

УДК 539.370

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ ВЫПУЧИВАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Методом стрельбы численно решены нелинейные краевые задачи осесимметричного выпучивания конических куполов под равномерным нормальным давлением. Задачи сформулированы для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с независимыми полями перемещений и поворотов. Рассмотрены два варианта граничных условий: шарнирное опирание и жесткое защемление. Прослежено разветвление решений краевых задач в зависимости от параметра давления и геометрических параметров куполов, получены немонотонные и разрывные кривые состояний равновесия, свидетельствующие о возможности катастрофы — потери устойчивости хлопком. В случае шарнирного опирания установлено наличие областей многозначности решений не только при внешнем, но и при внутреннем давлении. Для защемленного тонкостенного купола проведено сопоставление теоретических и экспериментальных результатов.

На основе работ [1, 2] выполнено большое число экспериментальных и теоретических исследований нелинейных деформаций пологих сферических куполов. Рассматривались варианты нагружения центральной сосредоточенной силой и нормальным давлением, распределенным по всей поверхности купола или по ее части. Краткий анализ результатов этих исследований проведен в [3]. Численный анализ задач во всех работах выполнен в рамках нелинейной модели для пологих оболочек [4, 5]. Применялся пошаговый (по параметру нагрузки) метод решения нелинейных краевых задач осесимметричной деформации купола. Этот метод используется для нахождения решений, ответвляющихся от основного, и требует специальных приемов построения решений в окрестности точки ветвления. Такие ограничения препятствуют получению изолированных решений, характерных для нелинейных задач деформации стержней, пластин и оболочек. Исключение составляет работа [6], в которой нелинейная задача деформации защемленного сферического купола под равномерным давлением решена методом стрельбы. В [7, 8] этот метод применен для численного анализа разветвленных форм изгиба стержней и арок.

В данной работе приведены результаты решения методом стрельбы краевых задач осесимметричного выпучивания конического купола — объекта, наиболее сложного для анализа из-за наличия остроконечной вершины. Нелинейные краевые задачи сформулированы в рамках математической модели деформации оболочек, содержащей независимые поля конечных перемещений и поворотов [9, 10].

Система уравнений. Рассмотрим куполообразную оболочку с осесимметричной базовой поверхностью A . На поверхности введем криволинейную систему координат t_J с локальным ортонормированным базисом $\mathbf{a}_J(t_1, t_2)$, $J = 1, 2, 3$. Параметр $t_1 \equiv t \in [0, 1]$ отсчитывается вдоль меридиана, $t_2 \in [0, 2\pi]$ — вдоль параллели, $t_3 \in [-h, h]$ — вдоль нормали к поверхности ($2h$ — толщина купола). Введем также цилиндрическую систему координат (y, t_2, z) с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_J(t_2)$. Поверхностный базис отличается от цилиндрического поворотом на угол $\theta_2(t)$ относительно вектора \mathbf{e}_2 . При этом $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$, а положительное направление \mathbf{e}_2 и положительное значение угла определяются по правилу

правого винта. Соответствующее преобразование поворота выражается матрицей

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

В исходном (ненапряженном) состоянии меридиан купола задается параметрическими уравнениями

$$y = r_2(t), \quad z = r_3(t), \quad \theta = \theta_2(t) \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1)$$

По определению справедливы равенства $dr_2/ds_1 = \cos \theta_2$, $dr_3/ds_1 = -\sin \theta_2$, $ds_1 = l dt$, $ds_2 = r_2 dt_2$, где ds_1 и ds_2 — элементы длины дуги меридиана и параллели; l — длина образующего меридиана.

Изучается осесимметричная деформация купола, в процессе которой базовая поверхность остается осесимметричной и представляется подобными (1) зависимостями

$$y = z_2(t), \quad z = z_3(t), \quad \theta = \theta(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

где z_2 , z_3 — искомые координаты точки в цилиндрической системе; θ — искомый угол поворота локального базиса относительно цилиндрического. Матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

преобразует цилиндрический базис e_J в повернутый базис $a_J^0 = \Theta \cdot e_J$.

Для анализа осесимметричной деформации купола используются уравнения нелинейной модели деформации оболочки с независимыми полями конечных перемещений и поворотов [9, 10]. Материал, из которого изготовлен купол, считается изотропным и линейно-упругим.

Исходная система уравнений включает моментные определяющие соотношения (следующие из (2.9) в [10])

$$\begin{aligned} U_{11} &= (1 - \nu^2)F^{-1}X_{11} - \nu U_{22}, & V_{11} &= (1 - \nu^2)H^{-1}Y_{11} - \nu V_{22}, \\ U_{13} &= \gamma F^{-1}X_{13}, & X_{22} &= \nu X_{11} + F U_{22}, & Y_{22} &= \nu Y_{11} + H V_{22}, \end{aligned} \quad (2)$$

кинематические зависимости (следующие из (1.6) в [10])

$$\begin{aligned} V_{11} &= (\theta - \theta_2)', & V_{22} &= r_2^{-1}(\sin \theta - \sin \theta_2), & U_{22} &= r_2^{-1}(z_2 - r_2), \\ z_2' &= (1 + U_{11}) \cos \theta + U_{13} \sin \theta, & z_3' &= -(1 + U_{11}) \sin \theta + U_{13} \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

и статические уравнения (следующие из (1.7) в [10])

$$\begin{aligned} (r_2 X_1)' - X_{22} + r_2 P_1 &= 0, & (r_2 X_3)' + r_2 P_3 &= 0, \\ (r_2 Y_{11})' - Y_{22} \cos \theta - r_2 X_{13} + r_2 Q_2 &= 0, \\ X_{11} &= X_1 \cos \theta - X_3 \sin \theta, & X_{13} &= X_1 \sin \theta + X_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

В (2)–(4) $F = 2hE$; $3H = 2h^3E$; $\gamma = 2(1 + \nu)$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $U_{iJ}(t)$, $V_{ii}(t)$, $X_{iJ}(t)$, $Y_{ii}(t)$ — компоненты метрических и изгибных деформаций, усилий и моментов в повернутом базисе; $X_1(t)$, $X_3(t)$, $P_1(t)$, $P_3(t)$, $Q_2(t)$ — компоненты усилий, поверхностных сил и моментов в цилиндрическом базисе; штрих обозначает производную по s_1 ; $i = 1, 2$. Уравнения (2) и первые три уравнения в (3) сформулированы в повернутом базисе, уравнения (4) и последние два уравнения в (3) — в цилиндрическом.

Система уравнений (2)–(4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y'_0 &= \theta'_2 + x^{-1}[(1 - \nu^2)y_1 - \nu(\sin y_0 - \sin \theta_2)], \\ y'_1 &= x^{-1}(\nu y_1 + \sin y_0 - \sin \theta_2) \cos y_0 + \varepsilon^{-1}y_7 - xq_2, \\ y'_2 &= \varepsilon\gamma x^{-1}y_7 \sin y_0 + (1 + y_8) \cos y_0, \\ y'_3 &= \varepsilon\gamma x^{-1}y_7 \cos y_0 - (1 + y_8) \sin y_0, \\ y'_4 &= x^{-1}[\nu y_6 + \varepsilon^{-1}(y_2 - x)] - xp_1, \\ y'_5 &= -xp_3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_6 = y_4 \cos y_0 - y_5 \sin y_0, \quad y_7 = y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0, \quad y_8 = x^{-1}[(1 - \nu^2)\varepsilon y_6 - \nu(y_2 - x)],$$

где $y_0 = \theta$, $y_1 = xY_{11}l/H$, $y_2 = z_2/l$, $y_3 = z_3/l$, $y_4 = xX_1/C$, $y_5 = xX_3/C$ — неизвестные функции; $\varepsilon^2 = h^2/(3l^2)$, $C = \varepsilon F$, $p_J = P_Jl/C$, $q_2 = Q_2l^2/H$, $x = r_2/l$ — параметры; штрих обозначает производную по независимой переменной t .

Система (5) описывает нелинейный осесимметричный изгиб куполообразной оболочки при заданных значениях параметров нагрузки p_1 , p_3 , q_2 и жесткости ε , γ , ν и заданных условиях закрепления опорного контура. Она сингулярна по переменной t (в точке $t = 0$) и малому параметру ε . Проанализированы численные решения двух нелинейных краевых задач, моделирующих осесимметричный изгиб шарнирных и защемленных конических куполов.

Шарнирный конический купол под нормальным давлением. Исходная форма купола задается постоянными параметрами h , l и углом наклона меридиана к плоскости основания α . Параметрами l и α определяются высота купола $a = l \sin \alpha$ и радиус опорного контура $b = l \cos \alpha$. Функции (1) имеют вид $\theta_2 = \alpha$, $r_3 = a(1 - t)$, $r_2 = bt$, и, следовательно, $x = t \cos \alpha$.

Изучается деформация купола под действием равномерного нормального давления интенсивности P на единицу площади исходной базовой поверхности. Компоненты поверхностной нагрузки в системе (5) задаются функциями $p_1 = -p \sin y_0$, $p_3 = -p \cos y_0$, $q_2 = 0$, где $p = Pl/C$ — нормированный параметр давления, положительный при нагружении купола извне. Рассматривается купол, шарнирно закрепленный по опорному контуру, так что в граничной точке $t = 1$ выполняются условия отсутствия момента и перемещений

$$y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = \cos \alpha, \quad y_3(1) = 0. \quad (6)$$

В полюсе $t = 0$ должны быть выполнены условия симметрии

$$y_0(0) = \alpha, \quad y_2(0) = 0, \quad [t^{-1}y_5(t)]_{t \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (7)$$

Нелинейная краевая задача (5)–(7) решалась методом стрельбы: в точке $t = 1$ кроме условия (6) задавались еще три условия

$$y_0(1) = k_1, \quad y_4(1) = k_2, \quad y_5(1) = k_3 \quad (8)$$

и при варьировании параметров k_J численно строилось трехпараметрическое семейство решений $\mathbf{y}(t, k_J)$ одноточечной задачи (5), (6), (8) (\mathbf{y} — вектор искомых функций). Значения варьируемых параметров, соответствующие решению исходной краевой задачи, итерациями находились из трех условий (7), заданных в точке $t = 0$. На практике такой алгоритм решения задачи оказался неэффективным из-за неустойчивости, обусловленной наличием полюсных особенностей в системе (5). Достаточная устойчивость решения по отношению к малым возмущениям граничных параметров достигнута в модифицированном алгоритме, в котором в близкой к полюсу точке $t = \delta$ использовались приближенные

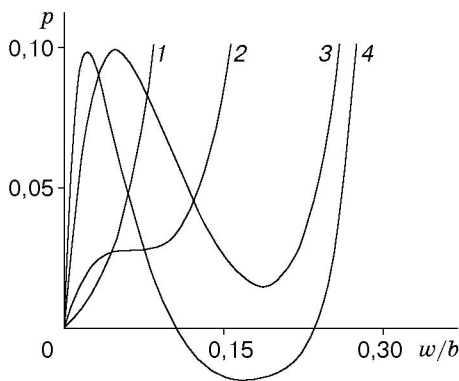


Рис. 1

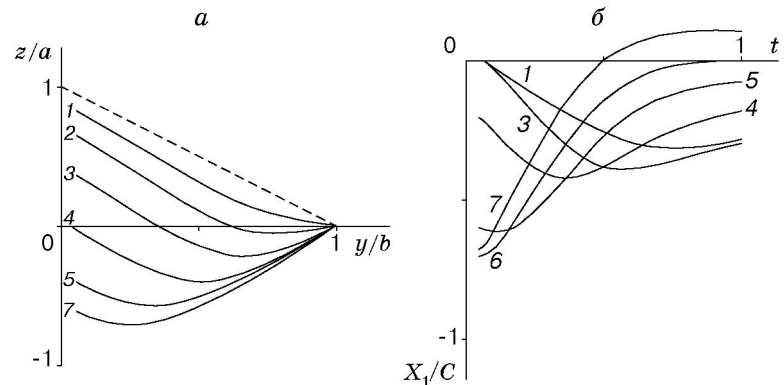


Рис. 2

Рис. 1. Кривые равновесных состояний для шарнирных оболочек:

1 — $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0,025$; 2 — $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0,025$; 3 — $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,025$; 4 — $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$

Рис. 2. Формы изгиба (а) и радиальные усилия (б) шарнирного купола с параметрами $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$ для значения $(p; w/a)$:

1 — (0,09; 0,0786); 2 — (0,06; 0,293); 3 — (0; 0,590); 4 — (-0,02; 0,968); 5 — (0; 1,338); 6 — (0,04; 1,469); 7 — (0,1; 1,557); штриховая кривая — начальная конфигурация

равенства $X_{22} \approx X_{11}$, $Y_{22} \approx Y_{11}$, $y_5 \approx (1/2)p\delta^2 \cos^2 \alpha$. Первые два из них становятся точными в полюсе. Третье соотношение получено интегрированием на отрезке $[0, \delta]$ последнего уравнения в (5) при $y_0 = \alpha$. При численной реализации алгоритма использовался пакет программ Mathcad-7.

Для куполов с параметрами жесткости $\gamma = 2,5$; $\nu = 0,25$ на рис. 1 представлены кривые равновесных состояний — зависимости $p(w/b)$ (w — осевое перемещение вершины купола) при различных значениях геометрических параметров α , ε куполов. Кривая 1 соответствует шарнирной круговой пластине. При $\varepsilon = 0,025$, $0 \leq \alpha \leq \pi/36$ кривые состояний монотонны, при $\alpha > \pi/36$ кривые 3, 4 имеют точки экстремума, что свидетельствует о многозначности решений краевой задачи (5)–(7) в конечном интервале $p^- \leq p \leq p^+$, где p^- , p^+ — минимальное и максимальное значения функции $p(w/b)$. Состояния (формы, моды) равновесия, соответствующие восходящим от начала координат участкам кривых, будем называть основными, остальные — выпученными. Для неограниченно упругих куполов основные формы существуют в полубесконечном интервале $-\infty < p \leq p^+$ (участки кривых для значений $p < 0$, соответствующих внутреннему давлению, на рис. 1 не показаны). Поведение кривой 4 свидетельствует о том, что при уменьшении толщины купола появляются выпученные формы в области отрицательных значений параметра нагрузки.

Для купола с геометрическими параметрами $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$ на рис. 2, а показаны равновесные конфигурации в координатах $(y/b, z/a)$, на рис. 2, б — распределения радиальных усилий для нескольких значений пар $(p; w/a)$. Штриховая кривая соответствует начальной конфигурации, кривая 1 — основная мода для значения p , близкого к критическому значению $p^+ \approx 0,098$, кривые 2–7 — выпученные моды. Следует отметить, что мода 4 соответствует отрицательному значению p , а моды 3 и 5, соответствующие значению $p = 0$, являются напряженными (в отличие от начального состояния купола) и поддерживаются радиальным опорным усилием $X_1(1)$.

Защемленный конический купол под нормальным давлением. В отличие от (6) условия защемления купола по опорному контуру (отсутствие поворотов и пере-

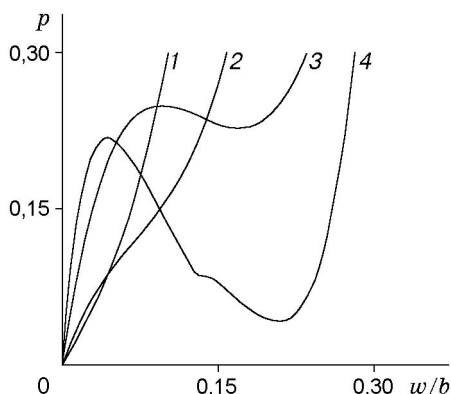


Рис. 3

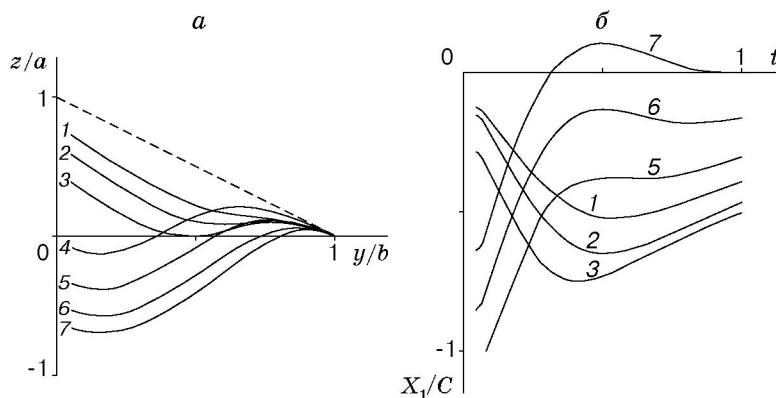


Рис. 4

Рис. 3. Кривые равновесных состояний для защемленных оболочек:

1 — $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0,025$; 2 — $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0,025$; 3 — $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,025$; 4 — $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$

Рис. 4. Формы изгиба (а) и радиальные усилия (б) защемленного купола с параметрами $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$ для значения $(p; w/a)$:

1 — (0,217; 0,230); 2 — (0,2; 0,366); 3 — (0,14; 0,558); 4 — (0,05; 1,034); 5 — (0,05; 1,296); 6 — (0,15; 1,484); 7 — (0,3; 1,604); штриховая кривая — начальная конфигурация

мещений) формулируются равенствами

$$y_0(1) = \alpha, \quad y_2(1) = \cos \alpha, \quad y_3(1) = 0. \quad (9)$$

Для защемленных куполов с теми же параметрами, что и у шарнирных, результаты численного решения нелинейной краевой задачи (5), (7), (9) методом стрельбы представлены на рис. 3, 4.

Кривые равновесных состояний куполов показаны на рис. 3. Кривая 1 соответствует защемленной круговой пластине. Поведение кривых 3, 4 свидетельствует о том, что выпученные формы равновесия имеются лишь в области положительных значений параметра p , а при $p = 0$ имеется только ненапряженное состояние равновесия. Для купола с параметрами $\alpha = \pi/18$, $\varepsilon = 0,013$ на рис. 4, а показаны равновесные конфигурации, на рис. 4, б — распределения радиальных усилий, соответствующие нескольким значениям пар $(p; w/a)$: кривая 1 — основная мода для значения p , близкого к критическому значению $p^+ \approx 0,218$, кривые 2–7 — выпученные моды.

Для сравнения с экспериментальными данными, полученными в работе [11], выполнен расчет защемленного конического купола с параметрами $\alpha = \pi/36$, $\gamma = 2,7$, $\varepsilon = 0,0025$, $\nu = 0,35$. В эксперименте этим параметрам соответствовала медная коническая оболочка толщиной $2h = 0,6$ мм с диаметром основания $2b = 138$ мм, модуль Юнга $E \approx 10^5$ МПа. Экспериментальные данные и результаты расчетов представлены на рис. 5 в координатах (q, P) (P — давление в мегапаскалях; q — параметр состояния, определяемый как отношение объема, заключенного между деформированной и недеформированной поверхностями купола, к начальному объему купола). Экспериментальная зависимость $P(q)$ представлена на рис. 5 кривой 1, расчетная — кривыми 2, 3. Видно, что расчетная кривая состояний является разветвленной. Пересечением ветвей 2 и 3 определяется расчетная точка бифуркации осесимметричных состояний равновесия купола.

На рис. 6, а показаны полученные в результате расчета осесимметричные равновесные конфигурации, на рис. 6, б — распределения изгибающих моментов экспериментального ку-

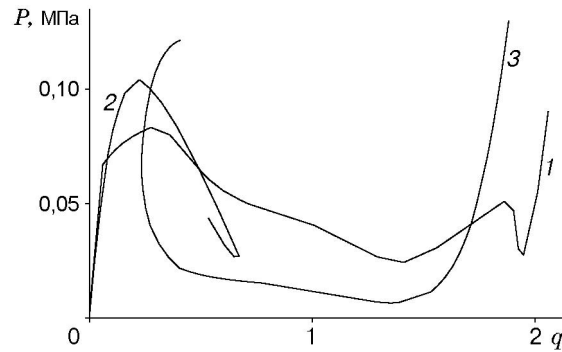


Рис. 5. Экспериментальная (1) и теоретические (2, 3) кривые равновесных состояний купола с параметрами $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0,0025$

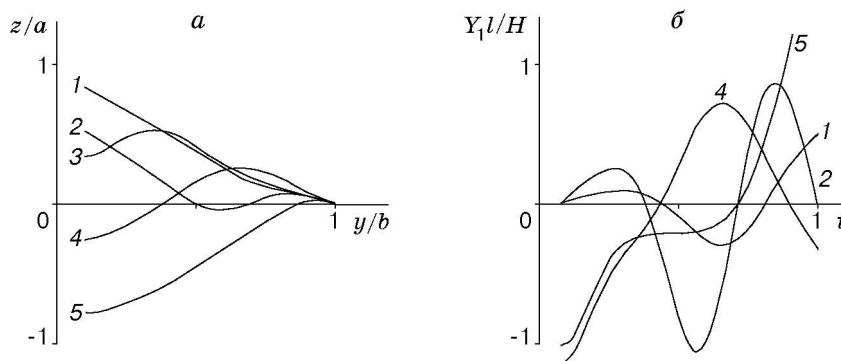


Рис. 6. Формы изгиба (а) и изгибающие моменты (б) защемленного купола с параметрами $\alpha = \pi/36$, $\varepsilon = 0,0025$ для значений $(p; q)$:
 1 — (0,045; 0,302); 2 — (0,012; 0,667); 3 — (0,055; 0,365); 4 — (0,0028; 1,383);
 5 — (0,06; 1,87)

пола для нескольких точек $(p; q)$ кривых 2, 3 (см. рис. 5): кривая 1 — основная мода для значения p , близкого к верхнему критическому значению $p^+ \approx 0,0475$; кривая 4 — выпученная мода для нижней критической точки кривой 3; кривые 3, 5 — выпученные моды, соответствующие точкам, расположенным выше верхней критической точки на левом и правом восходящих участках кривой 3.

Существенное различие экспериментальных и расчетных результатов обусловлено тремя факторами: 1) деформация экспериментальной оболочки близка к осесимметричной до значения $P \approx 0,068$ МПа, при котором началось интенсивное волнообразование (три волны) в окружном направлении, что соответствует резкому изменению углового коэффициента касательной ниже точки максимума (кривая 1 на рис. 5), затем продолжалось несимметричное выпучивание; 2) деформация экспериментальной оболочки не была полностью упругой: при снятии нагрузки оболочка осталась в вывернутом состоянии с явными следами пластических деформаций вдоль опорного контура и в гребнях окружных волн; 3) экспериментальная кривая состояний не является непрерывной, поскольку на ней имеются участки скачкообразного изменения давления при малом изменении объема (в окрестности точки $q = 2$), которые представляют собой отображение динамических скачков из одного равновесного состояния в другое. Первым фактором объясняется различие экспериментальной и расчетной кривых в окрестности точки максимума и на участке убывания функции $P(q)$. Двумя последними факторами можно объяснить различие восходящих участков этих кривых в окрестности точки $q = 2$.

Следовательно, начиная со значения $q \approx 0,083$, экспериментальная и расчетная кривые на рис. 5 соответствуют разным состояниям купола: первая — упругопластическому, осциллирующему по окружной координате, вторая — упругому, осесимметричному. Совпадение этих кривых на участках возрастания от начала координат подтверждает высокую точность постановки осесимметричной задачи и ее численного анализа.

Теоретические результаты получены в предположении абсолютной упругости и линейности материала. Учитывались только нелинейности кинематического происхождения. Сравнение с экспериментом показывает, что именно эти нелинейности определяют общий характер процесса деформирования оболочек. Отклонения поведения материала оболочки от упругого линейного приводят к изменению лишь количественных характеристик процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biezeno C. B.** Über die Bestimmung der “Durchschlagkraft” einer schwachgekrümmten, kreisförmigen Platte // Z. angew. Math. Mech. 1935. Bd 15. S. 10–22.
2. **Karman T., Tsien H. S.** The buckling of spherical shells on external pressure // J. Aeronaut. Sci. 1939. V. 7. P. 43–50.
3. **Григолюк Э. И., Кабанов В. В.** Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.
4. **Marguerre K.** Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung // Proc. of the 5th Intern. congress on appl. mech., Cambridge, 1938. N. Y.: J. Willey and Son, 1939. P. 93–101.
5. **Власов В. З.** Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек // Прикл. математика и механика. 1944. Т. 8, № 2. С. 109–140.
6. **Феодосьев В. И.** Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 2. С. 265–274.
7. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 141–147.
8. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба арок // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 155–160.
9. **Шкутин Л. И.** Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 120–132.
10. **Шкутин Л. И.** Инкрементальная модель деформации оболочки // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 202–207.
11. **Шкутин Л. И., Шубин И. А.** Экспериментальное исследование устойчивости пологих конических оболочек при статическом нагружении давлением // Прикл. механика. 1966. Т. 2, № 6. С. 63–70.

*Поступила в редакцию 3/IV 2001 г.,
в окончательном варианте — 9/VII 2001 г.*