

**РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО КОМПЛЕКСНОГО  
УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА  
МЕТОДОМ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ\*****А. В. Петухов**

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
г. Новосибирск  
E-mail: mnu@ngs.ru*

Рассматриваются численные методы решения трехмерных смешанных краевых задач для комплексного уравнения Гельмгольца, описывающего электромагнитные поля с гармонической временной зависимостью. Предлагаются бездивергентные барицентрические конечно-объемные аппроксимации на тетраэдральных сетках. Вычисления локальных матриц баланса и сборка глобальной матрицы основаны на поэлементных технологиях. Для итерационного решения получаемой вещественной системы линейных алгебраических уравнений с несимметричной разреженной матрицей высокого порядка описывается предобусловленный метод сопряженных невязок. Приводятся результаты численных экспериментов для серии модельных задач на последовательности сгущающихся сеток, демонстрирующие второй порядок точности сеточных решений, а также высокую скорость сходимости итерационных процессов.

**Введение.** Целью данной работы является сравнение скорости сходимости методов SCR (метод полусопряженных невязок) и LTCR (метод сопряженных невязок, предобусловленный левой трансформацией Гаусса) для тестовых задач, а также проверка квадратичности убывания погрешности получаемых приближений по отношению к характерному шагу сетки  $h$ .

**Постановка задачи.** Численное решение многомерных краевых задач для системы дифференциальных уравнений, описывающих распределение векторных электромагнитных полей с гармонической зависимостью от времени, представляет собой актуальную проблему для многих электрофизических приложений [1–3], а также задачи индукционного каротажа [4] в геоэлектрической разведке и вопросы моделирования и проектирования высокочастотных устройств самого различного назначения. Система уравнений Максвелла при этом в общем случае приводится к виду

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= i\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}; & \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega \mu \mathbf{H}; \\ \nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}) &= \rho / \varepsilon_0; & \nabla \cdot (\mu_r \mathbf{H}) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00487) и NWO-RFBR (грант № 047.016.008).

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 \varepsilon_r - i(\sigma^e / \omega), \quad \dot{\mu} = \mu_0 \mu_r - i(\sigma^m / \omega),$$

где  $i$  – мнимая единица;  $\omega$  – круговая частота изменения решения во времени;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – амплитуды напряженности электрического и магнитного полей;  $\mathbf{J}$  и  $\rho$  – плотности стороннего электрического тока и объемного заряда;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_r$  и  $\mu_r$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума и рассматриваемой среды соответственно;  $\sigma^e$  и  $\sigma^m$  – электрическая и магнитная проводимости.

Решение системы уравнений (1) находится в ограниченной области  $\Omega$  с границей  $S = S_0 \cup S_1$ , где на  $S_0$  ставится условие идеально проводящей электрической стенки

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

а на  $S_1$  – условие «волнового входа»

$$-\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{E}_0 \quad (3)$$

(здесь  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе, а  $\mathbf{E}_0$  – распределение внешнего поля излучения).

Будем полагать, что расчетная область  $\Omega$  состоит из подобластей  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , с постоянными материальными свойствами, а на каждой внутренней границе  $\Gamma$  их раздела выполняются условия сопряжения

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\sigma_e^1 \mathbf{E}_1 - \sigma_e^2 \mathbf{E}_2) = 0, \quad \sigma_e = i\omega \dot{\varepsilon}; \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0; \\ \mathbf{n} \cdot (\sigma_m^1 \mathbf{H}_1 - \sigma_m^2 \mathbf{H}_2) = 0, \quad \sigma_m = i\omega \dot{\mu}; \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к границе  $\Gamma$ , а индексы 1, 2 относятся к разным сторонам ее поверхности.

Соотношения (1) при  $\rho = \sigma^m = 0$  после несложных преобразований приводятся к векторному уравнению

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \dot{\varepsilon}_r \mathbf{E} = -ik_0 Z_0 \mathbf{J}, \quad (5)$$

в котором полагается

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}; \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}; \quad \dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon} / \varepsilon_0. \quad (6)$$

Решению краевых задач для векторного уравнения (5) посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов (см., например, [5–8] и библиографию в них). Как правило, при решении трехмерных практических задач в расчетной области строится адаптивная сетка  $\Omega^h$ , состоящая из набора конечных элементов  $E_l$  в форме параллелепипедов или тетраэдров, таким образом, чтобы внешние и внутренние граничные поверхности составлялись из граней  $E_l$ , граничные ребра – из ребер сеточных элементов  $E_l$ , а граничные вершины являлись узлами сетки.

Аппроксимация уравнения (5) с учетом внешних и внутренних краевых условий осуществляется с помощью методов конечных объемов или элементов. Причем в последнем подходе большое распространение получили алго-

ритмы на основе использования векторных базисных функций, обеспечивающие нулевую дивергенцию для приближенного сеточного решения внутри конечных элементов. Следует отметить, что построение бездивергентных аппроксимаций имеет важное значение. Если сеточный аналог выражения  $\text{div } \mathbf{E}$  не равен нулю, то это приводит к появлению ложных решений, не соответствующих физическому смыслу.

**Бездивергентная конечно-объемная аппроксимация.** Далее будем предполагать отсутствие сторонних токов ( $\mathbf{J} = 0$ ) и уравнение (4) в подобластях с постоянными материальными параметрами приведем к векторному однородному уравнению Гельмгольца

$$-\Delta \mathbf{E} + \kappa \mathbf{E} = 0, \quad \kappa = -\mu_r k_0^2 \dot{\epsilon}_r, \quad (7)$$

которое при условии  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  выводится для гладкого  $\mathbf{E}$  на основе операторного равенства  $\text{rot rot} = -\Delta + \text{grad div}$ .

На внутренних границах раздела различных сред имеет место скачок нормальных производных компонент электрического поля.

Вводя обозначения для вещественных и мнимых частей комплексных величин  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{Re}} + i \mathbf{E}^{\text{Im}}$ ,  $\kappa = \kappa^{\text{Re}} + i \kappa^{\text{Im}}$ , векторное уравнение (6) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} (-\Delta + \kappa^{\text{Re}} I) \mathbf{E}^{\text{Re}} - \kappa^{\text{Im}} \mathbf{E}^{\text{Im}} &= 0; \\ \kappa^{\text{Im}} \mathbf{E}^{\text{Re}} + (-\Delta + \kappa^{\text{Re}} I) \mathbf{E}^{\text{Im}} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $I$  – единичный оператор. Если обозначить через  $u$  и  $v$  соответственно вещественную и мнимую части какой-то из компонент векторного поля, то для них с учетом определения векторного оператора Лапласа соотношения (8) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} (-\Delta + \kappa^{\text{Re}} I) \mathbf{E}^{\text{Re}} & -\kappa^{\text{Im}} \mathbf{E}^{\text{Im}} \\ \kappa^{\text{Im}} \mathbf{E}^{\text{Re}} & (-\Delta + \kappa^{\text{Re}} I) \mathbf{E}^{\text{Im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Здесь, например, в декартовой системе координат участвует обычный скалярный лапласиан  $\left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ . Поскольку в (9) искомые решения

$u, v$  представляют одну из функций  $E_x, E_y, E_z$ , то очевидно, что комплексное векторное уравнение Гельмгольца (7) сводится к системе из шести однородных дифференциальных уравнений относительно вещественных скалярных функций. Формально все подсистемы вида (9) с парами  $E_x^{\text{Re}}$  и  $E_x^{\text{Im}}$ ,  $E_y^{\text{Re}}$  и  $E_y^{\text{Im}}$ ,  $E_z^{\text{Re}}$  и  $E_z^{\text{Im}}$  являются независимыми друг от друга, однако связываются через неоднородные краевые условия (2) и (3).

Конкретизируем теперь вид граничных условий в декартовой трехмерной системе координат с учетом того, что уравнение (7) справедливо, если выполняется равенство

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

во всей замкнутой области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ .

Пусть  $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$  – некоторая ортогональная система координат в точке  $\mathbf{r}$  границы  $S$ , где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль, а  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\eta}$  – некоторые касательные к поверхности  $S$  направления. Тогда равенство нулю тангенциальных составляющих поля на металлической (идеально проводящей) стенке  $S_0$  и равенство касательного поля некоторому распределению внешнего поля излучения на «волновом входе» в совокупности с условием (10) позволяют корректно формулировать краевые условия на внешней границе, которые в общем случае являются нераспадающимися.

Отметим следующий важный момент: поскольку мы удовлетворяем условию нулевой дивергенции на всей границе расчетной области, то легко убедиться, что решение уравнения Гельмгольца (7) также будет удовлетворять условию (10) во всей области  $\Omega$ .

Далее при аппроксимации краевой задачи вида (9), (10), (2), (3) будем предполагать существование ее единственного классического решения во всех внутренних точках  $\mathbf{r} \in \Omega$ , достаточно гладкого вплоть до границы  $S \cup \Gamma$ .

Рассмотрим неструктурированную (адаптивную) сетку, содержащую узлы  $P_l \in \bar{\Omega}$ ,  $l=1, \dots, \bar{N}$ , по которым построены непересекающиеся элементы-тетраэдры  $E_m$ ,  $m=1, \dots, M$ , полностью покрывающие расчетную область, т. е.  $\Omega = \bigcup_m E_m$ .

Пусть также  $V_l$ ,  $l=1, \dots, \bar{N}$ , – множество барицентрических конечных объемов, двойственное к множеству  $E_m$ , причем для граничных узлов  $P_l \in S$  под конечным объемом подразумевается его «внутренняя» часть  $V_l \cap \Omega$ . В силу предполагаемой адаптивности сетки внутренние точки тетраэдра не могут содержать точки из  $S$  или  $\Gamma$ , а лежащие на граничной поверхности сеточные грани не могут иметь внутренних точек, принадлежащих граничным ребрам расчетной области.

Барицентрические конечные объемы по построению аналогичны ячейкам Дирихле – Вороного, построенным на центрах описанных окружностей и сфер. Однако они более удобны тем, что барицентры тетраэдра и граней всегда лежат внутри его объема и не нуждаются в отработке исключительных случаев, подчас очень нетривиальных, например выход описанной сферы приграничного тетраэдра за границу расчетной области.

Обозначая через  $\Gamma_l$  границу конечного объема  $V_l$  и интегрируя первое из уравнений (9), получим закон сохранения в виде

$$\int_{\Gamma_l} J^n dS + \int_{V_m} (\kappa^{\text{Re}} u - \kappa^{\text{Im}} v) dV = 0, \quad (11)$$

где  $J^n = -(\partial u / \partial \mathbf{n})$  – плотность потока через поверхность  $\Gamma_l$ .

Введем  $V_{l,m} = V_m \cap V_l$  и  $\Gamma_{l,m} = V_m \cap \Gamma_l$  – пресечения конечного элемента с конечным объемом и его границей соответственно. Тогда объемный интеграл может быть представлен в виде суммы

$$\int_{V_l} = \sum_{m' \in V_l} \int_{V_{l,m'}}, \quad V_{l,m'} \in V_l.$$

Аналогичным образом может быть представлена граница конечного объема

$$\Gamma_l = \sum_{m'} \Gamma_{l,m'}.$$

Используя локальную нумерацию узлов тетраэдра, изображенную на рис. 1, опишем кратко поэлементную реализацию барицентрической конечно-объемной аппроксимации. Здесь 0–3 – вершины тетраэдра; 4–9 – середины ребер;  $B_0, B_1, B_2, B_3$  – барицентры треугольных граней, противоположных узлам  $P_l$  с соответствующими номерами; точка  $B$  есть барицентр тетраэдра. Лежащая в данном тетраэдре часть поверхности конечного объема, например, для узла с номером 0 в этих обозначениях есть объединение трех площадок:

$$\Gamma_{l,0} = (4 - B_2 - B - B_3) \cup (5 - B_1 - B - B_3) \cup (6 - B_1 - B - B_2).$$

Поэлементная конечно-объемная технология [9] заключается в том, что последовательно для каждого элемента  $E_m$  приближенно вычисляются интегралы по всем поверхностям  $\Gamma_{l,m} \subset E_m$  и объемам  $V_{l,m} \subset E_m$ , в результате чего формируется локальная матрица  $A_m$  восьмого порядка (по общему числу неизвестных, определенных в четырех вершинах тетраэдра).

Тетраэдр с локальной нумерацией узлов и соответствующих сеточных значений неизвестных функций представлен на рис. 1. Исходя из рисунка можно записать

$$I_0^u = I_{0,1}^u + I_{0,2}^u + I_{0,3}^u, \quad I_{0,q}^u = - \int_{S_{0,q}^m} (\partial u / \partial n) dS, \quad (12)$$

где  $I_0$  – поток через часть поверхности  $\Gamma_{l,m}$ ;  $I_{0,q}$  – составляющая потока, которая проходит через фрагмент  $\Gamma_{l,m}$ , примыкающий к ребру, соединяющему узлы с номерами 0 и  $q$ ;  $S_{0,q}^m$  – площадь фрагмента  $\Gamma_{l,m}$ .

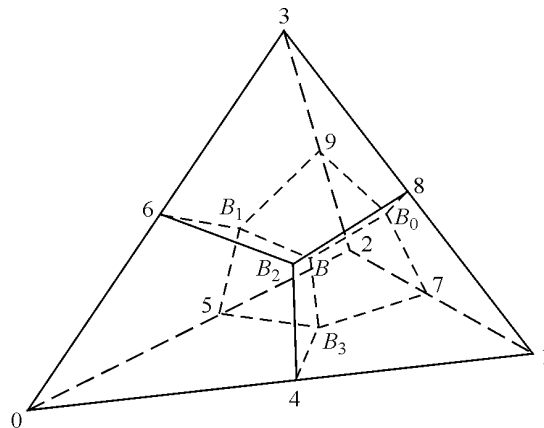


Рис. 1. Конечный элемент-тетраэдр с локальной нумерацией

Для аппроксимации производной по нормали введем локальную линейную функцию  $u^m$  на конечном элементе  $E_m$  вида  $u^m(\mathbf{x}) = ax + by + cz + d$ , удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} u^m(\mathbf{x}_1) = u_1^m, \\ u^m(\mathbf{x}_2) = u_2^m, \\ u^m(\mathbf{x}_3) = u_3^m, \\ u^m(\mathbf{x}_4) = u_4^m, \end{cases} \quad \mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i),$$

причем коэффициенты  $a, b, c, d$  соответственно будут иметь вид

$$a^m = \sum_{i=0}^3 a_i^m u_i^m, \quad b^m = \sum_{i=0}^3 b_i^m u_i^m, \quad c^m = \sum_{i=0}^3 c_i^m u_i^m, \quad d^m = \sum_{i=0}^3 d_i^m u_i^m.$$

Тогда

$$I_{0,q} \cong S_{0,q}^m \sum_{i=0}^3 (a_i^m n_{0,q}^x + b_i^m n_{0,q}^y + c_i^m n_{0,q}^z) u_i^m,$$

где  $n_{0,q}^x, n_{0,q}^y, n_{0,q}^z$  – компоненты вектора нормали к площади  $S_{0,q}^m$ .

Обозначив через  $V_{q,m}$ ,  $q=0,1,2,3$ , подобъемы элемента  $E_m$ , содержащие среди своих вершин узлы с локальными номерами  $q$ , соответствующие интегралы можно аппроксимировать простейшим образом:

$$r_q^u = \int_{V_{q,m}} u dV \approx u_q^m V_{q,m}^m, \quad (13)$$

где под  $V_{q,m}^m$  понимается значение объема  $V_{q,m}$ .

Поскольку определенные в (12) и (13) величины являются линейными формами от узловых значений решений, можно ввести локальные векторы четвертого порядка

$$\bar{I}_m^u = \{I_q^u\}, \quad \bar{r}_m^u = \{r_q^u\}, \quad \bar{u}_m^u = \{u_q^u\}, \quad q \in \Omega_m,$$

связи между которыми записываются в алгебраической форме:

$$\bar{I}_m^u = B_m \bar{u}_m^u, \quad \bar{r}_m^u = Q_m \bar{u}_m^u, \quad B_m = \{S_{q',q}^m\}, \quad Q_m = \text{diag} \{V_0^m, V_1^m, V_2^m, V_3^m\}$$

(здесь  $B_m$  и  $Q_m$  – квадратные матрицы).

Рассмотрим теперь аналогичное (11) балансное соотношение, получаемое из интегрирования второго уравнения (9). Представляя в аддитивной форме поверхностные и объемные интегралы, а также вводя локальные векторы  $\bar{I}_m^v, \bar{r}_m^v, \bar{v}_m$ , можно определить формальные соотношения  $\bar{I}_m^v = B_m \bar{v}_m$ ,  $\bar{r}_m^v = Q_m \bar{v}_m$ .

Обозначая составные локальные векторы восьмого порядка

$$\bar{I}_m = \{\bar{I}_m^u, \bar{I}_m^v\}, \quad \bar{r}_m = \{\bar{r}_m^u, \bar{r}_m^v\}, \quad \bar{w}_m^{(c)} = \{\bar{u}_m, \bar{v}_m\},$$

определим соответствующую локальную матрицу в блочной форме:

$$\bar{A}_m^{(c)} \bar{w}_m^{(c)} \equiv \begin{bmatrix} B_m + \kappa^{\text{Re}} Q_m & -\kappa^{\text{Im}} Q_m \\ \kappa^{\text{Im}} Q_m & B_m + \kappa^{\text{Re}} Q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_m \\ \bar{v}_m \end{bmatrix}, \quad (14)$$

элементы которой, с одной стороны, могут быть вычислены только по характеристикам одного элемента  $E_m$ , а с другой – вносят свои аддитивные вклады в элементы итоговой глобальной матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Aw = f. \quad (15)$$

При этом надо иметь в виду, что определенная в (14) локальная матрица обусловлена аппроксимацией только для одной из координатных компонент электрического поля. А полная локальная матрица будет иметь 18-й порядок и блочно-диагональный вид  $\bar{A}_m = \text{diag}(\bar{A}_m^x, \bar{A}_m^y, \bar{A}_m^z)$ , где каждый из диагональных блоков имеет форму  $\bar{A}_m^{(c)}$  из (14); соответственно полный локальный вектор неизвестных выражается как  $\bar{w}_m = \{\bar{w}_m^x, \bar{w}_m^y, \bar{w}_m^z\}$  (верхний индекс  $(c)$  в (14) заменяется последовательно индексами  $x, y, z$ ).

Учет краевых условий и формирование локального и глобального векторов  $f_m, f$  правой части также может быть осуществлен на поэлементном уровне, если одна из сеточных граней конечного элемента  $E_m$  является граничной [9]. Наличие условия Неймана никак не влияет на структуру и значения коэффициентов локальной матрицы  $\bar{A}_m$ . Неизвестные функции в узлах, лежащих на сеточных гранях с условием Дирихле, просто исключаются из системы уравнений, а в общем случае локальная матрица может изменить свой блочно-диагональный вид (если граничные условия не являются распадающимися).

Отметим, что построенная аппроксимация обладает важным свойством: она обеспечивает равенство нулю сеточному аналогу дивергенции поля, которая определяется путем осреднения по ячейке конечного объема с помощью численного интегрирования уравнения (10):

$$(\text{div}^h \mathbf{E})_l \equiv \sum_q \frac{(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_q) S_{0,l}}{V_l l_{0,q}} \approx \frac{1}{V_l} \int_{V_l} \text{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{V_l} \int_{S_l} \mathbf{E} dS.$$

В силу данного построения сеточной краевой задачи во всех граничных точках будем иметь  $\text{div}^h \mathbf{E} = 0$ . Отсюда следует, что построенный сеточный аналог векторного уравнения Гельмгольца относительно сеточной дивергенции имеет нулевое решение.

После нахождения компонент электрического поля остается актуальной практическая задача вычисления проекции вектора магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Для ее приближенного решения воспользуемся векторным уравнением

$$\mathbf{H} = \frac{i}{\omega \mu_r \mu_0} \text{rot} \mathbf{E},$$

после интегрирования которого по конечному элементу  $E_m$  получим соотношение

$$\int_{E_m} \mathbf{H} dV = \int_{E_m} \frac{i}{\omega \mu_r \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E} dV \cong - \frac{i}{\omega \mu_r \mu_0} \int_{S_m} (\mathbf{E} \times \mathbf{e}_n) dS,$$

где  $\mathbf{e}_n$  – единичный вектор нормали к поверхности элемента  $S_m$ .

Обозначив через  $\mathbf{H}_m$  и  $\mathbf{E}_j$ ,  $j=1,2,3,4$ , значения векторов магнитного и электрического полей в барицентре тетраэдра  $E_m$  и в барицентрах его четырех граней, после применения простейших кубатурных формул получим выражение

$$\mathbf{H}_m \cong i \sum_{j=1}^4 \frac{S_{m,j} (\mathbf{E}_{m,j} \times \mathbf{e}_n^j)}{\omega \mu_r \mu_0 V_m}.$$

Здесь  $V_m$  – объем элемента  $E_m$ , а  $S_{m,j}$  – площадь его  $j$ -й грани.

**Итерационные методы решения СЛАУ.** Для решения получаемой не-симметричной системы будем применять два типа предобусловленных итерационных процессов в подпространствах Крылова. В первую очередь мы используем модификацию Айзенштата для неполной факторизации:

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{u} &= \bar{f} = (I - \bar{L})^{-1} G^{-1/2} f, \\ \bar{A} &= (I - \bar{L})^{-1} + (I - \bar{U})^{-1} - (I - \bar{L})^{-1} (2I - \bar{D}) (I - \bar{U})^{-1}, \quad \bar{u} = (I - \bar{L})^{-1} G^{-1/2} u, \\ \bar{L} &= G^{-1/2} L G^{-1/2}, \quad \bar{U} = G^{-1/2} U G^{-1/2}, \quad \bar{D} = G^{-1/2} D G^{-1/2}, \\ G &= \frac{1}{\omega} D - \theta S, \quad S e = \left( \frac{1-\omega}{\omega} D + L G^{-1} U \right) e, \end{aligned}$$

где  $D$ ,  $L$ ,  $U$  – диагональная и строгие нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно;  $S$  – диагональная матрица;  $e$  – вектор с единичными компонентами;  $0 < \omega < 2$  – релаксационный итерационный параметр;  $0 \leq \theta \leq 1$  – компенсирующий параметр.

Если исходная матрица  $A$  симметричная и положительно-определенная, что может быть в частном случае вещественного коэффициента  $k$  в уравнении Гельмгольца (7), то  $A$  будет также симметричной и положительно-определенной матрицей, и для решения СЛАУ (14) можно применять метод SCR [10]:

$$\begin{aligned} r^0 &= \bar{f} - \bar{A}u^0, \quad p^0 = r^0, \\ \bar{u}^{n+1} &= \bar{u}^n + \alpha_n p^n, \quad \alpha_n = (\bar{A}r^n, r^n) / (\bar{A}p^n, p^n), \\ r^{n+1} &= r^n + \alpha_n \bar{A}p^n, \quad p^{n+1} = p^n + \beta_n p^n, \quad \beta_n = (\bar{A}r^{n+1}, r^{n+1}) / (\bar{A}r^n, r^n), \quad n=0,1,\dots, \end{aligned}$$

обеспечивающий монотонное убывание нормы  $\|r^n\| = \sqrt{(r^n, r^n)}$  с ростом  $n$ .

Критерий окончания итераций и рекуррентная формула пересчета векторов  $\bar{A}p^n$  выглядят следующим образом:

$$(r^n, r^n) / (\bar{f}, \bar{f}) \leq \varepsilon^2, \quad \bar{A}p^{n+1} = \bar{A}r^{n+1} + \beta_n \bar{A}p^n$$



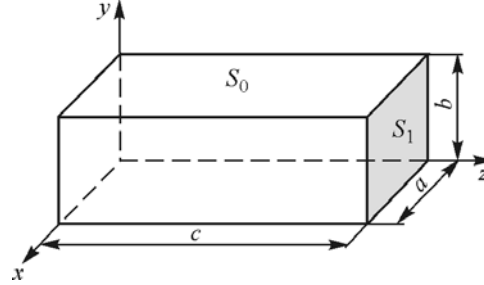


Рис. 2. Расчетная область для модельных задач

(здесь  $\varepsilon \ll 1$  – задаваемая точность итерационного процесса).

В случае если матрицы  $A$  и  $\bar{A}$  несимметричны, к системе (14) предварительно применяем левую трансформацию Гаусса  $\tilde{A}\bar{u} = \bar{A}\bar{A}^t\bar{u} = \bar{A}^t\bar{f} = \tilde{f}$ , после чего решение (13) осуществляется по формулам (17) с заменой матрицы  $\bar{A}$  и вектора  $\bar{f}$  матрицей  $\tilde{A}$  и вектором  $\tilde{f}$  соответственно.

**Численные результаты.** Рассмотрим примеры расчетов трехмерных тестовых электромагнитных полей в волноводе с однородной средой при различных физических условиях. Расчетная область представляет собой параллелепипед  $\Omega = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$  (рис. 2) с длинами сторон  $a = 72$ ,  $b = 34$ ,  $c = 200$ . Боковая поверхность  $S_0 = \{0 < z < c\}$ , плоскость  $z = 0$  представляет собой металлическую стенку с заданным условием (2), на границе  $S_1 = \{z = c\}$  ставится условие волнового входа (3). Краевые задачи для всех компонент электрического поля в данном случае являются независимыми, так как имеют распадающиеся граничные условия.

Точное решение рассматриваемой задачи в общем случае имеет вид

$$\mathbf{E}(x, y, z) = B\mathbf{E}_0 e^{-i\gamma z} + C\mathbf{E}_0 e^{i\gamma z},$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 - k_c^2}, \quad k = k_0 \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}, \quad k_c = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

где  $B$  и  $C$  – постоянные, определяемые из краевых условий  $\varepsilon_0 = 10^7 / (4\pi c^2)$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ,  $\omega = 6\pi \cdot 10^9$ ,  $c = 2,998 \cdot 10^{11}$ .

Расчеты проводились для трех задач с различными материальными параметрами сред и различными краевыми условиями на  $S_0$ .

**Тест 1.**  $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_y \sin(\pi x/a)$ , а точное решение является вещественным и имеет только  $y$ -компоненту, зависящую от  $x$  и  $z$ :

$$E_y = \frac{\sin(\pi x/a) \cdot \sin(\gamma z)}{\sin(\gamma c)}.$$

**Тест 2.**  $\varepsilon_r = 2 - 0,1i$ ,  $\mu_r = 1$ , остальные параметры и точное решение имеют такой же вид, но  $\gamma$  и  $E_y$  в данном случае являются комплексными.

**Тест 3.**  $\varepsilon_r = 4$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $m = n = 1$ , а возбуждающее поле имеет две ненулевые компоненты:

$$E_{0,x} = (m\pi/a) \cos(m\pi/a) \cdot \sin(n\pi/b), \quad E_{0,y} = (n\pi/b) \sin(m\pi/a) \cdot \cos(n\pi/b),$$

при этом искомое электрическое поле является вещественным и имеет все три компоненты:

$$E_x = E_{0,x} \frac{\sin(\gamma z)}{\sin(\gamma c)}, \quad E_y = E_{0,y} \frac{\sin(\gamma z)}{\sin(\gamma c)}, \quad E_z = -\frac{k_c^2}{\sin(\gamma c)} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cdot \cos(\gamma z).$$

Численное решение рассматриваемых задач проводилось на последовательности вложенных равномерных параллелепипедальных сеток, где каждый параллелепипед разбивался на шесть тетраэдров с числом шагов по каждой из координат  $I = J = K = 8, 16, 32, 64$ .

Целью экспериментов являлось исследование сходимости сеточных решений при увеличении числа шагов, а также сравнение итерационных свойств методов LTCR [11] и SCR. Все расчеты проводились при использовании итерационной точности  $\varepsilon = 10^{-7}$  и параметров  $\omega = 1, \theta = 0$ .

В табл. 1 для всех тестовых задач приводятся количества итераций, получаемых при решении СЛАУ на четырех разных сетках методом LTCR.

В табл. 2 представлены аналогичные результаты для предобусловленного метода SCR, при этом запоминались и ортогонализировались все направляющие векторы  $p^n$ .

В табл. 3 приводятся максимальные по расчетной области абсолютные погрешности  $\delta E, \delta H$  для электрического и магнитного полей на четырех сетках для первых двух тестовых задач. При этом для второго теста с комплексным полем максимум ошибки берется также по вещественной и мнимой частям.

Т а б л и ц а 1

$I = J = K$	Тест 1	Тест 2	Тест 3		
			$E_x$	$E_y$	$E_z$
8	133	267	159	232	169
16	404	694	558	743	463
32	1355	2159	1425	1653	1194
64	4598	3692	3553	3905	3454

Т а б л и ц а 2

$I = J = K$	Тест 1	Тест 2	Тест 3		
			$E_x$	$E_y$	$E_z$
8	41	106	70	106	66
16	70	171	125	175	101
32	127	315	200	284	163
64	229	475	361	503	310

Т а б л и ц а 3

$I = J = K$	Тест 1		Тест 2	
	$\delta E$	$\delta H$	$\delta E$	$\delta H$
8	6,51	$1,26 \cdot 10^{-5}$	1,97	$6,83 \cdot 10^{-6}$
16	1,61	$3,82 \cdot 10^{-6}$	1,56	$5,32 \cdot 10^{-6}$
32	0,276	$1,01 \cdot 10^{-6}$	0,52	$1,92 \cdot 10^{-6}$
64	0,064	$4,10 \cdot 10^{-7}$	0,11	$5,25 \cdot 10^{-7}$

Т а б л и ц а 4

$I = J = K$	$\delta E_x$	$\delta E_y$	$\delta E_z$	$\delta H_x$	$\delta H_y$	$\delta H_z$
8	0,343	0,727	2,620	$1,14 \cdot 10^{-5}$	$5,41 \cdot 10^{-6}$	$2,00 \cdot 10^{-6}$
16	0,062	0,131	0,266	$1,71 \cdot 10^{-6}$	$8,07 \cdot 10^{-7}$	$3,71 \cdot 10^{-7}$
32	0,0084	0,0178	0,0326	$3,19 \cdot 10^{-7}$	$1,50 \cdot 10^{-7}$	$9,88 \cdot 10^{-8}$
64	0,0019	0,0048	0,0073	$1,11 \cdot 10^{-7}$	$5,22 \cdot 10^{-8}$	$4,58 \cdot 10^{-8}$

В табл. 4 сведены аналогичные результаты для всех рассчитанных компонент электрического и магнитного полей в третьей тестовой задаче.

Отметим, что при используемой итерационной точности  $\varepsilon = 10^{-7}$  получаемые ошибки численных решений практически одинаковы для обоих методов.

**Заключение.** Анализ приведенных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- скорости сходимости обоих рассмотренных методов для различных тестовых задач различаются между собой несущественно, что положительно характеризует их потенциальную применимость для решения уравнений Гельмгольца;

- погрешности получаемых приближений убывают примерно квадратично по отношению к характерному шагу сетки  $h$ , это одинаково относится как к электрическому, так и магнитному полю.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. М.: Радио и связь, 1984.
2. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
3. Bossavit A. Computational Electromagnetism. N. Y.: Academ Press, 1987.
4. Мартаков С. В., Эпов М. И. Прямые двумерные задачи электромагнитного каротажа // Геология и геофизика. 1999. 40, № 2. С. 250.

5. **Ильин В. П., Соловьев С. А.** О решении двумерной краевой задачи индукционного каротажа // Тр. конф. «Математические модели и методы их исследования». Красноярск: Изд-во ИВМ СО РАН, 2001. С. 272.
6. **Haber E., Ascher M.** Fast finite volume simulation of 3D electromagnetic problems with highly discontinuous coefficients // SIAM Journ. Sci. Comput. 2001. **22**, N 6. P. 1943.
7. **Igarashi H.** On the property of the curl-curl matrix in finite element analysis with edge elements // IEEE Trans. on Magnetics. 2001. **37**, N 5. P. 3129.
8. **Соловейчик Ю. Г., Персова М. Г., Тригубович Г. М.** Математическое моделирование процесса становления осесимметричного поля вертикальной электрической линии // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. **6**, № 2. С. 107.
9. **Нечаев О. В., Шурина Э. П., Федорук М. П.** Использование метода конечных элементов для численного решения квазистационарных уравнений Максвелла // Вычисл. технологии. 2004. **9**, № 5. С. 73.
10. **Eisenstat S. C., Elman H. C., Schultz M. H.** Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations // SIAM Journ. Numer. Anal. 1983. **20**, N 3. P. 345.
11. **Ильин В. П.** Численный анализ. Ч. 1. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004.

*Поступила в редакцию 3 ноября 2006 г.*