

УДК 532.59+539.3

## ДВИЖЕНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ ПОД ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНОЙ

А. В. Погорелова, В. М. Козин\*, В. Л. Земляк\*\*

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре

\* Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,  
681013 Комсомольск-на-Амуре

\*\* Амурский государственный гуманитарно-педагогический университет,  
681000 Комсомольск-на-Амуре  
E-mail: milova@yandex.ru

Проведено исследование трехмерной нестационарной задачи о гидроупругом поведении плавающей бесконечной пластины под воздействием волн, генерируемых при горизонтальном прямолинейном движении тонкого твердого тела в жидкости бесконечной глубины. На основе известного решения для нестационарного движения точечного источника массы в бесконечно глубокой жидкости под плавающей пластиной найдено аналитическое решение задачи. Получены асимптотические формулы, моделирующие движение твердого тонкого тела в жидкости путем замены этого тела системой источник — сток. На основе полученных формул численно анализируется влияние толщины пластины, глубины погружения тела, его размеров и скорости равномерного движения на амплитуду прогибов плавающей пластины. Проведено модельное экспериментальное исследование движения подводного судна под неразрушаемой пластиной. Показано, что теоретические и экспериментальные данные хорошо согласуются.

**Ключевые слова:** идеальная жидкость, упругая пластина, нестационарное движение, тонкое погруженное тело.

**Введение.** Существует большое количество работ, посвященных исследованию набегающих волн на плавающую пластину или движения нагрузки по ледяному покрову (см. работы [1, 2] и библиографию к ним). Однако проблема возникновения изгибно-гравитационных волн при движении твердого тела под ледяным покровом изучена недостаточно. Среди первых теоретических работ по этой теме следует отметить работу [3], в которой рассмотрена плоская стационарная задача о движении вихря под слоем битого льда. В [4] описаны модельные эксперименты, подтверждающие возможность разрушения сплошного ледяного покрова движущимся подводным судном. В [5, 6] соответственно для случаев стратифицированной и нестратифицированной жидкостей исследуется стационарное движение точечного источника массы под плавающей упругой пластиной, анализируется влияние скорости перемещения и глубины погружения источника, а также толщины пластины на ее прогибы.

Целью настоящей работы является теоретический и экспериментальный анализ влияния толщины пластины, глубины погружения, скорости равномерного движения и размеров движущегося в жидкости тонкого тела на амплитуду прогибов пластины, плавающей на поверхности этой жидкости.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-08-00130-а).

© Погорелова А. В., Козин В. М., Земляк В. Л., 2012

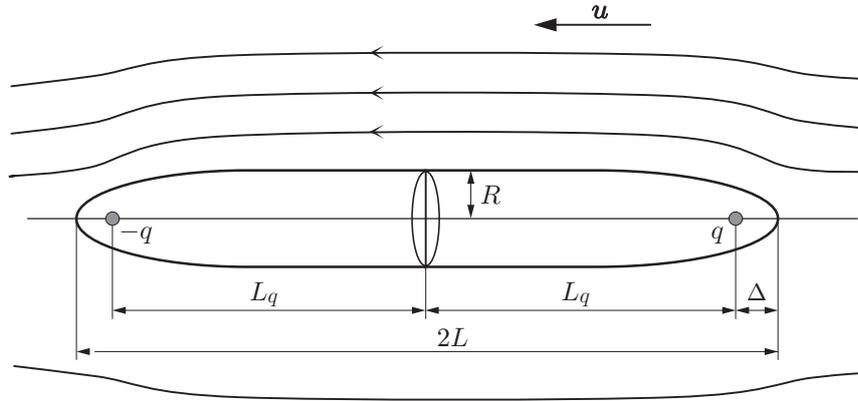


Рис. 1. Схема обтекания системы источник — сток равномерным безграничным потоком жидкости

**1. Применение метода источников и стоков.** Рассматривается бесконечно глубокая идеальная несжимаемая жидкость со свободной поверхностью. На глубине  $d$  вдоль поверхности прямолинейно со скоростью  $u$  движется тонкое затупленное почти осесимметричное тело. Будем считать, что тело неподвижно и на него набегаёт поток жидкости, имеющий на бесконечной глубине скорость  $-u$ . Связанная с телом система координат  $Oxyz$  располагается следующим образом: плоскость  $xOy$  совпадает с невозмущённой поверхностью раздела пластина — вода, направление оси  $x$  совпадает с направлением движения источника, ось  $z$  направлена вертикально вверх, плоскость  $yOz$  совпадает с центральным сечением тела. Предполагается, что вода является идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho_2$ , движение жидкости потенциальное.

Чтобы получить решение задачи обтекания жидкостью тонкого почти осесимметричного тела, рассмотрим сначала обтекание системы источник — сток равномерным безграничным потоком жидкости со скоростью  $(-u, 0, 0)$ . Совместим начало системы координат с центром тела. Источник и сток находятся в точках  $(L_q, 0, 0)$  и  $(-L_q, 0, 0)$  соответственно. Поток жидкости, вытекающий из точечного источника, полностью поглощается точечным стоком, т. е. система источник — сток моделирует замкнутую осесимметричную поверхность тока длиной  $2L$  (диаметр центрального поперечного сечения равен  $2R$ ) (рис. 1).

На оси  $Ox$  перед точечным источником, т. е. при  $x > L_q$ , существует критическая точка  $L_q + \Delta$ , в которой течение разветвляется и его скорость становится равной нулю. Координаты данной точки определяются уравнением

$$\frac{q}{4\pi\Delta^2} - \frac{q}{4\pi(2L_q + \Delta)^2} = u. \tag{1.1}$$

Используя условие  $L_q = L - \Delta$ , уравнение (1.1) можно записать в виде

$$qL(L - \Delta) = 4\pi u \Delta^2 (L - \Delta/2)^2. \tag{1.2}$$

Если расстояние между источником и стоком достаточно велико по сравнению с диаметром тела, то скорость течения в плоскости, соответствующей поперечному срединному сечению тела, приближенно равна скорости набегающего потока  $(-u, 0, 0)$ . Расход жидкости, текущей от источника к стоку через поперечное центральное сечение тела, равен  $q \approx u\pi R^2$ . Учитывая также поток жидкости от источника к стоку через это сечение, получаем более точное выражение для расхода жидкости

$$q \approx (u + 2q/(4\pi L_q^2))\pi R^2. \tag{1.3}$$

Подставляя  $L_q = L - \Delta$  в уравнение (1.3), находим выражение

$$q[1 - R^2/(2(L - \Delta)^2)] \approx u\pi R^2. \quad (1.4)$$

Введем безразмерные переменные  $\delta$  и  $r$ :

$$\delta = \Delta/L, \quad r = R/L. \quad (1.5)$$

Тогда зависимости (1.2), (1.4) можно записать в виде

$$q = 4\pi u L^2 \delta^2 (1 - \delta/2)^2 / (1 - \delta); \quad (1.6)$$

$$q[1 - r^2/(2(1 - \delta)^2)] \approx \pi u L^2 r^2. \quad (1.7)$$

Подставляя  $q$  из (1.6) в (1.7), получаем

$$r^2 \approx \frac{4\delta^2(1 - \delta/2)^2}{1 - \delta} \left(1 - \frac{r^2}{2(1 - \delta)^2}\right). \quad (1.8)$$

Тогда для малого  $r$  из уравнений (1.7), (1.8) следуют асимптотические разложения для  $q$  и  $\Delta$

$$q \approx u\pi R^2(1 + r^2/2 + \dots), \quad \Delta \approx (R/2)(1 + 7r^2/32 + \dots). \quad (1.9)$$

Разложения (1.9) определяют мощность источника и стока и расстояние между источником и крайней точкой обтекаемой поверхности в зависимости от отношения радиуса тела к его полудлине. Заметим, что для современных подводных лодок значения величины  $r$  находятся в диапазоне  $1/11 \leq r \leq 1/8$  [7]. При  $r = 0,100 \div 0,125$  различие результатов расчетов по формулам (1.9) и результатов, полученных с использованием формул [8, 9] для осесимметричного тела в безграничном потоке, составляет менее 0,016 %.

Выражения (1.9) справедливы для безграничной области течения. Рассмотрим течение жидкости со свободной поверхностью. Система координат располагается таким образом, чтобы плоскость  $xOy$  совпадала со свободной поверхностью, а начало координат проецировалось в центр тела. Если рассматривается течение жидкости в нижней полуплоскости ( $z < 0$ ) со свободной поверхностью ( $z = 0$ ), то в верхней полуплоскости ( $z > 0$ ) необходимо добавить систему сток — источник. В результате исследуется обтекание двух источников ( $(L_q, 0, -d)$ ,  $(-L_q, 0, d)$ ) и двух стоков ( $(-L_q, 0, -d)$ ,  $(L_q, 0, d)$ ) ( $d$  — глубина погружения движущегося тела) потоком жидкости со скоростью  $u$  в отрицательном направлении оси  $Ox$  (рис. 2). Заметим, что в данном случае замкнутая поверхность тока жидкости представляет собой почти осесимметричное тело (вследствие наличия в верхней полуплоскости дополнительных стока и источника осевая симметрия нарушается). Для того чтобы

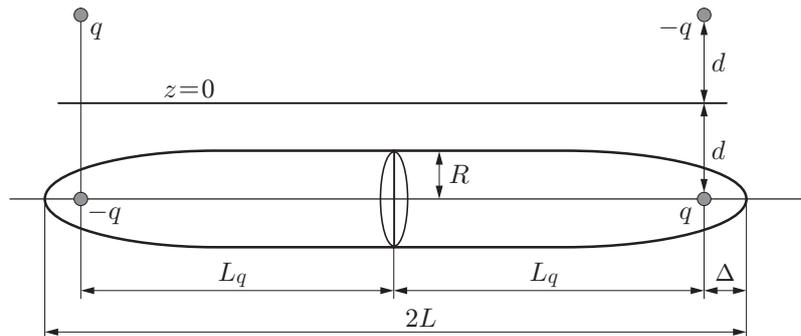


Рис. 2. Схема обтекания системы источник — сток жидкостью со свободной поверхностью

жидкость из нижнего источника не перетекала в верхний сток, необходимо, чтобы скорость набегающего потока  $u$  и мощность источника (стока)  $q$  удовлетворяли условию  $u \gg q/d^2$ . В этом случае положение критической точки течения определяется уравнением (рис. 2)

$$\frac{q}{4\pi\Delta^2} - \frac{q}{4\pi(2L_q + \Delta)^2} - \frac{q\Delta}{4\pi(4d^2 + \Delta^2)^{3/2}} + \frac{q(2L_q + \Delta)}{4\pi(4d^2 + (2L_q + \Delta)^2)^{3/2}} = u, \quad (1.10)$$

а расход течения от источника к стоку через поперечное центральное сечение тела равен

$$q \approx \left( u + \frac{2q}{4\pi L_q^2} - \frac{2qL_q}{4\pi(L_q^2 + 4d^2)^{3/2}} \right) \pi R^2. \quad (1.11)$$

Здесь  $R$  — характерный размер центрального сечения. Заметим, что, поскольку тело неосесимметричное, величина  $R$  вычисляется из уравнения  $\Omega = \pi R^2$ , где  $\Omega$  — площадь центрального поперечного сечения. Подставляя зависимость  $L_q = L - \Delta$  в (1.10), (1.11), получаем уравнения

$$q \left( \frac{1}{\Delta^2} - \frac{1}{(2L - \Delta)^2} - \frac{\Delta}{(4d^2 + \Delta^2)^{3/2}} + \frac{2L - \Delta}{(4d^2 + (2L - \Delta)^2)^{3/2}} \right) = 4\pi u,$$

$$q \left( 1 - \frac{R^2}{2(L - \Delta)^2} + \frac{(L - \Delta)R^2}{2(4d^2 + (L - \Delta)^2)^{3/2}} \right) \approx u\pi R^2,$$

которые с использованием (1.5) и безразмерной переменной  $\chi = d/L$  записываются в виде

$$q \left( \frac{1 - \delta}{(1 - \delta/2)^2} - \frac{\delta^3}{(4\chi^2 + \delta^2)^{3/2}} + \frac{(1 - \delta/2)\delta^2/4}{(\chi^2 + (1 - \delta/2)^2)^{3/2}} \right) = 4\pi u L^2 \delta^2; \quad (1.12)$$

$$q \left( 1 - \frac{r^2/2}{(1 - \delta)^2} + \frac{(1 - \delta)r^2/2}{(4\chi^2 + (1 - \delta)^2)^{3/2}} \right) \approx \pi u L^2 r^2. \quad (1.13)$$

Выражая из (1.13) величину  $q$  и подставляя ее в (1.12), находим

$$\delta \approx \frac{r}{2} \frac{\{(1 - \delta)/(1 - \delta/2)^2 - \delta^3/(4\chi^2 + \delta^2)^{3/2} + (1 - \delta/2)(\delta^2/4)/[\chi^2 + (1 - \delta/2)^2]^{3/2}\}^{1/2}}{\{1 - (r^2/2)/(1 - \delta)^2 + (1 - \delta)(r^2/2)/[4\chi^2 + (1 - \delta)^2]^{3/2}\}^{1/2}}.$$

При малых значениях  $r$  ( $r \rightarrow 0$ ) для расчета мощности источника и стока и расстояния между ними имеем следующие приближенные формулы:

$$q = uq_0, \quad 2L_q = 2(L - \Delta), \quad q_0 \approx \pi R^2 \left( 1 + \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{(4\chi^2 + 1)^{3/2}} \right) + \dots \right), \quad (1.14)$$

$$\Delta \approx \frac{R}{2} \left( 1 + \frac{r^2}{4} \left( \frac{7}{8} - \frac{1}{(4\chi^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{8(\chi^2 + 1)^{3/2}} \right) + \dots \right).$$

Заметим, что при  $\chi \rightarrow \infty$  формулы (1.14) для  $q$  и  $\Delta$  переходят в формулы (1.9). С увеличением параметра  $r$  и уменьшением глубины погружения тела  $\chi$  различие результатов, полученных для осесимметричного тела, движущегося в безграничном потоке [8, 9], и тела, движущегося под свободной поверхностью (см. (1.14)), увеличивается. Например, при  $r = 0,125$  и глубине погружения  $\chi = 0,3$  результаты расчетов по формулам (1.14) отличаются от результатов, полученных с использованием формул [8, 9] для осесимметричного тела в безграничном потоке, не более чем на 0,4 %.

Таким образом, обтекание тонкого затупленного почти осесимметричного тела длиной  $2L$  с площадью центрального поперечного сечения  $\Omega = \pi R^2$  однородным потоком жидкости со свободной поверхностью моделируется обтеканием системы источник — сток

(с добавлением мнимого стока и мнимого источника в верхней полуплоскости). При этом мощность источника (стока)  $q$  зависит от скорости потока жидкости на бесконечности  $u$ , а расстояние между источником и стоком  $2L_q$  не зависит от нее. Обе величины  $q$  и  $2L_q$  зависят от размеров тела (длиной  $2L$  с площадью центрального сечения  $\Omega = \pi R^2$ ) и глубины погружения  $d$ . Формулы (1.14) применимы для вычислений при  $r < 0,3$  и  $\chi > r$ , т. е. при решении большинства прикладных задач.

**2. Движение тонкого тела в жидкости под плавающей пластиной.** Рассматривается бесконечная упругая, изначально не напряженная однородная изотропная тонкая пластина, плавающая на поверхности бесконечно глубокой жидкости. На глубине  $d$  вдоль пластины прямолинейно со скоростью  $u(t)$  движется тонкое затупленное почти осесимметричное тело с размерами  $L$  и  $\Omega$ . В соответствии с формулами (1.14) тело заменяется системой, состоящей из точечного источника дебита  $q(t) = q_0 u(t)$  и точечного стока дебита  $-q(t) = -q_0 u(t)$ , расстояние между которыми равно  $2L_q$ . Связанная с источником система координат  $Oxyz$  располагается следующим образом: плоскость  $xOy$  совпадает с невозмущенной поверхностью раздела пластина — вода, направление оси  $x$  совпадает с направлением движения источника, ось  $z$  направлена вертикально вверх, начало координат совпадает с проекцией источника на плоскость раздела пластина — вода. Предполагается, что вода — идеальная несжимаемая жидкость с плотностью  $\rho_2$ , движение жидкости потенциальное.

В движущейся системе координат потенциал скоростей жидкости  $\Phi(x, y, z, t)$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ , представляет собой сумму потенциалов скоростей источника  $Q_1(0, 0, -d)$ , стока  $Q_2(-2L_q, 0, -d)$ , мнимого стока  $Q_3(0, 0, d)$ , мнимого источника  $Q_4(-2L_q, 0, d)$  и потенциала скоростей волновых движений жидкости  $\varphi(x, y, z, t)$ :

$$\Phi = \frac{q(t)}{4\pi} \left( -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{\varphi(x, y, z, t)}{4\pi}.$$

Здесь

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x + 2L_q)^2 + y^2 + (z + d)^2}, \\ R_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}, \quad R_4 = \sqrt{(x + 2L_q)^2 + y^2 + (z - d)^2}.$$

Нормальный прогиб пластины описывается уравнением

$$D\nabla^4\zeta + \rho_1 h \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - u \frac{\partial\zeta}{\partial x} - 2u \frac{\partial^2\zeta}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \right) = -\rho_2 g \zeta - \rho_2 \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} - u \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) \quad (z = 0),$$

где  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $h$ ,  $\rho_1$  — толщина и плотность пластины. Предполагается, что величины  $\rho_1$  и  $h$  являются постоянными.

Линеаризованное кинематическое условие на поверхности раздела пластина — вода имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} - u \frac{\partial\zeta}{\partial x}.$$

При условии, что в момент времени  $t = 0$  тело не имеет хода и отсутствуют любые возмущения, начальные условия для функции  $\Phi(x, y, z, t)$  записываются в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=0, t=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\rho_1 h}{\rho_2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial t} \right) \Big|_{z=0, t=0} = 0.$$

Предполагается, что после начального ускорения тело движется равномерно со скоростью  $u_1$ , при этом закон изменения скорости в зависимости от времени приближенно выражается формулой

$$u(t) = u_1 \operatorname{th}(\mu t), \quad (2.1)$$

где  $\mu$  — коэффициент, характеризующий начальное ускорение тела. В соответствии с (2.1) расстояние, пройденное телом, вычисляется по формуле

$$s(t) = (u_1/\mu) \ln(\operatorname{ch}(\mu t)).$$

Для получения аналитического решения рассмотрим задачу в безразмерной постановке. При этом в качестве характерного размера используется величина  $L_0 = \sqrt{g_0}$ , а в качестве масштаба скорости — величина  $\sqrt{gL_0}$ . Задача решается с помощью интегральных преобразований. Заметим, что решение аналогичной задачи для случая нестационарного движения одиночного источника в бесконечно глубокой жидкости под упругой пластиной приведено в работе [10]. В соответствии с [10] формула для определения прогиба упругой пластины при движении под ней тонкого затупленного почти осесимметричного тела имеет вид

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0(x, y, t) - \zeta_0(x + 2L_q, y, t), \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_0(x, y, t) = & \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\exp(-k\gamma + ik(x \cos \theta + y \sin \theta))}{1 + \varkappa k^4} \times \\ & \times \left( \exp(\sigma s) \left( 2\varepsilon \cos(\sqrt{\beta} t) \dot{u}|_{t=0} - \int_0^t f_1(\tau) \cos(\sqrt{\beta}(t - \tau)) d\tau \right) + 2\varepsilon(\sigma u^2 - \dot{u}) \right) k dk, \\ & \beta = \frac{k(1 + \varkappa k^4)}{1 + k\varepsilon}, \\ & f_1(\tau) = -2 \exp(-\sigma s(\tau)) \{ u(\tau)(1 + \varkappa k^4) + \varepsilon[\ddot{u}(\tau) - 3\sigma u(\tau)\dot{u}(\tau) + \sigma^2 u^3(\tau)] \}, \\ & \varkappa = \frac{D}{\rho_2 g L_0^4}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1 h}{\rho_2 L_0}, \quad \sigma = ik \cos \theta, \quad \gamma = \frac{d}{L_0}. \end{aligned}$$

Заметим, что в формуле (2.2) все переменные и функции безразмерны.

**3. Экспериментальные исследования.** Экспериментальные исследования движения модели подводного судна (в масштабе 1/500) под неразрушаемым ледяным покровом проводилось в бассейне с размерами  $5,2 \times 1,8 \times 0,8$  м. В качестве ледяного покрова использовалась полимерная пластина с параметрами

$$h = 0,002 \text{ м}, \quad E = 10^7 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_1 = 1200 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 0,4, \quad (3.1)$$

которая моделировала ледяную пластину толщиной 1 м с модулем Юнга  $E = 5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ . Для того чтобы полимерная пластина не тонула, она укладывалась на тонкую полиэтиленовую пленку. Модель подводного судна длиной  $2L = 210$  см, соответствующая субмарине с водоизмещением 12 000 т (в масштабе 1/500), приводилась в движение динамометрической буксировочной системой. Носовая часть модели имела полные обводы эллипсоидной формы с радиусом в поперечном сечении, равным  $L/8$ . Кормовая часть имела заостренную вытянутую форму. Скорость буксировки изменялась путем изменения силы тока,

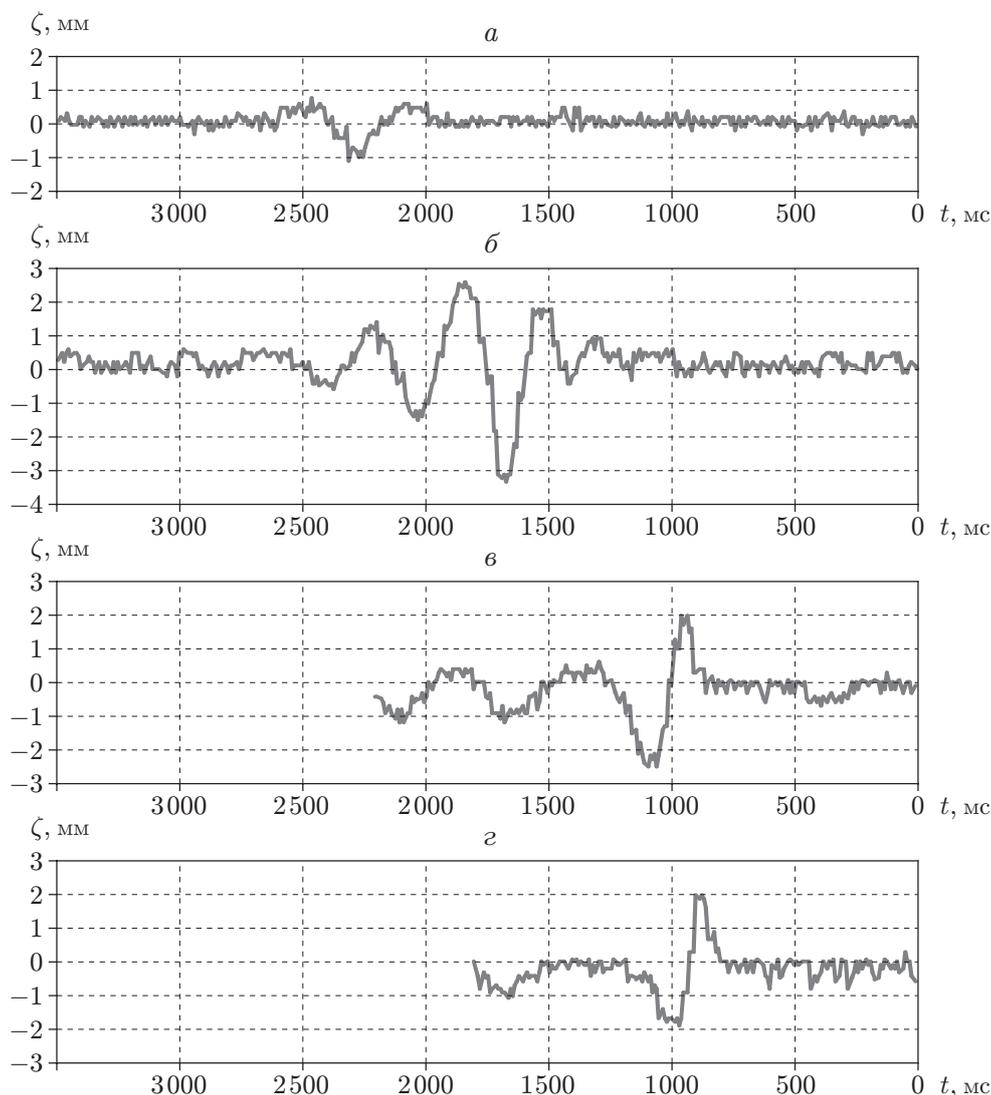


Рис. 3. Экспериментальные зависимости прогиба пластины от времени при движении модели:

$a$  —  $u_1 = 0,626$  м/с;  $б$  —  $u_1 = 0,805$  м/с;  $в$  —  $u_1 = 1,163$  м/с;  $г$  —  $u_1 = 1,342$  м/с

подаваемого на электродвигатели, и измерялась секундомером. После разгона модель выходила на режим равномерного движения с заданной скоростью. Вертикальные перемещения пластины фиксировались бесконтактными инфракрасными датчиками, подключенными к компьютеру. Значения параметров модельных изгибно-гравитационных волн пересчитывались на натурные значения в соответствии с методикой [11]. Анализировалось влияние заглубления и скорости модели на максимальные прогибы пластины. Заметим, что в эксперименте глубина погружения (заглубление) модели варьировалась в диапазоне от 4 до 10 см.

На рис. 3 представлены результаты экспериментов по измерению вертикальных перемещений пластины при движении модели на глубине  $d = 4$  см. Заметим, что в соответствии с выбранным масштабом глубина погружения модели  $d = 4$  см соответствует глубине погружения  $d = 20$  м натурального подводного судна длиной  $2L = 105$  м, а скорости на рис. 3,  $a$ – $г$  — значениям  $u_1 = 14, 18, 26, 30$  м/с. В соответствии с методикой модели-

рования [11] для определения прогибов ледяной пластины толщиной 1 м необходимо их экспериментальные значения умножить на масштаб, т. е. на 500.

**4. Результаты численных расчетов.** Численное исследование проводилось по следующей схеме. Сначала для каждого рассматриваемого режима движения субмарины под пластиной (т. е. для заданных значений  $L, R, d$ ) в соответствии с формулами (1.14) вычислялись значения  $q_0$  и  $2Lq$ , затем с использованием формул (2.2) определялись прогибы пластины  $\zeta(x, y, t)$  при  $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$  и различных значениях параметров пластины. Заметим, что ниже все результаты численных расчетов приведены для размерных величин  $\zeta, x, y, z, t, u, \mu, u_1$ .

На рис. 4 представлены результаты расчета прогиба полимерной пластины с параметрами (3.1) в случае движения почти осесимметричного тонкого тела длиной  $2L = 0,21 \text{ м}$  на глубине  $d = 0,04 \text{ м}$  при  $\mu = 5 \text{ с}^{-1}$ . Видно, что, во-первых, уменьшение параметра  $r$  (при фиксированной длине  $2L$ ) приводит к уменьшению амплитуды прогиба пластины. Во-вторых, значения амплитуды прогиба пластины, полученные при  $r = 1/9$ , лучше согласуются с экспериментальными данными на рис. 3, чем соответствующие значения при  $r = 1/8$ . Данный результат можно объяснить тем, что испытываемая модель имела существенно различающиеся формы носовой и кормовой частей (для носовой части модели  $r = 1/8$ , корма была значительно уже носовой части судна и имела заостренную форму).

Сравнение рис. 3 и 4 показывает, что результаты расчетов прогибов по формулам (1.14), (2.2) качественно хорошо согласуются с результатами модельного эксперимента для упругой неразрушаемой пластины.

В работе [10] показано, что если после начального ускорения источник выходит на режим равномерного движения со скоростью  $u_1 \neq u_{\min}$ , то амплитуда максимального прогиба с течением времени выходит на некоторое постоянное значение ( $u_{\min} = 2(Dg^3/(27\rho_2))^{1/8}$  — минимальная фазовая скорость распространения изгибно-гравитационных волн в глубокой воде [2, 3]). Обозначим через  $M(t)$  максимальную высо-

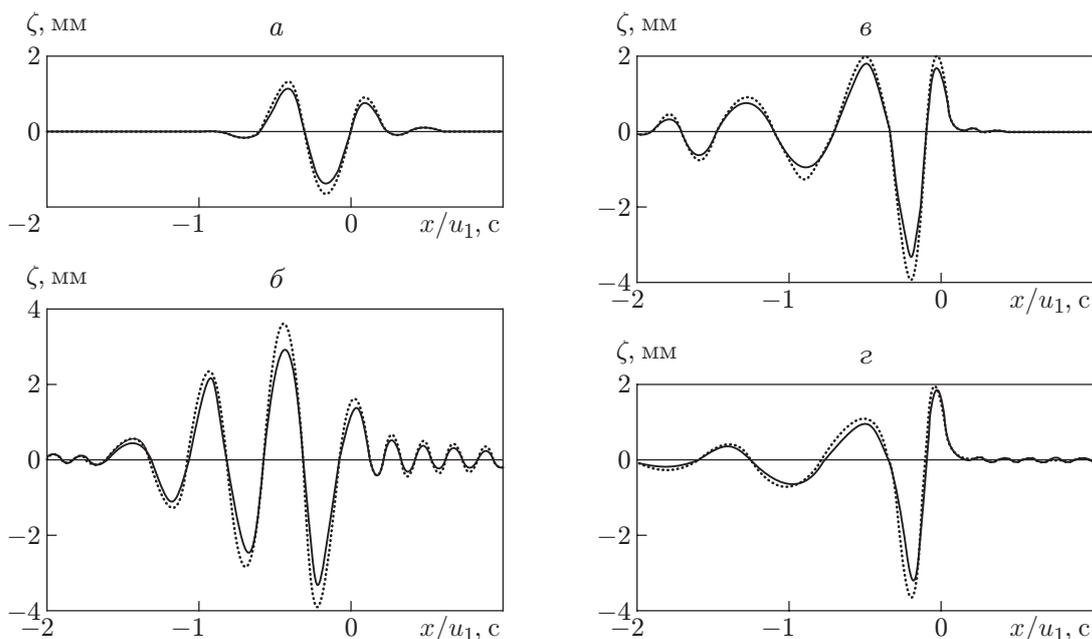


Рис. 4. Теоретические зависимости прогиба пластины от параметра  $x/u_1$ :  
 а —  $u_1 = 0,626 \text{ м/с}$ , б —  $u_1 = 0,805 \text{ м/с}$ , в —  $u_1 = 1,163 \text{ м/с}$ , г —  $u_1 = 1,342 \text{ м/с}$ ;  
 сплошные кривые —  $r = 1/9$ , пунктирные —  $r = 1/8$

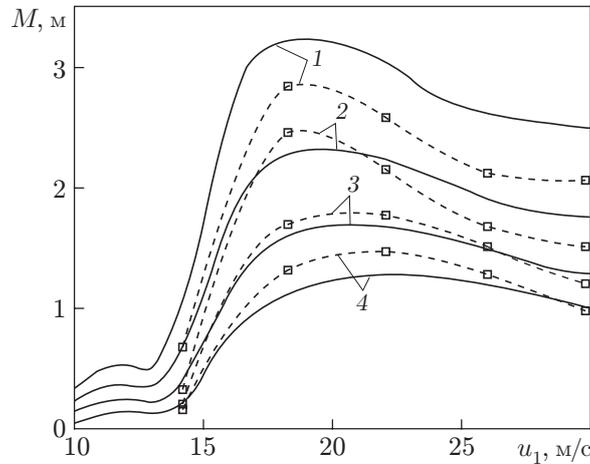


Рис. 5. Максимальная высота изгибно-гравитационной волны  $M$  при равномерном движении тела со скоростью  $u_1$ : сплошные линии — результаты расчета, штриховые — экспериментальные данные; 1 —  $d = 20$  м, 2 —  $d = 30$  м, 3 —  $d = 40$  м, 4 —  $d = 50$  м

ту изгибно-гравитационной волны в режиме равномерного движения тела после ускорения в момент времени  $t$ . На рис. 5 сплошными кривыми показаны результаты расчета величины  $M$  для ледяной пластины толщиной  $h = 1$  м с параметрами

$$E = 5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_1 = 900 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 1/3 \quad (4.1)$$

при равномерном движении тонкого тела ( $2L = 105$  м,  $r = 1/9$ ) со скоростью  $u_1$  в момент времени  $t = 60$  с после ускорения ( $\mu = 5 \text{ с}^{-1}$ ) на разных глубинах погружения. Видно, что увеличение глубины погружения  $d$  приводит к уменьшению амплитуды прогибов пластины  $M$ .

Штриховыми кривыми на рис. 5 показаны результаты модельных экспериментов в бассейне для пластины с параметрами (3.1), пересчитанные в масштабе 1 : 500. На рис. 5 видно, что теоретические результаты согласуются с результатами экспериментов с погрешностью, не превышающей 20 %.

Заметим, что ниже во всех расчетах для параметров ледяной пластины и воды используются значения (4.1).

На рис. 6 показаны изолинии прогибов пластины толщиной  $h = 2$  м при равномерном движении тела после разгона ( $2L = 105$  м,  $r = 1/8$ ,  $t = 60$  с,  $\mu = 5 \text{ с}^{-1}$ ) на глубине  $d = 50$  м. Видно, что для разных скоростей равномерного движения тела характерны различные картины изолиний прогибов пластины.

В работе [12] предложено в качестве безразмерного параметра, характеризующего полное разрушение сплошного ледяного покрова, использовать максимальное значение абсолютной величины тангенса угла наклона касательной к изогнутой поверхности ледяной пластины  $\alpha = \max_{x \in (-\infty; +\infty)} |\partial \zeta / \partial x|$ . Согласно модельным экспериментальным исследованиям

разрушения ледяного покрова при движении подводного судна [12] при  $\alpha > 0,04$  происходит раскрытие магистральных трещин и полное разрушение льда. Результаты измерений коэффициента  $\alpha$  при разрушении ледяного покрова с помощью судов (модельных и натуральных) на воздушной подушке [12] показывают, что во всех рассмотренных случаях разрушения ледяного покрова  $\alpha > 0,04$ .

На рис. 7 представлена зависимость коэффициента  $\alpha$  от скорости равномерного движения  $u_1$  тела ( $2L = 80$  м,  $t = 60$  с,  $\mu = 5 \text{ с}^{-1}$ ) при  $y = 0$ . Введем критическую скорость  $u_*$  —

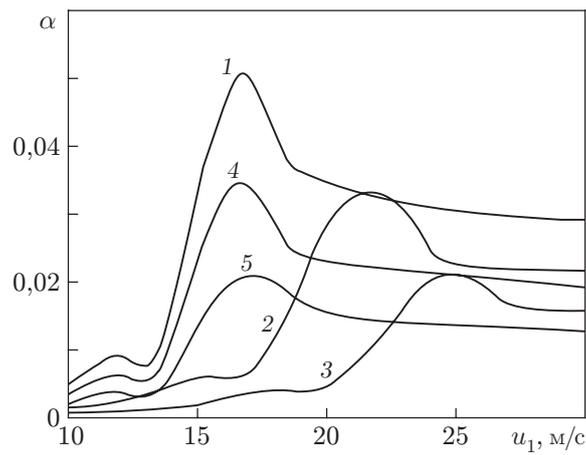
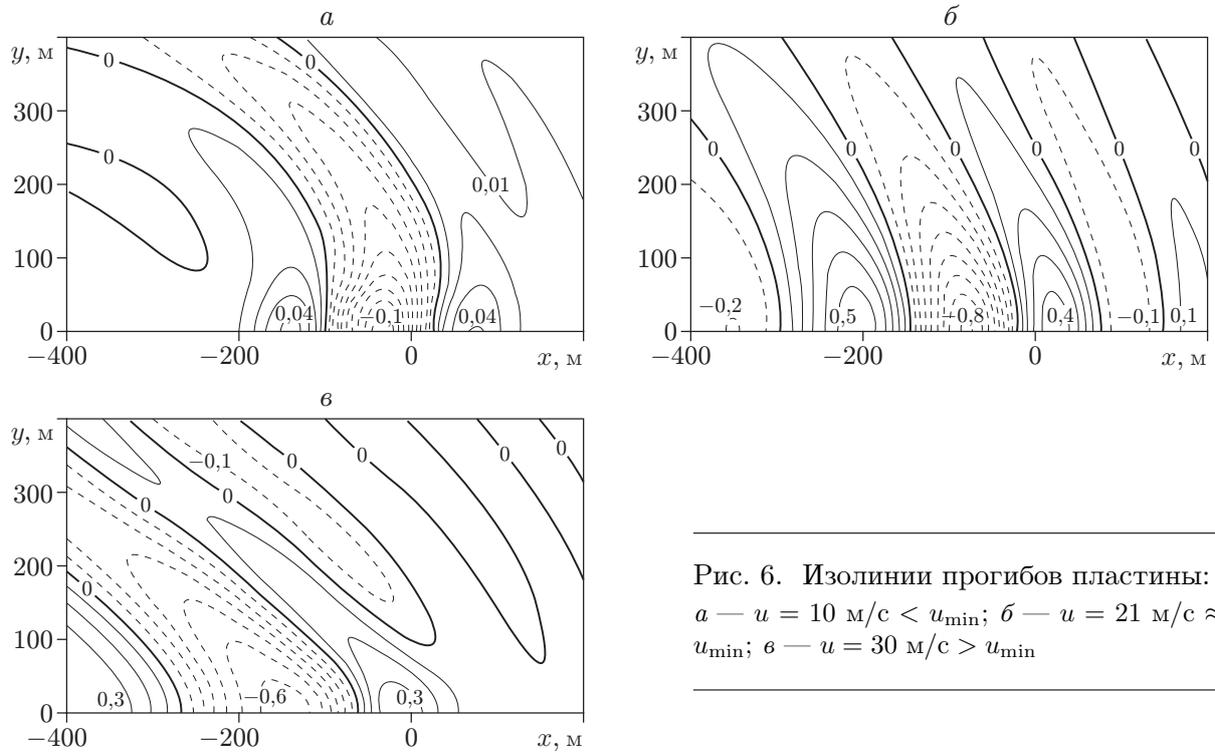


Рис. 7. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от скорости равномерного движения тела при различных значениях глубины погружения тела, диаметра его поперечного сечения и толщины пластины:

1–3 —  $d = 30 \text{ м}$ ,  $2R = 12 \text{ м}$  (1 —  $h = 1 \text{ м}$ , 2 —  $h = 2 \text{ м}$ , 3 —  $h = 3 \text{ м}$ ); 4 —  $d = 30 \text{ м}$ ,  $2R = 10 \text{ м}$ ,  $h = 1 \text{ м}$ ; 5 —  $d = 50 \text{ м}$ ,  $2R = 12 \text{ м}$ ,  $h = 1 \text{ м}$

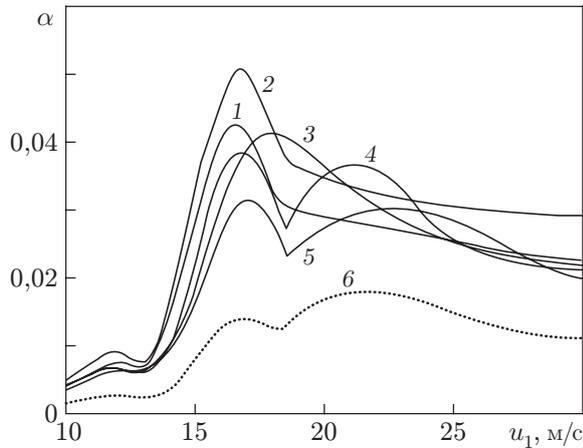


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от скорости равномерного движения тела при различных значениях длины тела:

1–5 —  $d = 30$  м (1 —  $2L = 40$  м, 2 —  $2L = 80$  м, 3 —  $2L = 120$  м, 4 —  $2L = 160$  м, 5 —  $2L = 200$  м); 6 —  $d = 50$  м,  $2L = 160$  м

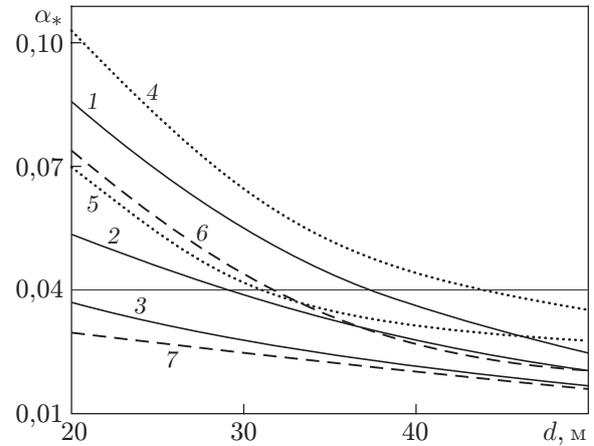


Рис. 9

Рис. 9. Теоретическая зависимость максимального значения коэффициента  $\alpha$  от глубины погружения тела:

1, 4, 6 —  $h = 1$  м, 2 —  $h = 2$  м, 3, 5, 7 —  $h = 3$  м; сплошные линии —  $2L = 105$  м,  $r = 1/8$ , пунктирные —  $2L = 170$  м,  $r = 1/10$ , штриховые —  $2L = 170$  м,  $r = 1/13$ ; тонкая сплошная линия — значение  $\alpha_*$ , полученное в работе [12]

скорость равномерного движения  $u = u_1$ , при которой достигаются максимальные значения коэффициента  $\alpha$ . На рис. 7 видно, что с увеличением толщины льда  $h$  значения  $u_*$  увеличиваются. Так, при  $h = 1, 2, 3$  м  $u_* \approx 17, 22, 25$  м/с соответственно. Таким образом, критические скорости  $u_*$  немного превышают минимальные значения фазовых скоростей распространения изгибно-гравитационных волн в ледяной пластине с параметрами (4.1) для глубокой воды, которые при заданных толщинах льда равны  $u_{\min} = 16,0; 20,7; 24,1$  м/с соответственно. Анализ кривых 1, 4, 5 показывает, что уменьшение площади поперечного сечения (уменьшение величины  $R$ ) и увеличение глубины погружения тела  $d$  почти не оказывают влияния на значение критической скорости, но приводят к уменьшению коэффициента  $\alpha$ . Данный вывод согласуется с результатами работы [13], в которой исследовалось волновое сопротивление сфероида при его движении в жидкости под свободной поверхностью.

На рис. 8 показано влияние длины тела на значение коэффициента  $\alpha$  при  $2R = 12$  м,  $t = 60$  с,  $\mu = 5$  с<sup>-1</sup>,  $h = 1$  м,  $y = 0$ . Видно, что наибольшие значения коэффициента  $\alpha$  достигаются при длине тела  $2L = 80$  м. Следует отметить, что при  $2L = 60, 100$  м (соответствующие кривые не показаны на рис. 8) расхождение кривых зависимости  $\alpha(u_1)$  и кривой 2 не превышает 5 %. Заметим, что на кривых 4–6 имеется два локальных максимума. Появление второго максимума (который на кривой 6 даже выше, чем первый максимум) обусловлено тем, что при большом расстоянии между источником и стоком волновые возмущения от них хорошо согласуются с гравитационными возмущениями, при этом увеличивается гравитационная составляющая изгибно-гравитационной волны. Первый максимум коэффициента  $\alpha$  регистрируется в точке над телом, второй — в точке за телом. Согласно [12] разрушения ледяного покрова можно ожидать в случаях, когда  $\alpha > 0,04$ .

Из рис. 7, 8 следует, что критические скорости достаточно велики. Заметим, что не все современные подводные суда способны развивать такие скорости [7]. Попытки изменения глубины погружения, длины тела и площади его поперечного сечения не приводят к уменьшению значения критической скорости (см. рис. 7, 8). Значение критической скорости  $u_*$  (при движении тела в бесконечно глубокой жидкости) зависит от толщины пластины, при этом всегда выполняется условие  $u_* \geq u_{\min}$ .

На рис. 9 представлены теоретически рассчитанные зависимости максимального значения  $\alpha_*$  от глубины погружения тела  $d$  при его равномерном движении ( $t = 60$  с,  $\mu = 5$  с<sup>-1</sup>) в случае  $y = 0$ . Заметим, что варианты  $2L = 105$  м,  $r = 1/8$  и  $2L = 170$  м,  $r = 1/13$  соответствуют приблизительно одинаковым площадям поперечного сечения тела и разным его длинам. Видно, что увеличение длины тела (при неизменной площади поперечного сечения) не приводит к существенным изменениям величины  $\alpha_*$ , в то время как с увеличением площади поперечного сечения тела (при неизменной длине) коэффициент  $\alpha_*$  увеличивается. Таким образом, из рис. 7–9 следует, что в соответствии с результатами теоретических расчетов при выбранном значении коэффициента  $\alpha$  полное разрушение ледяного покрова возможно в ограниченном диапазоне значений  $h$ ,  $d$ ,  $u$  (малые глубина погружения судна и толщина пластины, большая скорость движения).

**5. Выводы.** Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. При движении тонкого тела в жидкости вблизи плавающей на ее поверхности пластины в системе пластина — жидкость возбуждаются изгибно-гравитационные волны. Уменьшение глубины погружения тела и толщины пластины и увеличение площади поперечного сечения приводят к увеличению амплитуды изгибно-гравитационных волн. Наибольшие прогибы пластины имеют место при движении тела со скоростью  $u \geq u_{\min}$ . Разрушение ледяного покрова при движении под ним в жидкости тонкого тела возможно в ограниченном диапазоне значений толщины ледяного покрова, глубины погружения тела и скорости его движения. Результаты моделирования обтекания тонкого тела системой источник — сток качественно хорошо согласуются с результатами модельного эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Squire V. A.** Synergies between VLFS hydroelasticity and sea ice research // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2008. V. 18, N 4. P. 241–253.
2. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
3. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
4. **Козин В. М., Онищук А. В.** Модельные исследования волнообразования в сплошном ледяном покрове от движения подводного судна // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 78–81.
5. **Букатов А. Е., Жарков В. В.** Влияние плавающей пластины на поверхностные проявления внутренних волн при движении источника в неоднородной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 2. С. 118–125.
6. **Kozin V. M., Pogorelova A. V.** Submarine moving close to the ice-surface conditions // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2008. V. 18, N 4. P. 271–276.
7. **Ильин В. Е.** Подводные лодки России: Иллюстр. справ. / В. Е. Ильин, А. И. Колесников. М.: Астрель: АСТ, 2001.
8. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
9. **Стурова И. В.** Волновые движения, возникающие в стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела // ПМТФ. 1974. № 6. С. 80–91.

10. **Погорелова А. В.** Нестационарное движение источника в жидкости под плавающей пластиной // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 5. С. 49–59.
11. **Козин В. М.** Моделирование изгибно-гравитационных волн в сплошном ледяном покрове // Теория и прочность ледокольного корабля. Горький: Горьк. политехн. ин-т, 1982. Вып. 3. С. 35–38.
12. **Козин В. М.** Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов / В. М. Козин, А. В. Онищук, Б. Н. Марьин и др. Владивосток: Дальнаука, 2005.
13. **Farell С.** On the wave resistance of a submerged spheroid // J. Ship Res. 1973. V. 17, N 1. P. 1–11.

*Поступила в редакцию 8/VI 2011 г.*

---