

4. Астанин В. В., Романченко В. И. Прочность и сжимаемость стеклопластика при ударе // *Механика композит. материалов.*— 1984.— № 4.
5. Голубев В. К., Новиков С. А., Соболев Ю. С. и др. О влиянии нагрева на откольное разрушение некоторых полимерных композитов // *ПМТФ.*— 1987.— № 6.
6. Гуняев Г. М. Структура и свойства полимерных волокнистых композитов.— М.: Химия, 1981.
7. Иванов А. Г. О возможных причинах хрупких разрушений // *ПМТФ.*— 1988.— № 3.
8. Иванов А. Г., Минеев В. И. О масштабных эффектах при разрушении // *ФГВ.*— 1979.— № 5.
9. Голубев В. К., Новиков А. С., Сеницына Л. М. О разрушении материалов при нагружении взрывом листового заряда ВВ // *ПМТФ.*— 1981.— № 2.
10. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластинок с дефектами.— Киев: Наук. думка, 1982.
11. Иванов А. Г. О возможности построения единой теории разрушения // *ПМТФ.*— 1990.— № 1.

*г. Арзамас-16  
Нижегородской области*

*Поступила 20/II 1990 г.*

УДК 539.3

*Б. С. Резников*

## АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТОВ С УЧЕТОМ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящее время разрабатываются и находят широкое применение новые высокомолекулярные нетканые синтетические материалы. Эти композиты имеют волокнисто-сетчатую структуру (близкую к ромбовидной), пропитанную полимерным связующим, которое, как показывают микрофотографии, в основном находится в узлах сетки. Поэтому определенный объем занимают поры, расположенные достаточно регулярно. Данные композиты по сравнению с «жесткими» (типа стекло-, угле-, баропластиков и т. д.) будем называть «мягкими» композитами, так как они обладают большей деформативностью, эластичностью и при малых нагрузках проявляют существенно нелинейные свойства, что связано с изменением структуры материала. В частности, субструктурные элементы поворачиваются относительно друг друга на конечную величину, и существенно меняется пористость материала. Учет указанных эффектов позволяет определять поперечные деформации при одноосном нагружении. Поэтому при построении физических соотношений рассматриваемого композита использовался структурный подход [1], который позволяет учитывать: удельное объемное содержание волокон и связующего, пористость, характер армирования, нелинейные свойства субструктурных элементов, а для связующего и анизотропию этих свойств.

Описание поведения различных материалов с помощью механических моделей применяется очень широко [2—5]. Так, в [2, 4] используются различные реологические модели, элементы которых простираются лишь в одном направлении. В [3] проведено исследование предельного состояния «жестких» композитов, армированных в двух направлениях, на основе стержневой модели. Анализ влияния угла между структурными реологическими элементами модели был дан в [4] при исследовании только спектра времен релаксации полимеров. Кроме того, предложенный подход в [4] не позволяет учитывать структуру композита, а также поперечные деформации в процессе одноосного нагружения, которые являются значительными при деформировании «мягких» композитов.

Для построения уравнений состояния рассматриваемых материалов будем использовать следующую модель. Примем, что волокнистый композит состоит из повторяющихся ромбовидных элементов толщиной  $h$  по направлению оси  $O\xi$  (рис. 1). При этом волокна композита разориентированы на угол  $2\alpha$  и образуют элементарные ячейки-ромбы, в углах которых находится связующее (либо возникают силы трения между переплетающимися волокнами). В этом переплетении волокна находятся в равновесном состоянии и материал способен сохранять свою форму и размеры при отсутствии внешнего воздействия. При нагружении такой модели элементарные ячейки-ромбы деформируются как вследствие изменения угла  $2\alpha$  между волокнами, так и в результате деформации самих волокон и связующего.

Механическое поведение связующего в углах ячейки-ромба будем моделировать с помощью элементов  $AC$  и  $BD$  (см. рис. 1), которые харак-

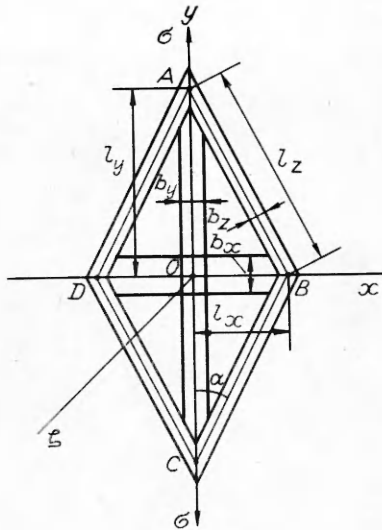


Рис. 1

теризуют деформирование связующего соответственно в углах  $B, D$  и  $A, C$ . При этом для простоты и определенности примем, что элементы  $BD$  и  $AC$  имеют прямоугольное поперечное сечение толщиной  $h_x, h_y$ , а ширину  $b_x, b_y$ , которые определяются из условий равенства объема связующего в углах  $A, C$  и  $B, D$ .

Для рассматриваемых композитов наиболее интересный вид деформирования с точки зрения их практического использования — растяжение вдоль осей структурной симметрии. В этом случае, учитывая особенности структуры материала (ее регулярность), будем считать, что усилия передаются только через узлы, в которых все элементы соединены шарнирно.

Пусть в узлах ячейки-ромба  $A$  и  $C$  приложены напряжения  $\sigma$  (см. рис. 1). Геометрические параметры ячейки-ромба

и механические свойства ее элементов таковы, что оси координат  $Ox$  и  $Oy$  являются осями симметрии, как в ненагруженном состоянии, так и в процессе деформирования.

Введем понятие относительного удельного объемного содержания для каждого элемента композиции, т. е. отношение объема материала субструктурного элемента к суммарному объему всего материала ячейки-ромба. Так, для волокон (т. е. элементов  $AB, BC, CD, DA$ )

$$(1) \quad \Omega_z = 4h_z b_z l_z / V^*,$$

для связующего в направлении  $Ox$  и  $Oy$  (т. е. элементов  $BD$  и  $AC$ )

$$(2) \quad \Omega_x = 2h_x b_x l_x / V^*, \quad \Omega_y = 2h_y b_y l_y / V^*,$$

где  $V^* = 4h_z b_z l_z + 2h_x b_x l_x + 2h_y b_y l_y$ ;  $h_z = h$ ,  $b_z, l_z$  — толщина, ширина и длина армирующего элемента  $AB(BC, CD, DA)$ ; не уменьшая общности, для простоты и определенности примем, что волокна имеют прямоугольное сечение;  $2l_x, 2l_y$  — длины элементов  $BD$  и  $AC$ ; при этом в выражении  $V^*$  1-е слагаемое соответствует объему волокон в ячейке-ромбе, а 2-е и 3-е — объему связующего в узлах  $A, C$  и  $B, D$ , которое моделируется стержнями  $BD$  и  $AC$ . Из формул (1), (2) имеем  $\Omega_x + \Omega_y + \Omega_z = 1$  и относительное удельное объемное содержание связующего  $\Omega_c = \Omega_x + \Omega_y$ .

При растяжении элементарной ячейки-ромба напряжением  $\sigma$ , приложенным в узлах  $A$  и  $C$  (см. рис. 1), получим уравнения статического равновесия: в узле  $A$

$$(3) \quad \sigma(h_y b_y + 2h_z b_z / \cos \alpha) = 2\sigma_z h_z b_z \cos \alpha + \sigma_y h_y b_y;$$

в узле  $B$

$$(4) \quad \sigma_x h_x b_x + 2\sigma_z h_z b_z \sin \alpha = 0$$

( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — напряжения соответственно в элементах  $BD, AC, AB(BC, CD, DA)$ ).

Учитывая соотношения (1), (2) и  $\cos \alpha = l_y / l_z$ , из (3), (4) после несложных преобразований находим уравнения равновесия:

$$(5) \quad \sigma(1 - \Omega_x) = \sigma_z \Omega_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \Omega_y, \quad \sigma_x \Omega_x + \sigma_z \Omega_z \sin^2 \alpha = 0.$$

Обозначим через  $\epsilon_x, \epsilon_y$  деформации ячейки-ромба в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$ , которые совпадают с деформациями элементов  $BD$  и  $AC$  (в силу условий совместного деформирования всех входящих элементов в узлах  $A, B, C, D$ ). Деформацию в волокнах, т. е. в элементах  $AB, BC,$

$CD, DA$ , обозначим через  $\varepsilon_z$ . Указанные деформации определяются, как обычно, следующим образом:

$$(6) \quad \varepsilon_x = (l_x - l_{x,0})/l_{x,0}, \quad \varepsilon_y = (l_y - l_{y,0})/l_{y,0}, \\ \varepsilon_z = (l_z - l_{z,0})/l_{z,0}.$$

Здесь и в дальнейшем все величины с нижним индексом 0 соответствуют начальному состоянию до приложения нагрузки, а без него — текущему значению той или иной величины, которое принимается в процессе деформирования.

Условия совместности деформаций всех элементов композиции получим, если рассмотрим треугольник  $AOB$  (см. рис. 1):

$$l_z^2 = l_x^2 + l_y^2 \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = l_x / l_y \quad \forall \sigma \geq 0,$$

или, учитывая (6), находим

$$(7) \quad (1 + \varepsilon_z)^2 = (1 + \varepsilon_x)^2 \sin^2 \alpha_0 + (1 + \varepsilon_y)^2 \cos^2 \alpha_0, \\ (1 + \varepsilon_y) \operatorname{tg} \alpha = (1 + \varepsilon_x) \operatorname{tg} \alpha_0 \quad \forall \sigma \geq 0.$$

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (5), (7), необходимо сформулировать уравнения состояния для каждого элемента ячейки-ромба. При нелинейно-упругом поведении элементов композиции имеем

$$(8) \quad \sigma_x = B_x \varepsilon_x |\varepsilon_x|^{n_x - 1}, \quad \sigma_y = B_y \varepsilon_y |\varepsilon_y|^{n_y - 1}, \quad \sigma_z = B_z \varepsilon_z |\varepsilon_z|^{n_z - 1},$$

где  $B_x, B_y, B_z, n_x, n_y, n_z$  — экспериментальные постоянные материалов связующего и волокон. Случай  $n_x = n_y = n_z = 1$  соответствует закону Гука; если  $B_x \neq B_y$  или  $n_x \neq n_y$ , то это позволяет учесть различие свойств связующего при деформировании в направлениях  $Ox$  и  $Oy$ . Следует отметить, что вместо (8) можно использовать другие уравнения состояния для элементов композиции, например соотношения линейной вязкоупругости [2].

Таким образом, система уравнений (5), (7), (8) полностью описывает механическое поведение композита при одноосном нагружении. При этом предложенная математическая модель композита учитывает его структуру, различие механических свойств волокон и связующего и определяет не только деформацию в направлении действия внешнего усилия, но и поперечную деформацию. Кроме того, полученные уравнения позволяют находить изменение структуры композита в процессе нагружения. Так, из 2-го соотношения (7) можно определить изменение угла армирования  $\alpha$  при деформировании.

Введем понятие пористости материала  $\omega$  как отношение объема пор  $V$  к объему всей элементарной ячейки-ромба  $V_e$ :

$$(9) \quad \omega = V/V_e = 1 - V^*/V_e.$$

Здесь  $V_e = 2l_x l_y h + 2l_z b_z h$ , при этом 1-е слагаемое в выражении  $V_e$  отвечает объему ячейки-ромба  $ABCD$  (см. рис. 1), а 2-е — той части объема элементов  $AB, BC, CD, DA$ , который выходит за границу ромба  $ABCD$ .

Для простоты и определенности рассмотрим случай, когда материалы связующего и волокон являются несжимаемыми, толщины всех элементов ячейки-ромба одинаковые ( $h_x = h_y = h$ ) и поперечной деформацией в направлении оси  $Oz$  ячейки-ромба пренебрегаем по сравнению с  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ . Тогда после несложных преобразований из (9) получим

$$(10) \quad \omega = 1 - \Omega_0 / [(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y) + 0,5\Omega_0\Omega_z] \\ (\Omega_0 = V_0^*/(2l_{x,0}l_{y,0}h_0)).$$

Соотношение (10) позволяет исследовать изменение пористости в процессе деформирования.

Найти в явном виде зависимость деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  от действующего напряжения  $\sigma$  из соотношений (5), (7), (8) (исключая  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \varepsilon_z, \alpha$ )

не представляется возможным, так как уравнения (5), (7) независимо от физических соотношений для элементов композиции являются нелинейными. Поэтому для создания алгоритма численного счета будем использовать метод «последовательных нагружений», который позволяет на каждом шаге по нагрузке иметь линейную систему уравнений относительно приращений неизвестных величин.

Примем, что текущее значение действующих напряжений  $\sigma_k$  представляется в виде

$$(11) \quad \sigma_k = \sigma_{k-1} + \Delta_k \sigma \quad \forall k = 1, 2, \dots, \sigma_0 = 0$$

и напряжения и деформации в элементах композиции следующие:

$$(12) \quad \sigma_{x,k} = \sigma_{x,k-1} + \Delta_k \sigma_x, \quad \varepsilon_{x,k} = \varepsilon_{x,k-1} + \Delta_k \varepsilon_x, \\ \forall k = 1, 2, \dots, \sigma_{x,0} = \varepsilon_{x,0} = 0.$$

Аналогичные соотношения имеем и для  $\sigma_{y,k}, \sigma_{z,k}, \varepsilon_{y,k}, \varepsilon_{z,k}$ , если в (12) индекс  $x$  заменить соответственно на  $y$  и  $z$ . В дальнейшем в подобных случаях будем выписывать соотношения только с индексом  $x$ , указывая в скобках, что они справедливы и при замене индекса  $x$  на  $y$  и  $z$ . Кроме того, для угла армирования  $\alpha$  получим

$$(13) \quad \alpha_k = \alpha_{k-1} + \Delta_k \alpha \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

при изменении действующего напряжения на  $\Delta_k \sigma$ .

Подставляя (11)–(13) в уравнения (5), (7) и пренебрегая величинами второго порядка малости по сравнению с приращениями всех вышеуказанных величин, находим

$$(14) \quad (1 - \Omega_x) \Delta_k \sigma = \Omega_y \Delta_k \sigma_y - \Omega_x \left( \Delta_k \sigma_x - \frac{4\sigma_{x,k-1} \Delta_k \alpha}{\sin 2\alpha_{k-1}} \right) \operatorname{ctg}^2 \alpha_{k-1},$$

$$\Omega_x \Delta_k \sigma_x + \Omega_z (\Delta_k \sigma_z \sin^2 \alpha_{k-1} + \sigma_{z,k-1} \Delta_k \alpha \sin 2\alpha_{k-1}) = 0;$$

$$(15) \quad \lambda_{z,k-1} \Delta_k \varepsilon_z = \lambda_{x,k-1} \Delta_k \varepsilon_x \sin^2 \alpha_0 + \lambda_{y,k-1} \Delta_k \varepsilon_y \cos^2 \alpha_0. \\ \Delta_k \alpha (\lambda_{y,k-1} + \lambda_{x,k-1} \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha_{k-1}) + \Delta_k \varepsilon_y \operatorname{tg} \alpha_{k-1} - \\ - \Delta_k \varepsilon_x \operatorname{tg} \alpha_0 = 0,$$

где  $\lambda_{x,k-1} = 1 + \varepsilon_{x,k-1}$  ( $x \rightarrow y, z$ ).

Замкнутую систему уравнений относительно  $\Delta_k \sigma_x, \Delta_k \varepsilon_x$  ( $x \rightarrow y, z$ ) и  $\Delta_k \alpha$  получим, если уравнения (14), (15) дополним физическими соотношениями для элементов композиции, записанными в приращениях. Из (8) при  $n_x, n_y, n_z$ , отличными от единицы, имеем

$$(16) \quad \text{при } k = 1 \quad \Delta_1 \sigma_x = B_x |\Delta_1 \varepsilon_x|^{n_x - 1} \Delta_1 \varepsilon_x \quad (x \rightarrow y, z);$$

$$(17) \quad \text{при } k = 2, 3, \dots \quad \Delta_k \sigma_x = B_{x,k} \Delta_k \varepsilon_x \quad (x \rightarrow y, z) \\ \left( B_{x,k} = B_x n_x |\varepsilon_{x,k-1}|^{n_x - 1} \right).$$

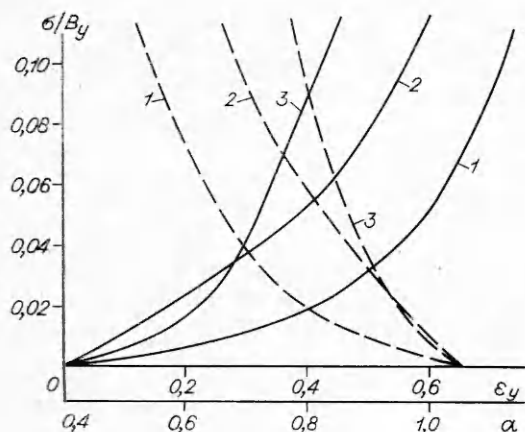
В случае  $n_x = n_y = n_z = 1$  соотношения (17) справедливы  $\forall k = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, из системы (14)–(17)  $\forall k = 1, 2, \dots$  при заданном  $\Delta_k \sigma$  нетрудно определить  $\Delta_k \sigma_x, \Delta_k \varepsilon_x$  ( $x \rightarrow y, z$ ) и  $\Delta_k \alpha$ . При этом для  $k = 1$  получим, вообще говоря, нелинейную систему уравнений (14)–(16), которую нетрудно решать, если на первом шаге задавать  $\Delta_1 \varepsilon_x$ , а величину  $\Delta_1 \sigma$  определять. При  $k = 2, 3, \dots$  относительно неизвестных приращений  $\Delta_k \sigma_x, \Delta_k \varepsilon_x$  ( $x \rightarrow y, z$ ) и  $\Delta_k \alpha$  будет линейной система алгебраических уравнений (14), (15), (17), которую можно решать любым известным способом.

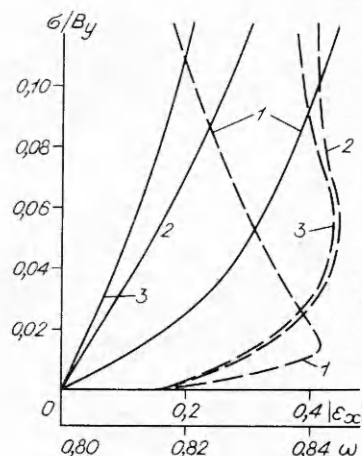
При численном счете  $\Delta_k \sigma$  необходимо выбирать из условия

$$(18) \quad \max \{ |\Delta_k \sigma_x|, |\Delta_k \varepsilon_x| \quad (x \rightarrow y, z), |\Delta_k \alpha|/\pi \} < \delta.$$

Здесь  $0 < \delta \ll 1$  и определяется условием, что величинами 2-го порядка малости относительно рассматриваемых приращений можно пренебрегать.



Р и с. 2



Р и с. 3

Поэтому на каждом шаге нагружения в общем случае необходимо проводить корректировку  $\Delta_k \sigma$  в соответствии с (18). При этом параметр  $k$  увеличиваем до тех пор, пока  $\sigma_k$  не достигнет требуемого значения  $\sigma$ .

Результаты численных расчетов при параметрах  $\delta = 0,01$ ,  $n_z = 1$ ,  $\alpha_0 = \pi/3$ ,  $\Omega_0 = 0,2$ ,  $\Omega_x = \Omega_y = 0,1$ ,  $B_z/B_y = 20$  и

- (19) 1)  $n_x = n_y = 2$ ,  $B_x/B_y = 1$ ; 2)  $n_x = n_y = 1$ ,  $B_x/B_y = 1$ ;  
3)  $n_x = n_y = 1$ ,  $B_x/B_y = 3$

приведены на рис. 2, 3. Сплошные кривые соответствуют зависимостям продольной  $\epsilon_y$  и поперечной  $|\epsilon_x|$  деформациям от действующего напряжения  $\sigma/B_y$ , штриховые на рис. 2 отвечают зависимости угла армирования  $\alpha$  от  $\sigma/B_y$ , а на рис. 3 характеризуют изменение пористости  $\omega$  от  $\sigma/B_y$ , номер кривой — вариант параметра из (19).

Полученные результаты показывают, что предложенная модель композиционного материала позволяет учитывать нелинейный характер диаграмм  $\sigma \sim \epsilon_y$  и  $\sigma \sim \epsilon_x$  (даже при упругом деформировании субструктурных элементов — сплошные линии 2, 3 на рис. 2, 3), найти конечные изменения структуры материала (угла армирования и пористости) в процессе нагружения, определять поперечные деформации при одноосном нагружении (при этом, как показали расчеты, для рассмотренных материалов отношение поперечной деформации к продольной не является постоянным, а зависит от действующего напряжения).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя // ПМТФ.— 1969.— № 5.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
3. Работнов Ю. Н. О прочности композитов, армированных в двух направлениях // Механика полимеров.— 1978.— № 5.
4. Аскадский А. А., Матвеев Ю. И. Химическое строение и физические свойства полимеров.— М.: Химия, 1983.
5. Резников Б. С. Структурный подход к построению пространственных реологических моделей композиционных материалов // Тез. докл. межвузовской науч.-техн. конф. «Композиционные материалы в конструкциях глубоководных технических средств», 26—30 августа 1989 г.— Николаев: НКИ, 1989.

г. Новосибирск

Поступила 15/II 1990 г.,  
в окончательном варианте — 27/III 1990 г.