}^0$ , и относительных толщин слоев —  $h_1/H, h_2/H$ . Податливость имеет вид пика с двумя гребнями — в сторону малых значений  $\lambda/H$  (высоких частот) и в сторону малых значений  $V/C_{t,2}^0$  (низких скоростей).

При увеличении отношения модулей упругости слоев пик податливости немного смещается в сторону низких скоростей и высоких частот, а низкоскоростной гребень — в сторону высоких частот. Обнаружена разница в поведении высокочастотного гребня в случае сохранения постоянной плотности слоев и в случае увеличения плотности верхнего слоя пропорционально его модулю упругости. В первом случае высокочастотный гребень сдвигается в сторону высоких скоростей, а во втором — в сторону низких. Фаза податливости изменяется аналогичным образом.

Знание этих закономерностей позволяет управлять колебательными характеристиками податливого покрытия для достижения оптимальных значений, необходимых для снижения турбулентного трения или затягивания ламинарно-турбулентного перехода. Покрытия, у которых модуль упругости слоев и их плотность изменяются пропорционально, более перспективны для практического применения, поскольку обладают большей прочностью для заданной скорости.

### Список литературы

1. Кулик В.М. Особенности деформирования податливых покрытий, обладающих повышенной прочностью // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18, № 4. С. 567–581.
2. Choi K.-S., Yang X., Clayton B.R., Glover E.J., Atlar M., Semenov B.N., Kulik V.M. Turbulent drag reduction using compliant surfaces // Proc. Royal Soc. London A. 1997. Vol. 453. P. 2229–2240.
3. Kulik V.M., Lee I., Chun H.H. Wave properties of coating for skin friction reduction // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. P. 075109–075110.
4. Yeo K.S., Zhao H.Z., Khoo B.C. Turbulent boundary layer over a compliant surface — absolute and convective // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 449. P. 141–168.
5. Kulik V.M., Boiko A.V., Semenov B.N., Seoudi B.M., Chun H.H., Lee I. Measurement of dynamic properties of viscoelastic materials // Experimental Mechanics. 2009. Vol. 49, No. 3. P. 417–425.
6. Boiko A.V., Kulik V.M., Seoudi B.M., Chun H.H., Lee I. Measurement method of complex viscoelastic material properties // Int. J. of Solids and Structures. 2010. Vol. 47, No. 3–4. P. 374–382.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
8. Кулик В.М. Вынужденные колебания слоя вязкоупругого материала под действием конвективной волны давления // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 2. С. 90–97.
9. Кулик В.М., Бойко А.В. Формфактор сжатого цилиндрического образца // Измерительная техника. 2014. № 8. С. 36–38.
10. Семенов Б.Н. Анализ деформационных характеристик вязкоупругих облицовок // Гидродинамика и акустика пристенных и свободных течений: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1981. С. 57-76.

*Статья поступила в редакцию 13 мая 2015 г.,  
после доработки — 4 июня 2015 г.*