ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ

Л. В. Ершов

(Москва)

При исследовании устойчивости упругого равновесия в работах [1,2] предполагается, что состояние неустойчивого равновесия определяется в основном изменением граничных условий. Это предположение равносильно тому, что в системе общих уравнений устойчивости равновесия упругого тела [3] пренебрегают компонентами вращения в уравнениях равновесия, сохраняя их в граничных условиях задачи. В настоящей работе в аналогичной постановке рассматривается задача устойчивости толстостенной упруго-пластической сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления.

Задача теории упругости такого рода исследована в работе [1]. Предполагается, что материал оболочки идеально-пластический, а в качестве условия пластичности выбирается условие Треска

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2 = 4, \quad \sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta) + 1$$

Компоненты напряжения безразмерны. Осесимметричное упруго-пластическое состояние сферы радиусов a и b, находящейся под действием внутреннего давления p и внешнего q, определяется соотношениями [4].

Из условий сопряжения решения для упругой и пластической областей нетрудно получить

$$p - q = 4\eta\left[\ln\frac{\beta_0}{\alpha} + \frac{1}{3}(1-\beta_0^3)\right] \qquad \left(\alpha = \frac{a}{b}, \ \eta = \operatorname{sign}(p-q)\right)$$

Здесь β_0 — безразмерный радиус границы пластической зоны.

При некотором значении давлений p и q, комбинацию которых назовем критической, наряду с осесимметричной могут существовать и другие формы равновесия.

Решение задачи представим в виде

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^\circ + \sigma'_\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^\circ + \sigma_\theta', \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^\circ + \sigma_\varphi', \quad u = u^\circ + u'$$

$$v = v^\circ + v', \quad w = w^\circ + w'$$

Граничные условия примут вид

$$\sigma_\rho' + \frac{d\sigma_\rho^\circ}{d\rho}u' = 0, \quad \tau_{\rho\theta}' - (\sigma_\theta^\circ - \sigma_\rho^\circ)\frac{\partial u'}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = 1$$

$$\sigma_\rho' + \frac{d\sigma_\rho^\circ}{d\rho}u' = 0, \quad \tau_{\rho\theta}' - \frac{1}{\alpha}(\sigma_\theta^\circ - \sigma_\rho^\circ)\frac{\partial u'}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = \alpha$$

Определение компонент возмущенного состояния в пластической области (σ_ρ', σ_θ', σ_φ', u', ... и т. д.) сводится к интегрированию уравнений

$$\rho^2\frac{\partial^2\tau_{\rho\theta}'}{\partial\rho^2} + 4\rho\frac{\partial\tau_{\rho\theta}'}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\tau_{\rho\theta}'}{\partial\theta^2} - \frac{\partial\tau_{\rho\theta}'}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\tau_{\rho\theta}' = 0 \qquad \left(\gamma = \frac{k}{G}\right)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial\rho} + \frac{2u'}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v'}{\partial\theta} + \frac{v'}{\rho}\operatorname{ctg}\theta = 0, \qquad \frac{\partial v'}{\partial\rho} - \frac{v'}{\rho} = \frac{4\eta\gamma\beta_0^3}{3\eta+1}\frac{1}{\rho^3}\tau_{\rho\theta}'$$

Здесь k — постоянная, стоящая в правой части условия пластичности, G — модуль сдвига.

Решения получаются в виде рядов по полиномам Лежандра. Упругие компоненты определяются, следуя работе [5].

Используя общие решения для упругой и пластической областей, удовлетворяя граничным условиям и условиям сопряжения решений на границе пластической области, получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно постоянных интегрирования.

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим уравнение для определения $\beta_0 = \beta_0^*$, соответствующие критическому значению комбинации действующих давлений. В случае, если форма потери устойчивости эксцентричная, это уравнение имеет вид

$$\beta_0^9 - \frac{54+2\eta}{36}\alpha\beta_0^8 - \frac{\alpha^3(3\eta+1)}{4\gamma}\beta_0^6 + \frac{36+8\eta}{36}\alpha^4\beta_0^5 - \beta_0^4 +$$

$$+ \frac{24-8\eta}{36}\alpha\beta_0^3 + \frac{\alpha^3(3\eta+1)}{4\gamma}\beta_0 - \frac{6-2\eta}{36}\alpha^4 = 0$$

Решение этого уравнения следует искать в интервале $\alpha < \beta_0 \leqslant 1$, в котором оно имеет единственный действительный корень.

Для жестко-пластического тела легко получить, что $\beta_0^* = 1$, т. е. потери устойчивости сферы из жестко-пластического материала не происходит.

За проявленное внимание и ряд ценных замечаний искренне благодарен А. Ю. Ишлинскому.

Поступила 22 IX 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. трудов, т. 1. Изд-во АН СССР, 1951.
2. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 2.
3. Новожилов В. В. Теория упругости, Судпромгиз, 1958.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности, Гостехтеоретиздат, 1950.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости, Гостехтеоретиздат, 1955.

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

В. И. Розенблюм

(Ленинград)

Интегрирование уравнений ползучести тонкостенных оболочек обычно связано со значительными трудностями. С другой стороны, явления ползучести характеризуются значительным разбросом и не всегда могут быть точно описаны существующими феноменологическими теориями. В этих условиях возрастает значение приближенных методов анализа, например, расчета по безмоментной теории. Как отмечено в [1], ползучесть благоприятствует реализации безмоментного напряженного состояния оболочки.

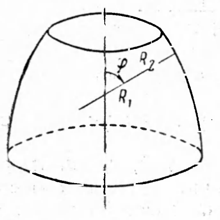
Напряженное состояние безмоментной оболочки не будет зависеть от свойств материала, если краевые условия приводят к статически определимой задаче. Благодаря «внутренней» статической определимости безмоментной оболочки решение упрощается также и для таких вариантов закрепления краев, когда раздельное определение напряженного и деформированного состояний невозможно.

Ниже рассматривается статически неопределимая осесимметрично нагруженная оболочка вращения, для которой задача неустановившейся ползучести приводится к нормальной системе обыкновенных нелинейных уравнений и в ряде случаев может быть решена в квадратурах.

1. Общее решение уравнений статики безмоментной теории осесимметрично нагруженной оболочки вращения (фиг. 1) может быть представлено в виде [2]

$$\sigma_1 = \sigma_1^\circ + \sigma_1^*, \qquad \sigma_2 = \sigma_2^\circ + \sigma_2^*, \qquad \tau = \tau^\circ + \tau^* \tag{1.1}$$

Здесь σ_1, σ_2, τ — меридиональное, окружное и касательное напряжения, σ_1^*, σ_2^*, τ^* — частное решение, отвечающее заданным нагрузкам, σ_1°, σ_2°, τ° — общее решение однородных уравнений



Фиг. 1

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{hr\sin\varphi}\int_{\varphi_0}^{\varphi}(q_1\cos\varphi - q_n\sin\varphi)\, rR_1\, d\varphi$$

$$\sigma_2^* = -\frac{R_2}{R_1}\sigma_1^* + \frac{R_2}{h}q_n, \qquad \tau^* = -\frac{1}{r^2h}\int_{\varphi_0}^{\varphi} q_2r^2R_1\, d\varphi \tag{1.2}$$

$$\sigma_1^\circ = \frac{M}{r\sin\varphi}, \qquad \sigma_2^\circ = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{M}{r\sin\varphi}, \qquad \tau^\circ = \frac{N}{r^2} \tag{1.3}$$

Постоянные интегрирования M, N в случае ползучести следует считать произвольными функциями времени, определяемыми из краевых условий.

Скорости деформации $\dot\varepsilon_1, \dot\varepsilon_2, \dot\gamma$, отвечающие напряжениям (1.1), будем определять по уравнениям теории ползучести Л. М. Качанова [1]

$$\dot\varepsilon_1 = \xi_1' + \xi_1'', \qquad \dot\varepsilon_2 = \xi_2' + \xi_2'', \qquad \dot\gamma = \eta' + \eta'' \tag{1.4}$$