РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2014 № 3

УДК 539.374

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ВОКРУГ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫРАБОТКИ ПО СМЕЩЕНИЯМ ЕЕ ГРАНИЦЫ

А. И. Чанышев, И. М. Абдулин

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

Предлагается определять пластическое состояние массива пород вокруг незакрепленной цилиндрической выработки по данным измерений смещений на ее поверхности. Получаемая (переопределенная с точки зрения классической постановки) задача имеет единственное решение, позволяющее, не рассматривая упругопластическую задачу, находить напряжения, деформации, смещения в пластической области деформирования и в том числе упругопластическую границу.

Напряжения, деформации, упругость, пластичность, упругопластическая граница, переопределенная задача, задача Коши

Известно, что около отверстий образуется зона повышенных напряжений. При достижении напряжениями некоторой заданной величины материал возле отверстия переходит в неупругое состояние. Основная задача исследований — получить распределение напряжений, деформаций, перемещений в области неупругости, найти границу, отделяющую область неупругости от области упругости.

Решению этой проблемы посвящено множество работ [1 – 10]. Отметим принципиальную суть этих решений. По образному выражению Е. И. Шемякина, решения [1 – 10] отвечают следующему принципу: напряжения в упругопластической задаче определяются при движении от контура выработки в глубь массива пород (до “бесконечности”), смещения восстанавливаются наоборот — при движении из глубины массива пород к контуру выработки. Что это означает? Поскольку задача для напряжений в плоском варианте теории пластичности (в случае плоской деформации) относится к гиперболическому типу, то напряжения, исходя из характеристик, определяются через краевые условия на контуре выработки. Далее для отыскания напряжений в области упругости применяются формулы Колосова – Мусхелишвили и граничные условия на “бесконечности”:

$$\sigma_x\Big|_\infty = -p\,, \quad \sigma_y\Big|_\infty = -q\,, \quad \tau_{xy}\Big|_\infty = 0 \quad (p, q > 0)\,.$$

Используя условия непрерывности напряжений на упругопластической границе, конформное отображение области упругих деформаций на внешность единичной окружности, восстанавливаются комплексные потенциалы $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ ($z = w(\xi)$ — конформно-отображающая функция), $\varphi(z)$, $\psi(z)$. По этим функциям находятся напряжения и смещения в упругой области деформирования вплоть до упругопластической границы L. После восстановления смещений в упругой области деформирования строятся смещения в пластической зоне, чему посвящена работа [11]. При этом используется то обстоятельство, что задача определения смещений в пластической зоне также относится к гиперболическому типу. По краевым условиям на упругопластической границе L восстанавливаются неупругие смещения на контуре выработки.

Ниже предлагается другое решение рассматриваемой задачи при условии, что на контуре выработки, кроме вектора напряжений Коши, задается еще и вектор перемещений, однако условия на “бесконечности” здесь не используются. По этим переопределенным с точки зрения классической постановки условиям получаются напряжения, смещения сначала в области пластических деформаций, затем они выстраиваются в области упругих деформаций. При этом и напряженное, и деформационное состояния (деформации определяются через перемещения) находятся одновременно при движении от контура выработки в глубь массива пород. Упругопластическая граница определяется без решения упругопластической задачи, а для нахождения напряжений, деформаций, смещений в области упругости используются одновременно три формулы Колосова – Мусхелишвили, из которых вначале получаются потенциалы Колосова – Мусхелишвили, а затем по ним восстанавливаются напряжения, деформации и смещения в области упругости.

Алгоритм решения данной задачи выглядит следующим образом. Имеется участок идеально-пластического деформирования материала (рис. 1). На площадке AB $\tau = \tau_s$ (τ_s — константа материала), при этом для данного напряжения $\tau = \tau_s$ сдвиг γ, как видно из рис. 1, изменяется в широких пределах. Отыскать значение γ можно, определив сначала распределение смещений в деформируемом теле, затем дифференцированием этого поля установив все возможные деформации и в том числе сдвиг γ в зависимости от смещений на границе самого тела. Эта идея была высказана еще в 70-е годы прошлого столетия Е. И. Шемякиным. Развитие ее представлено в данной работе.

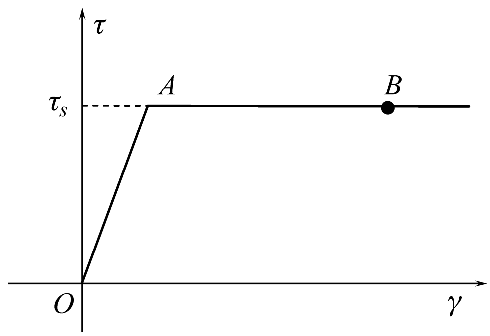

Рис. 1. Диаграмма идеальной пластичности (по оси ординат откладывается максимально-касательное напряжение, по оси абсцисс — максимальная сдвиговая деформация)

Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть в направлении оси z деформация отсутствует ($\varepsilon_z = 0$), а в плоскости xOy задано сечение выработки в виде кругового отверстия радиусом a (рис. 2).

Контур выработки свободен от напряжений:

$$\sigma_r\big|_{r=a} = 0, \quad \tau_{r\theta}\big|_{r=a} = 0, \tag{1}$$

а в зоне пластических деформаций справедливо условие пластичности Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + 4\tau_{r\varphi}^2} = 2\tau_s \quad (\tau_s > 0), \tag{2}$$

где τ_s — предел упругости; σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, $\sigma_2 = \sigma_z$; r, φ — полярные координаты, кроме того, выполняется условие соосности тензоров напряжений и деформаций:

$$\frac{2\tau_{r\varphi}}{\sigma_r - \sigma_\varphi} = \frac{2\varepsilon_{r\varphi}}{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}. \tag{3}$$

Пусть в направлении 2-го главного направления связь между напряжениями и деформациями — упругая, что соответствует известному предположению Хаара – Кармана для случая неполной пластичности [12]:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 \tag{4}$$

или, в силу условия $\varepsilon_z = 0$, выражению

$$\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3). \tag{5}$$

Будем считать также, что исследуемый материал подчиняется закону упругого изменения объема:

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1-2\nu)}{E} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \tag{6}$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

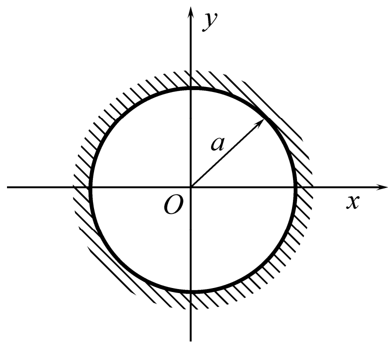

Рис. 2. Сечение выработки в виде кругового отверстия радиусом a

Подставляя (5) в (6) и используя условие $\varepsilon_2 = 0$, находим

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)(1-2\nu)}{2G}, \tag{7}$$

где $2G = E/(1+\nu)$ — модуль сдвига.

Далее, используя уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ и условие пластичности (2), имеем известную [13] гиперболическую систему уравнений с двумя характеристиками, совпадающими с направлениями действия максимального касательного напряжения и двумя соотношениями на них, связывающими среднее напряжение и угол, задающий направление главных осей тензоров напряжений или деформаций (оси по условию (3) совпадают). Используя это обстоятельство и граничные условия (1), находим, что напряжения в области пластичности записываются однозначно выражениями

$$\sigma_r = 2\tau_s \ln\frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = -2\tau_s + 2\tau_s \ln\frac{r}{a}, \quad \tau_{r\varphi} = 0. \tag{8}$$

При этом, однако, неизвестно до какой границы распространяется это решение (8).

Чтобы определить ее, будем считать, что на границе выработки $r = a$ известно также распределение перемещений в виде

$$u_r\big|_{r=a} = \alpha(\varphi), \quad u_\varphi\big|_{r=a} = \beta(\varphi), \tag{9}$$

где u_r — радиальное; u_φ — тангенциальное перемещение; φ — полярный угол; α, β — заданные функции.

Для отыскания смещений, а по ним деформаций $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{r\varphi}$ перепишем условия (3), (7) в терминах перемещений u_r, u_φ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi} = -\left(1 - 2\ln\dfrac{r}{a}\right)\dfrac{\tau_s(1-2\nu)}{G}, \\ \dfrac{\partial u_r}{r\partial\varphi} + \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \dfrac{u_\varphi}{r} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Первое уравнение в (10) — это (7), второе уравнение — (3) при условии $\tau_{r\varphi} = 0$, определяющее равенство $\varepsilon_{r\varphi} = 0$.

Используя (10), получим отдельно уравнения для отыскания смещений u_r, u_φ. Возьмем из первого уравнения (10) производную $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, а из второго — производную $\dfrac{\partial}{\partial r}$ и вычтем из первого уравнения второе. В результате получим

$$\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

С помощью второго уравнения (10) (выражая из него производную $\dfrac{\partial u_r}{r\partial\varphi}$) находим

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u_\varphi}{r^2\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0. \tag{12}$$

В это уравнение не входит u_r, оно в чистом виде определяет смещение u_φ. Уравнение (12) относится к гиперболическому типу с двумя вещественными характеристиками, совпадающими с логарифмическими спиралями. Далее продифференцируем первое уравнение (10) по r, а из второго уравнения выразим производную $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, после чего вычтем из первого уравнения второе. В результате имеем

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{2\tau_s(1-2\nu)}{rG}. \tag{13}$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка для определения смещения u_r. Его решение ищем в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного. Частное решение неоднородного уравнения есть

$$u_r^{\text{частное}} = A\, r\ln r, \tag{14}$$

где $A = [\tau_s(1-2\nu)]/G$.

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (13), имеет вид (12). Дальнейшая задача заключается в написании общего решения однородного дифференциального уравнения (12). Будем искать решение уравнения (12) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от “своего” аргумента:

$$u_\varphi = f(r)g(\varphi). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (12), получим уравнение

$$\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = -\frac{r^2}{f}\left[f'' + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{f}{r^2}\right]. \tag{16}$$

Здесь штрихами обозначаются производные. Слева в (16) стоит функция переменной φ, справа – переменной r. Очевидно, что $g(\varphi)$ должна быть периодической функцией угла φ (период должен совпадать с 2π). По этой причине положим

$$\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = -k^2,$$

где k — целое число.

Тогда функция $g(\varphi)$ запишется как

$$g(\varphi) = C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi, \tag{17}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Для определения функции f имеем уравнение

$$f'' + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{(1-k^2)f}{r^2} = 0. \tag{18}$$

Будем искать решение (18) в виде

$$f = r^\lambda,$$

где λ – постоянное число.

Для λ из (18) получаем значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-k^2}.$$

Если $k = 0$, то

$$f = D_1 r + \frac{D_2}{r}, \tag{19}$$

где D_1, D_2 — константы;
если $k = \pm 1$, то

$$f = D_1 \ln r + D_2, \tag{20}$$

в противном случае ($|k| \geq 2$) числа λ получаются комплексными (чисто мнимыми) и решение f записывается в виде

$$f(r) = D_1 \cos \ln r^{\sqrt{k^2-1}} + D_2 \sin \ln r^{\sqrt{k^2-1}}, \tag{21}$$

потому что

$$r^{i\sqrt{k^2-1}} = e^{\ln r^{i\sqrt{k^2-1}}} = e^{i\sqrt{k^2-1}\ln r}.$$

Аналогично находится решение однородного дифференциального уравнения (13).

Рассмотрим примеры построения решений для некоторых частных случаев.

А. Пусть $k = 0$, смещения u_r, u_φ, полученные выше, запишутся в виде

$$\begin{cases} u_r = E_1 r + \dfrac{E_2}{r} + \dfrac{\tau_s(1-2\nu)}{G} r\ln r, \\ u_\varphi = D_1 r + \dfrac{D_2}{r}, \end{cases} \tag{22}$$

где E_1, E_2, D_1, D_2 — константы.

Для определения связей между константами E_1, E_2, D_1, D_2 используем (10). Из (10) следуют зависимости между константами и окончательный вид функций u_r, u_φ:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{\tau_s(1-2\nu)}{G} r\left(\ln\dfrac{r}{a} - 1\right) + \dfrac{E_2}{r}, \\ u_\varphi = D_1 r. \end{cases} \tag{23}$$

Если при $r = 0$ $\left.u_\varphi\right|_{r=a} = 0$, то $D_1 = 0$. Для определения значения константы E_2 имеем зависимость

$$\left.u_r\right|_{r=a} = \frac{E_2}{a}. \tag{24}$$

Используя (23), найдем максимальную сдвиговую деформацию:

$$\gamma = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}\right) = \frac{\tau_s(1-2\nu)}{2G} - \frac{E_2}{r^2}. \tag{25}$$

Для того чтобы вокруг выработки была пластическая зона, необходимо, чтобы этот сдвиг на контуре выработки был больше величины $\gamma_s = \tau_s/(2G)$, где γ_s — предельный упругий сдвиг, т. е.

$$\frac{E_2}{a^2} \le -\frac{\tau_s\nu}{G}.$$

Другими словами, смещение u_r на границе выработки, отнесенное к радиусу выработки a, должно быть отрицательным и больше по абсолютной величине отношения $\tau_s\nu/G$.

Упругопластическая граница $r = c$ находится из (25), где максимальная сдвиговая деформация $\gamma = \gamma_s$.

Из этого условия получим

$$\frac{c}{a} = \sqrt{-\frac{\left.u_r\right|_{r=a}}{a}\frac{G}{\nu\tau_s}}. \tag{26}$$

В. Пусть $k = 1$, тогда смещения u_r, u_φ примут вид

$$\begin{cases} u_r = (E_1\ln r + E_2)\sin(\varphi - \chi) + \dfrac{\tau_s(1-2\nu)}{G} r\left(\ln\dfrac{r}{a} - 1\right), \\ u_\varphi = (D_1\ln r + D_2)\cos(\varphi - \chi), \end{cases} \tag{27}$$

где χ — некоторый заданный угол, характеризующий распределение смещений u_r, u_φ на контуре $r = a$.

Опять используем (10). После подстановки (27) в (10) удовлетворяем этой системе уравнений для всех значений угла φ и радиуса r. В результате имеем следующее решение задачи в области пластичности:

$$\begin{cases} u_r = (E_1 \ln r + E_2)\sin(\varphi-\chi) + \dfrac{\tau_s(1-2\nu)}{G} r\left(\ln\dfrac{r}{a}-1\right), \\ u_\varphi = (E_1 \ln r + E_2 + E_1)\cos(\varphi-\chi). \end{cases} \quad (28)$$

Из (28) следует система уравнений для нахождения E_1, E_2:

$$\begin{cases} u_r\big|_{r=a} = (E_1 \ln a + E_2)\sin(\varphi-\chi), \\ u_\varphi\big|_{r=a} = (E_1 \ln a + E_2 + E_1)\cos(\varphi-\chi). \end{cases}$$

Она определяет вид смещений u_r, u_φ на границе $r = a$.

Далее вычислим максимальную сдвиговую деформацию γ в пластической области деформирования:

$$\gamma = \frac{1}{2}(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}\right) = \frac{\tau_s(1-2\nu)}{2G} + \frac{E_1}{r}\sin(\varphi-\chi).$$

Эта деформация также должна быть не меньше $\gamma_s = \tau_s/(2G)$, т. е. должно быть выполнено условие

$$\frac{E_1}{r}\sin(\varphi-\chi) \ge \frac{\tau_s\nu}{G}. \quad (29)$$

В частности, при $r = a$ $\sin(\varphi-\chi) \ge \dfrac{\tau_s\nu\, a}{GE_1}$. Так как синус по абсолютной величине ограничен единицей, то должно быть выполнено ограничение

$$|E_1| \ge \frac{\tau_s\nu}{G} a.$$

Если $E_1 = +\dfrac{\tau_s\nu}{G}a$, то только точка $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \chi$ на контуре $r = a$ удовлетворяет условию (29). С ростом E_1 $\left(E_1 > \dfrac{\tau_s\nu}{G}a\right)$ граница области пластичности возрастает, при этом концевые точки на границе $r = a$ определяются условиями

$$\chi + \arcsin\frac{\tau_s\nu a}{GE_1} \le \varphi \le \chi + \pi - \arcsin\frac{\tau_s\nu a}{GE_1}.$$

Если, например, $E_1 = \dfrac{6}{5}\dfrac{\tau_s\nu a}{G}$, то $\chi + 0.314\pi \le \varphi \le \chi + \pi - 0.314\pi$. Граница пластической области в этом случае $r = c(\varphi)$ находится из уравнения $\gamma = \gamma_s$ или на основании (29) как

$$c(\varphi) = \frac{E_1 G}{\tau_s\nu}\sin(\varphi-\chi).$$

На рис. 3 эта зависимость построена для $E_1 = \dfrac{6}{5}\dfrac{\tau_s\nu a}{G}$. Она представляет собой дугу окружности с центром в точке (0, 3/5) и радиусом окружности 3/5, при этом значение χ полагалось равным нулю.

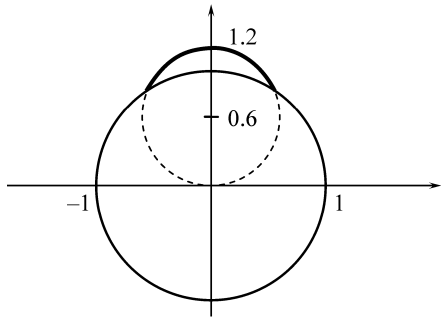

Рис. 3. Упругопластическая граница для значения $E_1 = \frac{6}{5}\frac{\tau_s \nu a}{G}$

С. Пусть $k = 2$, смещения u_r, u_φ, полученные для этого случая, имеют вид

$$\begin{cases} u_r = (E_1 \cos\ln r^{\sqrt{3}} + E_2 \sin\ln r^{\sqrt{3}}) \sin 2(\varphi - \chi) + \dfrac{\tau_s(1-2\nu)}{G} r\left(\ln\dfrac{r}{a} - 1\right), \\ u_\varphi = (D_1 \cos\ln r^{\sqrt{3}} + D_2 \sin\ln r^{\sqrt{3}}) \cos(\varphi - \chi). \end{cases}$$

Для определения связей между коэффициентами E_1, E_2, D_1, D_2 используем (10). Считая (10) справедливым для любых значений углов φ и радиуса r, находим отсюда следующие зависимости:

$$D_1 = \frac{E_1 + \sqrt{3}E_2}{2}, \quad D_2 = \frac{-\sqrt{3}E_1 + E_2}{2}. \tag{30}$$

Для определения E_1, E_2 используем граничные значения смещений u_r, u_φ на границе $r = a$. Далее вычисляем сдвиг γ по формуле

$$\gamma = \frac{1}{2}(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}\right) =$$

$$= \frac{\tau_s(1-2\nu)}{2G} + \sqrt{3}\left(\frac{E_2 \cos\ln r^{\sqrt{3}} - E_1 \sin\ln r^{\sqrt{3}}}{r}\right)\sin(\varphi - \chi).$$

Эта величина также должна быть не меньше $\gamma_s = \tau_s/(2\mu)$. Как следствие, имеем ограничение

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}\left(\frac{\cos\ln(r^{\sqrt{3}} + \eta)\sin 2(\varphi - \chi)}{r}\right) \geq \frac{\tau_s \nu}{G}, \tag{31}$$

где

$$\cos\eta = \frac{E_2}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}, \quad \sin\eta = \frac{E_1}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}. \tag{32}$$

Как и в предыдущем случае, замечаем, что условие пластичности наступает прежде всего в точках

$$\varphi = \chi + \pi/4 + \pi k, \quad \text{где } k \in Z,$$

т. е. в двух диаметрально противоположных точках. Затем с ростом величин E_1, E_2 зона пластичности развивается, охватывая контур выработки.

Отметим, что для вычисления E_1, E_2 имеют место формулы:

$$E_1 = \left.\frac{u_r}{\sin 2(\varphi-\chi)}\right|_{r=a}\left(\cos\ln a^{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\ln a^{\sqrt{3}}\right) - \left.\frac{u_\varphi}{\cos 2(\varphi-\chi)}\right|_{r=a}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\ln a^{\sqrt{3}},$$

$$E_2 = -\left.\frac{u_r}{\sin 2(\varphi-\chi)}\right|_{r=a}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\ln a^{\sqrt{3}} - \sin\ln a^{\sqrt{3}}\right) + \left.\frac{u_\varphi}{\cos 2(\varphi-\chi)}\right|_{r=a}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\ln a^{\sqrt{3}}.$$

Упругопластическая граница $r = c(\varphi)$ находится как решение уравнения $\gamma = \gamma_s$.

В заключение заметим, что общий случай складывается из рассмотренных выше. Кроме перечисленных слагаемых, добавляются еще и слагаемые для $k \ge 3$.

ВЫВОДЫ

Показано, что по данным измерений смещений на поверхности выработки можно определить напряженно-деформированное состояние в области пластических деформаций, включая упругопластическую границу.

Построены простейшие примеры решения пластических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Галин Л. А.** Плоская упругопластическая задача // ПММ. — 1946. — Т. 10. — Вып. 3.
2. **Ивлев Д. Д.** Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина // ПММ. — 1957. — Т. 21. — Вып. 5.
3. **Эрлихман Ф. М.** Определение перемещений в задаче Л. А. Галина // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1970. — Вып. 4.
4. **Аннин Б. Д.** Одна плоская упругопластическая задача при экспоненциальном условии текучести // Инж. журн. МТТ. — 1966. — № 3.
5. **Савин Г. Н., Парасюк О. С.** Влияние неоднородного напряженного поля на пластическую зону возле отверстия // ДАН УССР. — 1948. — № 3.
6. **Черепанов Г. П.** К решению некоторых задач теории упругости и пластичности с неизвестной границей // ПММ. — 1964. — Т. 28. — Вып. 1.
7. **Перлин П. И.** Упругопластическое распределение напряжений вокруг отверстий // Труды МФТИ. — 1960. — Вып. 5.
8. **Остросаблин Н. И.** Определение смещений в задаче Л. А. Галина // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1970. — Вып. 14.
9. **Быковцев Г. И., Цветков Ю. Д.** Двумерная задача нагружения упругопластической плоскости, ослабленной отверстием // ПММ. — 1987. — Т. 51. — № 5.
10. **Чанышев А. И., Имамутдинов Д. И.** Решение упругопластической задачи о протяженной цилиндрической выработке // ФТПРПИ. — 1988. — № 5.
11. **Остросаблин Н. И.** Плоское упругопластическое распределение напряжений около круговых отверстий. — Новосибирск: Наука, 1984.
12. **Христианович С. А., Шемякин Е. И.** К теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. — 1967. — № 5.
13. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 17/IV 2014