

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

О. В. Бычек, В. М. Садовский

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск

На основе формулировки граничных условий контактного взаимодействия деформируемых тел с учетом трения Кулона в виде квазивариационного неравенства предлагается новый алгоритм численного решения динамических контактных задач, обладающий вычислительной устойчивостью и гарантирующий выполнение геометрических ограничений в заранее неизвестной зоне контакта, условия неотрицательности нормального давления и противоположную направленность векторов касательной скорости и касательного напряжения при проскальзывании. Приводятся результаты расчетов контактной задачи для упругопластического тела в двумерной постановке.

Динамические контактные задачи теории упругости и пластичности с заранее неизвестной, изменяющейся в процессе деформирования зоной контакта [1–5] имеют широкую область приложений, связанную с исследованием процессов удара и пробивания преград, взрывной и гидровзрывной штамповки, механической обработки материалов и т. п. Как правило, при численном решении задач такого рода применяются явные по времени процедуры расчета контактных границ, что неизбежно приводит либо к пересечению деформируемых тел, либо к нарушению дискретных динамических условий в зоне контакта.

В настоящей работе развивается подход, основанный на точной формулировке граничных условий контакта с учетом сил трения в виде квазивариационных неравенств [6, 7]. Применение этой формулировки позволяет строить универсальные и экономичные итерационные процедуры, обладающие вычислительной устойчивостью и гарантирующие выполнение геометрических ограничений в зоне контакта, условия неотрицательности нормального давления и противоположную направленность векторов касательных скорости и напряжения при проскальзывании.

**1. Граничные условия контакта.** Рассмотрим сначала контактное взаимодействие деформируемого тела с абсолютно жестким штампом, занимающим пространственную область  $\varphi(\mathbf{x}) \leq 0$  с кусочно-гладкой поверхностью  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ . Предположим, что в начальном недеформированном состоянии тела можно выделить ту часть его границы  $S_c$ , материальные точки которой в каждый последующий момент времени находятся в контакте со штампом или свободны от напряжений, в то время как на оставшейся части выполняются граничные условия достаточно общего вида, но контакт со штампом невозможен. Вектор перемещения  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  в лагранжевом описании удовлетворяет на  $S_c$  геометрическому ограничению  $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \geq 0$ , из которого с учетом разложения  $\mathbf{u} = \mathbf{u}|_{t-\Delta t} + \mathbf{v}\Delta t + O(\Delta t^2)$  после преобразований получим приближенное ограничение на вектор скорости точки  $\mathbf{v}\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}|_{t-\Delta t}) \geq -\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}|_{t-\Delta t})/\Delta t$ , которое может быть использовано при численной реализации условий контакта. Предельным переходом по  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим точное ограничение

$$\mathbf{v}\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \geq -\delta(\mathbf{x} + \mathbf{u}), \quad \delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \varphi(\mathbf{x}) = 0, \\ +\infty, & \varphi(\mathbf{x}) > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Следуя [6–8], запишем условия контакта с учетом сил трения Кулона в виде неравенства

$$(\mathbf{v}^* - \mathbf{v})\boldsymbol{\sigma}_n + f|\sigma_{nn}|(|\mathbf{v}_\tau^*| - |\mathbf{v}_\tau|) \geq 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n(t, \mathbf{x})$  — вектор напряжений на площадке деформированной поверхности тела с нормалью  $\mathbf{n}$ , индекс  $\tau$  служит для обозначения проекций векторов на касательную плоскость,  $f$  — коэффициент трения скольжения,  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{x})$  — произвольная допустимая вариация скорости в точке границы  $S_c$ , удовлетворяющая ограничению (1.1). Заметим, что нормаль к поверхности тела в зоне контакта  $S_t = \{\mathbf{x} \in S_c. \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = 0\}$  вычисляется по формуле  $\mathbf{n} = -\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}) / |\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u})|$ , поэтому (1.1) фактически содержит лишь нормальную составляющую вектора скорости  $v_n$ .

В соответствии с общепринятой терминологией неравенство (1.2) является квазивариационным, так как ограничение зависит от неизвестного вектора  $\mathbf{u}$ . Это неравенство представляет собой формулировку принципа, согласно которому виртуальная мощность нормального напряжения в зоне контакта, равная разности между мощностью поверхностных напряжений  $\mathbf{v}^*\boldsymbol{\sigma}_n$  и мощностью сил трения  $-f|\sigma_{nn}||\mathbf{v}_\tau^*|$ , принимает минимальное значение на действительном векторе скорости.

Пусть  $\gamma$  — множитель Лагранжа, отвечающий ограничению (1.1). По теореме Куна — Таккера упомянутый выше принцип минимума выпуклой относительно вектора  $\mathbf{v}^*$  функции при ограничении эквивалентен принципу безусловного минимума лагранжиана

$$L(\mathbf{v}^*, \gamma) = \mathbf{v}^*\boldsymbol{\sigma}_n + f|\sigma_{nn}||\mathbf{v}_\tau^*| - \gamma\mathbf{v}^*\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}),$$

причем множитель  $\gamma$  неотрицателен и равен нулю, если  $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}) > 0$ .

В случае  $\mathbf{v}_\tau \neq 0$  условие минимума  $L$  в дифференциальной форме приводит к уравнениям  $\sigma_{nn} = -\gamma|\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u})|$ ,  $\sigma_{n\tau} = -f|\sigma_{nn}|\mathbf{v}_\tau / |\mathbf{v}_\tau|$ . При  $\mathbf{v}_\tau = 0$  производной лагранжиана не существует. В этом случае непосредственно из условия  $L(\bar{\mathbf{v}}, \gamma) \geq L(\mathbf{v}, \gamma)$  ( $\bar{\mathbf{v}}$  — произвольный вектор, нормальная составляющая которого равна  $v_n$ ) следует, что  $\bar{\mathbf{v}}_\tau\sigma_{n\tau} + f|\sigma_{nn}||\bar{\mathbf{v}}_\tau| \geq 0$ , откуда с учетом неравенства  $|\bar{\mathbf{v}}_\tau\sigma_{n\tau}| \leq |\bar{\mathbf{v}}_\tau||\sigma_{n\tau}|$ , получим  $|\sigma_{n\tau}| \leq f|\sigma_{nn}|$ . Таким образом, квазивариационное неравенство (1.2) в точности соответствует закону трения Кулона.

Так как приближенное ограничение содержит проекцию вектора скорости на направление  $\hat{\mathbf{n}} = -\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u})_{|t-\Delta t} / |\nabla\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u})_{|t-\Delta t}|$ , то в квазивариационном неравенстве, предназначенном для численной реализации условий контакта, необходимо сделать замену напряжения  $\sigma_{nn}$  на  $\sigma_{n\hat{n}}$  и скорости  $\mathbf{v}_\tau$  на проекцию  $\mathbf{v}_\tau$  вектора скорости на плоскость с нормалью  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Естественно, что точная формулировка условий контакта не зависит от функции  $\varphi$ , параметризующей поверхность штампа. Ограничение, эквивалентное формуле (1.1), можно получить другим способом, не предполагающим конкретизацию  $\varphi$ . При этом строится специальное отображение  $\pi$  пространства на границу или часть границы штампа, для которого каждая материальная точка  $\mathbf{x} + \mathbf{u}$  зоны контакта является неподвижной, переходящей при этом отображении в себя; например, отображение проектирования, ставящее в соответствие данной точке пространства ближайшую точку штампа. Если такое отображение известно, то приближенное ограничение записывается в виде

$$\mathbf{v}^*\hat{\mathbf{n}} \leq |\mathbf{x} + \mathbf{u}|_{|t-\Delta t} - \pi(\mathbf{x} + \mathbf{u})_{|t-\Delta t}| / \Delta t, \quad (1.3)$$

где  $\hat{\mathbf{n}}$  — единичный вектор, равный внешней нормали к деформированной поверхности тела, если точка  $\mathbf{x}$  принадлежит зоне контакта  $S_{t-\Delta t}$ , и вектору  $-\{\mathbf{x} + \mathbf{u}|_{t-\Delta t} - \pi(\mathbf{x} + \mathbf{u}|_{t-\Delta t})\} / |\mathbf{x} + \mathbf{u}|_{t-\Delta t} - \pi(\mathbf{x} + \mathbf{u}|_{t-\Delta t})|$  вне зоны контакта.

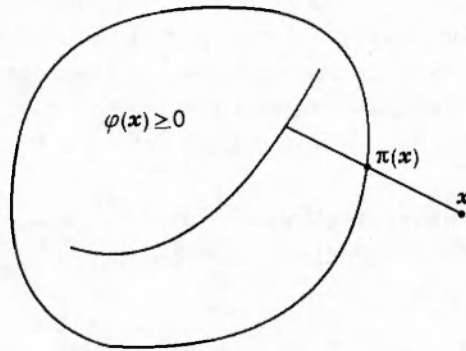


Рис. 1

Описанный способ удобен для численного решения динамических контактных задач, если процесс счета ведется шагами по времени. При его практической реализации в качестве  $\pi(x)$  можно использовать отображение, ставящее в соответствие точке  $x$  расстояние от нее до точки пересечения границы штампа прямой, проходящей через  $x$  и некоторую фиксированную внутреннюю точку штампа, или прямой, ортогональной заданной гладкой поверхности внутри штампа (рис. 1).

Ограничение (1.3) имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Точное ограничение (1.1) может быть получено из него в результате предельного перехода по  $\Delta t$ .

Подобным способом сформулируем условия контакта двух деформируемых тел. Пусть  $S_c^+$  и  $S_c^-$  — части границ этих тел в переменных Лагранжа, целиком включающие зоны контакта  $S_t^\pm = \{x^\pm \in S_c^\pm: x^+ + u^+(t, x^+) = x^- + u^-(t, x^-)\}$  в каждый фиксированный момент времени  $t$ , и задано отображение  $\pi^-$  некоторой области пространства на образ границы  $S_c^-$  в деформированном состоянии, зависящее от времени как от параметра и переводящее всякую материальную точку из зоны контакта в себя. Считая, что область определения отображения  $\pi^-$  содержит в себе деформированную границу  $\tilde{S}_c^-$ , запишем приближенное геометрическое ограничение на скорости точек  $x^+$  и  $x^- = \pi^-(x^+ + u^+) \Big|_{t-\Delta t} - u^- \Big|_{t-\Delta t}$  в виде

$$(v^{*+} - v^{*-})\hat{n} \leq |x^+ + u^+ \Big|_{t-\Delta t} - x^- - u^- \Big|_{t-\Delta t}| / \Delta t, \tag{1.4}$$

где вектор  $\hat{n}$  равен  $n^+ = -n^-$  при  $x^\pm \in S_{t-\Delta t}^\pm$  и вектору

$$-(x^+ + u^+ \Big|_{t-\Delta t} - x^- - u^- \Big|_{t-\Delta t}) / |x^+ + u^+ \Big|_{t-\Delta t} - x^- - u^- \Big|_{t-\Delta t}|$$

для точек, не принадлежащих  $\tilde{S}_{t-\Delta t}^\pm$ .

При численной реализации отображение  $\pi^-$ , относящееся к моменту времени  $t - \Delta t$ , может быть построено по одному из описанных выше методов. Точное ограничение на скорости получается из (1.4) при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$v^{*+}n^+ + v^{*-}n^- \leq \begin{cases} 0, & x^\pm \in S_t^\pm, \\ +\infty, & x^\pm \notin S_t^\pm. \end{cases} \tag{1.5}$$

Условия контакта представляются в виде квазивариационного неравенства

$$(v^{*+} - v^+)\sigma_n^+ + (v^{*-} - v^-)\sigma_n^- + (1/2)f(|\sigma_{nn}^+ + \sigma_{nn}^-|)(|v_r^{*+} - v_r^{*-}| - |v_r^+ - v_r^-|) \geq 0, \tag{1.6}$$

которое можно интерпретировать как принцип минимума мощности нормального напряжения в зоне контакта. Эквивалентность этого принципа и закона трения Кулона для двух

деформируемых тел может быть установлена при помощи теоремы Куна — Таккера аналогично случаю контакта деформируемого тела и штампа. Приближенной формулировке условий контактного взаимодействия тел отвечает квазивариационное неравенство, получаемое заменой нормальных напряжений напряжениями  $\pm \sigma_n^\pm \hat{n}$ , а разности касательных составляющих векторов скоростей — проекцией вектора  $\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$  на плоскость, ортогональную  $\hat{n}$ .

**2. Алгоритмы корректировки скоростей.** Для численной реализации условий контакта приведем квазивариационные неравенства (1.2), (1.6) и приближенные ограничения (1.3), (1.4) к единообразной форме:

$$(\mathbf{w}^* - \mathbf{w})A(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}) + f |\mathbf{b}(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})| \{ \omega(\mathbf{w}^*) - \omega(\mathbf{w}) \} \geq 0, \quad \mathbf{w}^* \mathbf{g} \geq h, \quad \mathbf{w} \mathbf{g} \geq h. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{w}$  — подлежащий определению  $m$ -мерный вектор, который в случае контакта деформируемого тела и штампа содержит компоненты вектора скорости заданной точки — узла сеточной области относительно декартовой системы координат, а в случае двух деформируемых тел — компоненты векторов скоростей двух узлов  $\mathbf{x}^+$  и  $\mathbf{x}^-$ .

При переходе от (1.2) и (1.6) к (2.1) существенно используются линейные уравнения в граничных узлах, позволяющие по известным величинам в момент времени  $t - \Delta t$  выразить напряжения в момент  $t$  через скорости в этот же момент времени. Такие уравнения необходимы при применении явных по времени разностных схем для корректной реализации граничных условий любого вида. Обычно они строятся путем аппроксимации соотношений на бихарактеристиках системы уравнений, описывающей процесс динамического деформирования каждого из взаимодействующих тел. От коэффициентов этих уравнений зависят вектор  $\mathbf{b}$  и квадратная матрица  $A$  размерности  $m \times m$ , которая предполагается симметричной и положительно определенной. Заданный вектор  $\bar{\mathbf{w}}$  содержит компоненты скоростей, отвечающих постановке в узлах  $\mathbf{x}^+$  и  $\mathbf{x}^-$  граничных условий свободной поверхности. Вектор  $\mathbf{g}$  и скалярная величина  $h$  автоматически получаются из (1.3) и (1.4). Размерность  $m$  введенных векторов определяется размерностью рассматриваемой контактной задачи (одномерная, двумерная, пространственная).

В вариационном неравенстве (2.1) через  $\omega(\mathbf{w})$  обозначен модуль касательного вектора скорости или модуль разности проекций векторов скорости соответствующих точек на касательную плоскость в зависимости от типа взаимодействующих тел. В общем случае для этой функции справедливо следующее представление:

$$\omega(\mathbf{w}) = \max_{\hat{\mathbf{t}} \in B} \mathbf{w} \mathbf{l}^* = \mathbf{w} \mathbf{l}, \quad (2.2)$$

где  $B$  — ограниченное выпуклое и замкнутое множество векторов размерности  $m$ . При описании контакта деформируемого тела и штампа множество  $B$  состоит из векторов  $\hat{\mathbf{t}}$ , ортогональных вектору  $\hat{\mathbf{n}}$ , длина которых не превышает единицы, а в случае двух тел — из векторов вида  $(\hat{\mathbf{t}}, -\hat{\mathbf{t}})$ .

Если в неравенстве (2.1) путем задания вектора  $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{w}}$  зафиксировать выражение  $c = f |\mathbf{b}(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})| \geq 0$ , то придем к задаче минимизации выпуклой функции  $\psi(\mathbf{w}) = (1/2)(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})A(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}}) + c\omega(\mathbf{w})$  на выпуклом и замкнутом множестве  $K = \{\mathbf{w}: \mathbf{w} \mathbf{g} \geq h\}$ . Можно показать, что отображение  $Q$ , ставящее в соответствие вектору  $\hat{\mathbf{w}}$  единственную точку минимума этой функции, является сжимающим при малых коэффициентах трения  $f$ .

Действительно, пусть  $\mathbf{w}' = Q(\hat{\mathbf{w}}')$ . Тогда, полагая  $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}'$  в вариационном неравенстве (2.1) для  $\mathbf{w} = Q(\hat{\mathbf{w}})$  и  $\mathbf{w}^* = \mathbf{w}$  в аналогичном неравенстве для  $\mathbf{w}'$  и суммируя результаты, получим

$$(\mathbf{w}' - \mathbf{w})A(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) \leq f (|\mathbf{b}(\hat{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}})| - |\mathbf{b}(\hat{\mathbf{w}}' - \bar{\mathbf{w}})|) \{ \omega(\mathbf{w}') - \omega(\mathbf{w}) \}.$$

Отсюда после преобразований с учетом положительной определенности матрицы  $A$  следует, что

$$\alpha |w' - w|^2 \leq f |b| |\hat{w}' - \hat{w}| |w' - w|, \quad \alpha = \min_{|w|=1} wAw.$$

Таким образом, отображение  $Q$  является сжимающим при  $f < \alpha / |b|$ .

В силу принципа сжимающих отображений в данном случае существует единственная неподвижная точка  $w = Q(w)$ , представляющая собой искомое решение вариационного неравенства (2.1), оно может быть найдено методом последовательных приближений, на каждом шаге которого решается задача условной минимизации функции  $\psi(w)$  с определенной постоянной  $c$ .

Согласно (2.2), минимизируемая функция равна

$$\psi(w) = \max_{l^* \in B} \Psi(w, l^*), \quad \Psi(w, l) = (1/2)(w - \bar{w})A(w - \bar{w}) + clw,$$

причем функция  $\Psi$  и множества  $K$  и  $B$  удовлетворяют условиям теоремы о седловой точке [9], поэтому задача условной минимизации может быть сформулирована как задача минимакса:

$$\Psi(w, l) = \min_{w^* \in K} \max_{l^* \in B} \Psi(w^*, l^*) = \max_{l^* \in B} \min_{w^* \in K} \Psi(w^*, l^*).$$

Для нахождения седловой точки применим алгоритм Удзавы [9; 10], на  $n$ -м шаге которого при фиксированном значении двойственного вектора  $l = l^n$  решается задача минимизации  $\Psi(w, l^n)$ . Ее решение  $w = w^n$ , удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(w^* - w^n) \{A(w^n - \bar{w}) + cl^n\} \geq 0, \quad w^n, w^* \in K, \quad (2.3)$$

находится в явном виде после применения теоремы Куна — Таккера и записывается через оператор ортогонального проектирования на множество  $K$  по норме  $|w|_A = \sqrt{wAw}$  как  $w^n = P_K(\bar{w} - cA^{-1}l^n)$ . Затем вектор  $l$  пересчитывается по формуле  $l^{n+1} = P_B(l^n + \tau w^n)$ , где  $P_B$  — оператор проектирования на множество  $B$  по евклидовой норме,  $\tau > 0$  — итерационный параметр. Начальное приближение  $l^0$  задается произвольно, счет оканчивается при выполнении условия  $|l^{n+1} - l^n| \leq \tau \epsilon$  ( $\epsilon$  — точность вычислений).

Докажем, что последовательность пар векторов  $(w^n, l^n)$  сходится при  $n \rightarrow \infty$  к седловой точке  $(w, l)$ , если  $\tau < 2\alpha/c$ . Выбрав в качестве допустимой вариации  $w^*$  вектор  $w$  в неравенстве (2.3) и вектор  $w^n$  в подобном неравенстве для  $w$ , после сложения получим

$$\alpha |w^n - w|^2 \leq |w^n - w|_A^2 \leq -c(w^n - w)(l^n - l).$$

С другой стороны, так как всякий оператор проектирования на выпуклое множество — нерастягивающее отображение, то  $|l^{n+1} - l| \leq |l^n - l + \tau(w^n - w)|$ , поэтому

$$|l^{n+1} - l|^2 \leq |l^n - l|^2 + 2\tau(w^n - w)(l^n - l) + \tau^2 |w^n - w|^2 \leq |l^n - l|^2 - \tau(2\alpha/c - \tau) |w^n - w|^2.$$

Видно, что последовательность неотрицательных чисел  $|l^n - l|$  является убывающей и сходится при  $n \rightarrow \infty$  к некоторому пределу. Отсюда получаем  $|w^n - w| \rightarrow 0$ .

Необходимо заметить, что в описанном комбинированном алгоритме численного решения вариационного неравенства (2.1) рекуррентное вычисление итераций проводится на основе сжимающего отображения  $Q$  и двух нерастягивающих операторов  $P_K$  и  $P_B$ . Такой алгоритм устойчив по отношению к ошибкам округления: переход к следующей итерации не может привести к их увеличению. При реализации этого алгоритма достаточно ограничиться выбором так называемой диагональной последовательности, вычисляя на  $k$ -м шаге метода последовательных приближений лишь  $k$  итераций алгоритма Удзавы.

**3. Результаты расчетов.** Тестирование алгоритма проводилось на одномерной задаче о взаимодействии упругого слоя толщины  $H$  с абсолютно жесткой плоскостью при

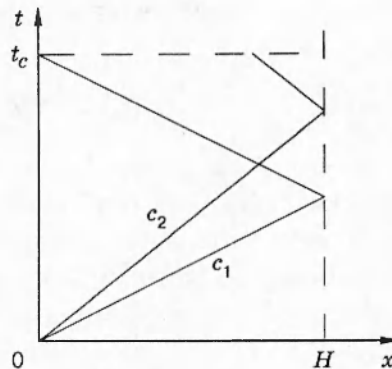


Рис. 2

произвольном векторе начальной скорости слоя  $v^0$ . Точное решение этой задачи с учетом трения строится методом характеристик (рис. 2). В момент касания внутрь слоя со скоростями  $c_1$  и  $c_2$  распространяются продольная и поперечная волны нагружения. Взаимодействие продольной волны разгрузки с контактной поверхностью в момент времени  $t_c = 2H/c_1$  приводит к отскоку слоя, причем средняя по толщине слоя скорость в направлении нормали становится равной  $-v_n^0$ . Поперечная волна влияет на касательную составляющую скорости после отражения. При  $c_2 v_r^0 > f c_1 v_r^0$  в зоне контакта происходит проскальзывание. Касательная составляющая средней скорости в момент  $t_c$  вычисляется как  $v_r^0 - 2f v_n^0$ . В противном случае реализуется режим торможения: за фронтом поперечной волны устанавливается состояние покоя. В этом режиме касательная составляющая средней скорости в момент отражения находится по формуле  $v_r^0 (1 - 2c_2/c_1)$ . Средняя скорость слоя направлена перпендикулярно плоскости при  $c_2 = c_1/2$  и меняет направление на противоположное при  $c_2 > c_1/2$ .

Расчеты проводились для различных режимов взаимодействия слоя и плоскости по схеме С. К. Годунова решения одномерной задачи динамической теории упругости и дали количественное соответствие, лежащее в пределах точности схемы.

Рассматривалась также задача, моделирующая процесс симметричной обработки образца двумя абсолютно жесткими инструментами цилиндрической формы в двумерном приближении. В расчетах применялась модель динамического деформирования упругоидеальнопластического тела при малых деформациях, численная реализация которой основывалась на двумерной схеме С. К. Годунова с применением процедуры корректировки напряжений. С учетом симметрии задачи расчеты проводились только для половины образца: считалось, что нижняя граница области решения — зона контакта с инструментом, верхняя — плоскость симметрии, к правой границе прикладывается нагрузка, а остальные части границы свободны от напряжений.

На рис. 3 представлены результаты расчетов деформирования образца в определенных моменты времени: а) без учета трения ( $f = 0$ ) и б) при  $f = 0,18$ . Пластическая зона заштрихована. Сравнение результатов показывает, что силы трения приводят к существенному изменению структуры решения. При больших коэффициентах трения пластическая зона вытягивается вдоль контактной поверхности. Это объясняется наличием значительных касательных напряжений в области контакта. При малых коэффициентах трения зона приобретает характер вертикальной полосы, и ее появление связано со сжимающими поперечными напряжениями, вызванными действием цилиндров.

Проведенные расчеты показали, что предлагаемый алгоритм дает надежный способ численного решения задач динамического контактного взаимодействия деформируемых тел.



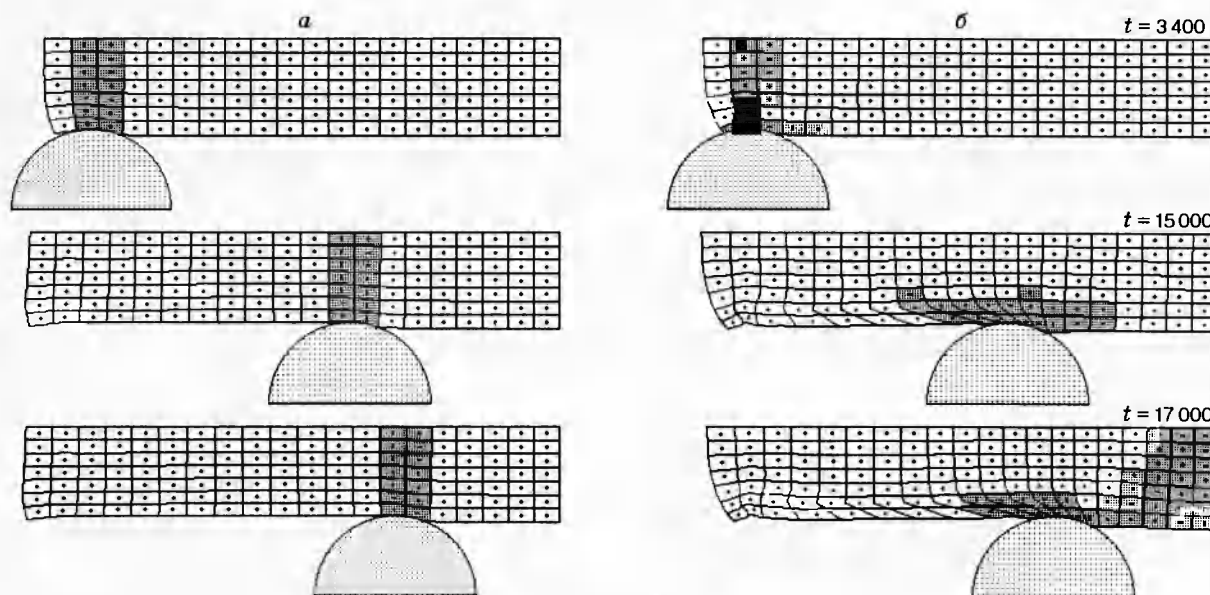


Рис. 3

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00434) и Грантового центра при Новосибирском государственном университете.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов. М., 1988 (Препр. / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 326).
2. Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // ПМТФ. 1984. № 4. С. 132–139.
3. Хорев И. Е., Горельский В. А., Залепугин С. А., Толкачев В. Ф. Исследование деформирования и кинетики разрушения контактирующих тел при неосесимметричном динамическом взаимодействии // Физика горения и взрыва. 1983. Т. 19, № 5. С. 119–123.
4. Кошур В. Д., Немировский Ю. В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990.
5. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ. 1980. № 3. С. 126–132.
6. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
7. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, № 1. С. 122–129.
8. Аннин Б. Д., Садовский В. М. Алгоритмы корректировки решения в задачах динамического деформирования слоистых плит на оправках // Тр. Междунар. конф. по судостроению. Секция С. Прочность и надежность морских сооружений. СПб, 1994. С. 143–150.
9. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
10. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.