

УДК 539.375

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ О КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЕ В ПЛАСТИНЕ С ВОЗМОЖНЫМ КОНТАКТОМ БЕРЕГОВ

Е. М. Рудой

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск  
E-mail: rem@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о равновесии пластины с трещиной в рамках модели Кирхгофа — Лява. На берегах трещины заданы условия непроникания, которые имеют вид неравенств (типа условий Синьорини). Для случая достаточно гладкого возмущения области общего вида исследуется поведение функционала энергии. Выведены достаточные условия существования производной функционала энергии по параметру возмущения области.

**Ключевые слова:** упругость, трещина, критерий Гриффитса, вариационное неравенство, производная функционала энергии, негладкая область.

**Введение.** Рассматривается модель Кирхгофа — Лява для пластины, закрепленной по краям и находящейся в равновесии под действием внешней силы. В пластине имеется вертикальная криволинейная трещина.

В данной работе исследуются математические вопросы теории трещин, в которой используется критерий разрушения Гриффитса. В соответствии с этим критерием развитие трещины начинается в тот момент, когда производная функционала энергии по параметру возмущения области достигает некоторой критической величины, зависящей только от свойств материала, из которого изготовлено тело [1, 2].

Различные модели, описывающие нелинейные трещины с односторонними ограничениями, рассматривались в [3–5].

Возможность дифференцирования функционалов энергии по параметру возмущения области исследовалась в различных работах. Примеры линейных краевых задач в негладких областях приведены в [6–8]. В работах [9–17] изучены вариации решений, коэффициентов интенсивности напряжений и других функций геометрических и механических параметров при изменении формы или росте трещины, в том числе криволинейной.

Работы [18–28] посвящены исследованию дифференцируемости функционалов энергии для краевых задач с односторонними ограничениями на границе. Для таких задач с помощью формулы для производной получены инвариантные интегралы для различных возмущений области [19, 20, 25]. В работах [18–25] предполагалось, что трещины являются прямолинейными или плоскими, либо накладывались дополнительные условия на возмущение области. В [26–28] выведена асимптотика функционала энергии для криволинейных (поверхностных) трещин.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00209) и в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук и их руководителей (№ МК-4338.2008.1).

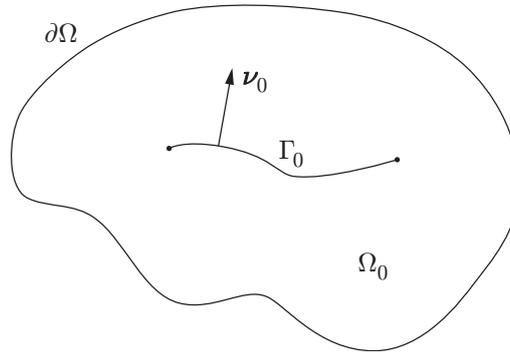


Рис. 1. Срединная поверхность пластины с трещиной

В настоящей работе рассматривается общее возмущение области с разрезом, зависящее от малого параметра  $\varepsilon$ . В возмущенной области определяется функционал энергии. С использованием метода, предложенного в [26, 28], исследуется поведение функционала энергии при возмущении области. При этом в отличие от работ [19, 20, 22–24] не требуется взаимно однозначного соответствия между множествами допустимых смещений возмущенной и невозмущенной задач. Найдены достаточные условия существования производной функционала энергии.

**1. Постановка задачи и формулировка основного результата.** Рассмотрим ограниченную в пространстве  $\mathbb{R}^2$  область  $\Omega$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ . Пусть строго внутри области расположена кривая  $\Gamma_0$ . Сделаем ряд предположений относительно  $\Omega$  и  $\Gamma_0$ .

**ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.** Пусть набор  $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$  удовлетворяет следующим условиям: 1) область  $\Omega$  может быть разбита на две подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с общей границей  $\Gamma$ ; 2) границы областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  липшицевы; 3)  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \bar{\Gamma}$ ; 4)  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ; 5)  $\Gamma_0$  принадлежит классу  $C^{1,1}$  и является регулярной кривой; 6)  $\Gamma_0$  может быть продолжена до гладкой замкнутой кривой  $\Sigma \subset \Omega$ . Заметим, что согласно условию 5  $\Gamma_0$  является кривой без самопересечений, в каждой точке которой существует вектор нормали (рис. 1).

Будем считать, что разрез  $\Gamma_0$  в пространстве  $\mathbb{R}^2$  задается в виде

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma_0, \quad (1)$$

где  $\Upsilon \in C_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ .

Определим единичный вектор нормали  $\boldsymbol{\nu}_0 = (\nu_{01}, \nu_{02})$  к  $\Gamma_0$ . В силу (1) и гладкости  $\Upsilon$  компоненты вектора  $\boldsymbol{\nu}_0$  имеют вид

$$\nu_{0i} = \frac{1}{|\nabla\Upsilon|} \frac{\partial\Upsilon}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что  $\nabla\Upsilon \neq 0$  для всех  $x \in \Gamma_0$ , так как  $\Gamma_0$  — регулярная поверхность. Считаем, что выбранное направление нормали  $\boldsymbol{\nu}_0$  определяет положительный берег  $\Gamma_0^+$ , а направление  $-\boldsymbol{\nu}_0$  — отрицательный берег  $\Gamma_0^-$  разреза  $\Gamma_0$ .

Определим область  $\Omega_0 = \Omega \setminus \Gamma_0$ , соответствующую срединной поверхности пластины, которая принадлежит плоскости  $Ox_1x_2$  ( $\Gamma_0$  — след трещины на  $Ox_1x_2$ ).

Всюду далее, за исключением случаев, оговоренных особо, индексы  $i, j, k, l$  принимают значения от 1 до 2. По повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Определим функциональные пространства

$$H^{1,0}(\Omega_0) = \{u \in H^1(\Omega_0): u = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega\},$$

$$H^{2,0}(\Omega_0) = \left\{ w \in H^2(\Omega_0): w = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega \right\},$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль к  $\partial\Omega$ , и введем обозначение  $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{2,0}(\Omega_0)$ . Следует отметить, что на берегах разреза  $\Gamma_0^+$  и  $\Gamma_0^-$  вектор-функции из пространства  $H(\Omega_0)$  могут принимать различные значения.

Пусть  $\boldsymbol{\chi} = (\mathbf{W}, w)$  — трехкомпонентный вектор-столбец смещений точек срединной поверхности пластины, где  $\mathbf{W} = (w_1, w_2)$  — горизонтальные смещения;  $w$  — вертикальные прогибы. Формулы для компонент тензоров деформаций  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{W})$  и усилий  $\sigma_{ij}(\mathbf{W})$  запишем в безразмерном виде [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{W}) &= (1/2)(w_{i,j} + w_{j,i}), \\ \sigma_{11}(\mathbf{W}) &= \varepsilon_{11}(\mathbf{W}) + k\varepsilon_{22}(\mathbf{W}), & \sigma_{22}(\mathbf{W}) &= \varepsilon_{22}(\mathbf{W}) + k\varepsilon_{11}(\mathbf{W}), \\ \sigma_{12}(\mathbf{W}) &= (1 - k)\varepsilon_{12}(\mathbf{W}), & k &= \text{const}, & 0 < k < 1/2, \end{aligned}$$

где  $k$  — коэффициент Пуассона; нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате.

Будем считать, что на разрезе выполнено условие непроникания [3]

$$[\mathbf{W}^T]\nu_0 \geq |[(\nabla w)^T \nu_0]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0,$$

где  $[u] = u|_{\Gamma_0^+} - u|_{\Gamma_0^-}$  — скачок функции на разрезе  $\Gamma_0$ .

Пусть  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  — заданный вектор внешней нагрузки,  $f_i \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Рассмотрим функционал энергии пластины

$$\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{W}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W}) d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} b(w, w) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\chi} d\Omega_0,$$

где билинейная форма  $b(\cdot, \cdot)$  определяется следующим образом:  $b(\varphi, \psi) = \varphi_{,11}\psi_{,11} + \varphi_{,22}\psi_{,22} + k\varphi_{,11}\psi_{,22} + k\varphi_{,22}\psi_{,11} + 2(1 - k)\varphi_{,12}\psi_{,12}$ .

Далее определим множество допустимых смещений точек срединной поверхности пластины

$$K_0(\Omega_0) = \{\boldsymbol{\chi} \in H(\Omega_0): [\mathbf{W}^T]\nu_0 \geq |[(\nabla w)^T \nu_0]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Задача о равновесии пластины может быть сформулирована как задача минимизации функционала энергии на множестве допустимых смещений: найти функцию  $\boldsymbol{\chi}_0 \in K_0(\Omega_0)$ , такую что

$$\Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0) = \inf_{\boldsymbol{\chi} \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}). \quad (2)$$

Как известно, задача (2) имеет единственное решение [3], которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{W}_0) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W} - \mathbf{W}_0) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} b(w_0, w - w_0) d\Omega_0 &\geq \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^T (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_0) d\Omega_0 \\ \forall \boldsymbol{\chi} \in K_0(\Omega_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Решение  $\boldsymbol{\chi}_0$  задачи (2) определяет горизонтальные смещения и вертикальные прогибы срединной поверхности пластины. В модели Кирхгофа — Лява горизонтальные смещения  $\mathbf{W}(z)$  произвольной точки  $(x_1, x_2, z)$  пластины линейно зависят от расстояния до срединной поверхности, а вертикальные смещения  $w(z)$  этой точки совпадают с вертикальными прогибами срединной поверхности [29]:

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}_0 - z\nabla w_0, \quad w(z) = w_0, \quad |z| \leq h,$$

где  $2h$  — толщина пластины (рис. 2). В настоящей работе будем считать, что  $h = 1$ .

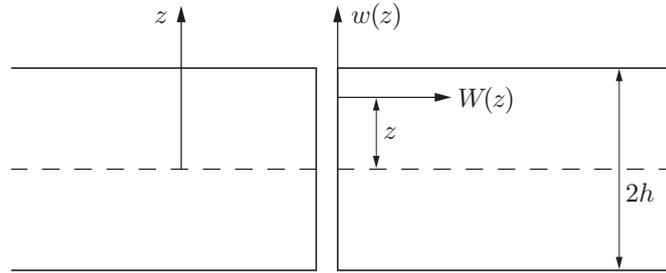


Рис. 2. Смещения точек пластины на трещине

Для малого параметра  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  рассмотрим возмущение  $\Phi_\varepsilon = (\Phi_\varepsilon^1(\mathbf{x}), \Phi_\varepsilon^2(\mathbf{x}))$ , которое задается гладкими функциями  $\Phi^i \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2))$  и  $\Phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Зафиксируем  $\varepsilon$  и применим координатное преобразование

$$\mathbf{y} = \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad (4)$$

для  $\mathbf{x} \in \Omega_0$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  и  $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ . В результате получим возмущенную область  $\Phi_\varepsilon(\Omega)$  и возмущенный разрез  $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$ . Будем считать, что внешняя граница области остается неизменной, т. е.  $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega) = \partial\Omega$ , кроме того, для всех допустимых  $\varepsilon$  выполнено условие  $\mathbf{n}(x) = \mathbf{n}^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}))$  п. в. на  $\partial\Omega$ , где  $\mathbf{n}^\varepsilon$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  в новых координатах. Это означает, что внешняя единичная нормаль  $\mathbf{n}$  области  $\Omega$  переходит во внешнюю единичную нормаль  $\mathbf{n}^\varepsilon$  области  $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ . Определим возмущенную область с разрезом как  $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega) \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon$ .

Будем считать, что для обратного преобразования  $\mathbf{x} = \Phi_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y})$ , где  $\Phi_\varepsilon^{-1} = (\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}, \Phi_{\varepsilon 2}^{-1})$ , имеют место включения  $\Phi_i^{-1} \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2))$ .

**ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.** Считаем, что для каждого  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  набор  $\{\Phi_\varepsilon(\Omega), \Phi_\varepsilon(\partial\Omega), \Gamma_\varepsilon\}$  удовлетворяет условиям предположения 1.

Аналогично пространству  $H(\Omega_0)$  определим пространство  $H(\Omega_\varepsilon)$ . Отображение (4), вследствие его взаимной однозначности и предполагаемой гладкости  $\Phi_\varepsilon$ , задает также взаимно однозначное соответствие между пространствами  $H(\Omega_0)$  и  $H(\Omega_\varepsilon)$ , т. е., если функция  $\chi(\mathbf{x}) \in H(\Omega_0)$ , то  $\chi(\Phi_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y})) \in H(\Omega_\varepsilon)$ , и наоборот, если  $\chi(\mathbf{y}) \in H(\Omega_\varepsilon)$ , то  $\chi(\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})) \in H(\Omega_0)$ .

Пусть  $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$  — единичный вектор нормали к возмущенному разрезу  $\Gamma_\varepsilon$ . Определим множество допустимых смещений точек тела для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{\chi \in H(\Omega_\varepsilon): [\mathbf{W}^\top] \boldsymbol{\nu}^\varepsilon \geq |[(\nabla w)^\top] \boldsymbol{\nu}^\varepsilon| \text{ п. в. на } \Gamma_\varepsilon\}.$$

Следует отметить, что хотя между пространствами  $H(\Omega_0)$  и  $H(\Omega_\varepsilon)$  имеется взаимно однозначное соответствие при действии отображения (4), множество допустимых смещений  $K_0(\Omega_0)$  в общем случае не переходит во множество допустимых смещений  $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ . Даже для прямолинейной трещины такое соответствие отсутствует [21]. Это обусловлено тем, что, во-первых, единичная нормаль  $\boldsymbol{\nu}_0$  к  $\Gamma_0$  не переходит в единичную нормаль  $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$  к  $\Gamma_\varepsilon$ , во-вторых, условие непроникания содержит оператор градиента, который меняет вид при действии преобразования координат (4).

Сформулируем возмущенную задачу равновесия пластины, занимающую возмущенную область  $\Omega_\varepsilon$ , в виде задачи минимизации функционала энергии  $\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi)$  на множестве допустимых смещений  $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ : найти функцию  $\chi^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ , такую что

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi^\varepsilon) = \inf_{\chi \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \chi), \quad (5)$$

где

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(\mathbf{W}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W}) d\Omega_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} b(w, w) \Omega_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\chi} d\Omega_\varepsilon.$$

Задача (5) имеет единственное решение, для которого справедливо вариационное неравенство [3]

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(\mathbf{W}^\varepsilon) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W} - \mathbf{W}^\varepsilon) d\Omega_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} b(w^\varepsilon, w - w^\varepsilon) d\Omega_\varepsilon \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f}^T (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}^\varepsilon) d\Omega \quad (6)$$

$$\forall \boldsymbol{\chi} \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon).$$

Цель настоящей работы — вычислить предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon},$$

где  $\boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{\chi}^\varepsilon$  — решения задач (3) и (5) соответственно. Если этот предел существует, то он определяет производную функционала энергии пластины по параметру возмущения  $\varepsilon$  области  $\Omega_0$ . В общем случае не удастся доказать его существование, тем не менее при некоторых дополнительных ограничениях на решение  $\boldsymbol{\chi}_0$  невозмущенной задачи равновесия или на поле скоростей возмущения (4) удастся доказать существование производной функционала энергии.

Основным результатом данной работы является следующая теорема (доказательство приведено в п. 3).

**Теорема 1.** *Если*

$$\left\langle \sigma_\nu(\mathbf{W}_0), \left[ (\nabla w_0)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \nu_0 \right] \right\rangle_{\Gamma_0} = 0, \quad (7)$$

то для каждого возмущения  $\Phi \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N))$  существует первая производная функционала энергии  $\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon)$  по параметру возмущения  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ , которая задается формулой

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0) \varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}_0) - \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{Q}_0) d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_1(\mathbf{V}; \mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) d\Omega_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_2(\mathbf{V}; w_0, w_0) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\operatorname{div}(\mathbf{V} f_i) w_{0i} + \operatorname{div}(\mathbf{V} f_3) w_0) d\Omega_0, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\chi}_0$  — решение невозмущенной задачи (2);  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{W}_0^T \partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{x}$ ;  $A_1(\mathbf{V}, \mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0)$ ,  $A_2(\mathbf{V}, w_0, w_0)$  определены ниже;  $\mathbf{V} = (V_1, V_2) = (\partial \Phi_\varepsilon / \partial \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ ;  $\sigma_\nu(\mathbf{W}_0)$  — нормальное напряжение.

Запись  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_0}$  обозначает двойственность пространств  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$  и  $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_0))^*$ . Заметим, что если решение достаточно гладкое, то данная запись обозначает интегрирование по кривой  $\Gamma_0$ .

Из условия (7) следует, что если берега трещины свободны от напряжений (в этом случае  $\sigma_\nu(\mathbf{W}_0) = 0$ ), то производная функционала энергии существует.

Кроме того, (7) имеет место и при

$$\left[ (\nabla w_0)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \nu_0 \right] = 0.$$

Например, в работе [21] выведена формула Гриффитса для пластины с прямолинейной трещиной:  $\Gamma_0 = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < l, x_2 = 0\}$ , где  $l = \text{const}$ . Единичная нормаль к такой трещине  $\nu_0 = (0, 1)$ . Рассмотрим возмущение области

$$y_1 = x_1 - \varepsilon\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2, \quad (9)$$

где функция  $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$  такая, что  $\theta = 1$  в окрестности точки  $(l, 0)$ ,  $\theta = 0$  в окрестности точки  $(0, 0)$ . Возмущение (9) соответствует квазистатическому росту прямолинейной трещины вдоль оси  $Ox_1$ . Легко заметить, что  $\mathbf{V} = (-\theta, 0)$ , поэтому  $(\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x} + (\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x})^T)\nu_0 = (-\theta_{,2}, 0)^T$ . Если наложить дополнительное условие на  $\theta$ , такое что  $\theta_{,2} = 0$  на  $\Gamma_0$  (так же, как в [21]), то получим формулу Гриффитса для пластины с прямолинейной трещиной, поскольку в этом случае равенство (7) выполняется.

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных формул и утверждений, которые потребуются для вывода формулы (8).

**2. Вспомогательные утверждения и формулы.** Для функциональной матрицы преобразования (4) введем обозначение

$$\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \Phi_{\varepsilon,1}^1 & \Phi_{\varepsilon,1}^2 \\ \Phi_{\varepsilon,2}^1 & \Phi_{\varepsilon,2}^2 \end{pmatrix}.$$

Определим векторы, соответствующие частным производным первого и второго порядков:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^T, \quad \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^T.$$

Аналогично задаются векторы  $\partial/\partial\mathbf{y}$  и  $\partial^2/\partial\mathbf{y}^2$ . Определим функциональные матрицы  $A$  и  $\partial^2\Phi_\varepsilon/\partial x^2$ :

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_{\varepsilon,11}^1 & \Phi_{\varepsilon,11}^2 \\ \Phi_{\varepsilon,12}^1 & \Phi_{\varepsilon,12}^2 \\ \Phi_{\varepsilon,22}^1 & \Phi_{\varepsilon,22}^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\Phi_\varepsilon}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} (\Phi_{\varepsilon,1}^1)^2 & 2\Phi_{\varepsilon,1}^1\Phi_{\varepsilon,1}^2 & (\Phi_{\varepsilon,1}^2)^2 \\ \Phi_{\varepsilon,1}^1\Phi_{\varepsilon,2}^1 & \Phi_{\varepsilon,1}^1\Phi_{\varepsilon,2}^2 + \Phi_{\varepsilon,2}^1\Phi_{\varepsilon,1}^2 & \Phi_{\varepsilon,1}^2\Phi_{\varepsilon,2}^2 \\ (\Phi_{\varepsilon,2}^1)^2 & 2\Phi_{\varepsilon,2}^1\Phi_{\varepsilon,2}^2 & (\Phi_{\varepsilon,2}^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Используя введенные выше обозначения, преобразование производных можно записать в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2\Phi_\varepsilon}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{y}^2} + A \frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}. \quad (10)$$

В силу гладкости  $\Phi_\varepsilon$  имеет место разложение по  $\varepsilon$

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{V}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_1(\varepsilon, \mathbf{x}) \quad \text{в } \mathbb{R}^2, \quad (11)$$

где функция  $\mathbf{r}_1(\varepsilon, \mathbf{x}) \in C(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; [W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)]^2)$  и  $\mathbf{r}_1(\varepsilon, \mathbf{x})/\varepsilon \rightarrow 0$  сильно в  $[W_{loc}^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)]^2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Из (11) следует, что якобиан  $J_\varepsilon(\mathbf{x})$  преобразования (4) допускает представление

$$J_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \left| \frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial\mathbf{x}} \right| = 1 + \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{V} + r_2(\varepsilon, \mathbf{x}) \quad \text{в } \mathbb{R}^2,$$

где  $r_2 \in C(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))$  и  $r_2(\varepsilon, \mathbf{x})/\varepsilon \rightarrow 0$  сильно в  $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следует отметить, что для малых  $\varepsilon$  якобиан  $J_\varepsilon(\mathbf{x})$  строго положителен.

В свою очередь, функциональные матрицы  $\partial\Phi_\varepsilon/\partial\mathbf{x}$ ,  $A$  и  $\partial^2\Phi_\varepsilon/\partial x^2$  допускают представление

$$\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial\mathbf{x}} = I + \varepsilon \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} + r_3(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \|r_3(\varepsilon, \mathbf{x})\|_{[W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon),$$

$$A = \varepsilon \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix} + r_4(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \|r_4(\varepsilon, \mathbf{x})\|_{[L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)]^6} = o(\varepsilon), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} = I + \varepsilon \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix} + r_5(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \|r_5(\varepsilon, \mathbf{x})\|_{[W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^9} = o(\varepsilon)$$

почти всюду в  $\Omega_0$  ( $I$  — единичная матрица). Определитель матрицы  $\partial^2 \Phi_\varepsilon / \partial x^2$  может быть разложен по  $\varepsilon$ :

$$j_\varepsilon(\mathbf{x}) = \left| \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} \right| = 1 + 3\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) + r_6(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \|r_6(\varepsilon, \mathbf{x})\|_{L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)} = o(\varepsilon) \quad \text{п. в. в } \Omega_0.$$

Для достаточно малых  $\varepsilon$  определитель  $j_\varepsilon(\mathbf{x})$  строго положителен, следовательно, существует обратная функциональная матрица  $\psi = (\partial^2 \Phi_\varepsilon / \partial x^2)^{-1}$ . В силу (10) и того, что  $J_\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$ ,  $j_\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$ , обратное преобразование производных можно записать в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} = \Psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^2} = \psi \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} + a \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad (13)$$

где  $\Psi = (\partial \Phi_\varepsilon / \partial \mathbf{x})^{-1}$ ;  $a = -(\partial^2 \Phi_\varepsilon / \partial x^2)^{-1} A (\partial \Phi_\varepsilon / \partial \mathbf{x})^{-1}$ . В силу формул (12) справедливо разложение по  $\varepsilon$  матриц  $\Psi$ ,  $a$ ,  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \Psi &= I - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + r_7(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \|r_7(\varepsilon, \mathbf{x})\|_{[W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]} = o(\varepsilon), \\ a &= -\varepsilon \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix} + r_8(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \|r_8(\varepsilon, \mathbf{x})\|_{[L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)]^6} = o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\psi = I - \varepsilon \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix} + r_9(\varepsilon, \mathbf{x}), \quad \|r_9(\varepsilon, \mathbf{x})\|_{[W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^9} = o(\varepsilon)$$

почти всюду в  $\Omega_0$ .

В формулах (14) матрицы при  $-\varepsilon$  обозначим через  $\bar{a}(\mathbf{V})$  и  $\bar{\psi}(\mathbf{V})$  соответственно. Определим невырожденную постоянную матрицу  $K$ :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2(1-k) & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда билинейную форму  $b(u, v)$  можно записать в матричном виде

$$b(u, v) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2} \right)^\top K \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Применяя обратное преобразование к области  $\Omega_\varepsilon$ , можно показать, что разрез  $\Gamma_\varepsilon$  переходит в разрез  $\Gamma_0$ . При этом вектор нормали  $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$  переходит в новый вектор  $\boldsymbol{\nu}_\varepsilon$ , определенный на  $\Gamma_0$ , который в общем случае не совпадает с вектором нормали  $\boldsymbol{\nu}_0$  к  $\Gamma_0$ . При этом множество  $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$  взаимно однозначно переходит в новое множество

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{ \boldsymbol{\chi} \in H(\Omega_0): [\mathbf{W}^\top] \boldsymbol{\nu}_\varepsilon \geq [(\nabla w)^\top \Psi^\top \boldsymbol{\nu}_\varepsilon] \quad \text{п. в. на } \Gamma_0 \}.$$

Далее, применив координатное преобразование (4) к функциям и интегралам, входящим в вариационное неравенство (6), получим вариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} J_\varepsilon c_{ijkl} E_{kl}(\Psi; \mathbf{W}_\varepsilon) E_{ij}(\Psi; \mathbf{W} - \mathbf{W}_\varepsilon) d\Omega_0 + \\ & + \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \left( \psi \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \mathbf{x}^2} + a \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top K \left( \psi \frac{\partial^2 (w - w_\varepsilon)}{\partial \mathbf{x}^2} + a \frac{\partial (w - w_\varepsilon)}{\partial \mathbf{x}} \right) d\Omega_0 \geq \\ & \geq \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \mathbf{f}^{\varepsilon \top} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) d\Omega_0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad (15) \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}))$ , т. е. функция  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon(\mathbf{x})$ , принадлежащая  $K_\varepsilon(\Omega_0)$ , является решением  $\boldsymbol{\chi}^\varepsilon(\mathbf{y}) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$  возмущенной задачи (5), записанной в невозмущенных координатах. Аналогично для  $\mathbf{f}$  имеем  $\mathbf{f}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_0$ . В (15)  $E_{ij}(\Psi; \mathbf{W})$  — трансформированный тензор деформаций:

$$E_{ij}(\Psi; \mathbf{W}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Psi_{kj} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \Psi_{ki} \right),$$

$\{c_{ijkl}\}$  — тензор коэффициентов упругости, такой что  $c_{1111} = c_{2222} = 1$ ,  $c_{1122} = c_{2211} = k$ ,  $c_{1212} = c_{1221} = c_{2112} = c_{2121} = (1 - k)/2$ , а остальные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** При достаточно малых  $\varepsilon$  решение  $\boldsymbol{\chi}^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$  возмущенной задачи (6), отображенное на исходную область  $\Omega_0$  с помощью обратного преобразования  $\kappa$  (4), является единственным решением  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$  вариационного неравенства (15).

Разложение (14) подставим в (15). В результате имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} J_\varepsilon c_{ijkl} E_{kl}(\Psi; \mathbf{U}) E_{ij}(\Psi; \mathbf{W}) d\Omega_0 = \\ & = \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W}) + \varepsilon A_1(\mathbf{V}; \mathbf{U}, \mathbf{W})) d\Omega_0 + o(\varepsilon) R_1(\mathbf{U}, \mathbf{W}); \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \left( \psi \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2} + a \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top K \left( \psi \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x}^2} + a \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \right) d\Omega_0 = \\ & = \int_{\Omega_0} (b(u, v) + \varepsilon A_2(\mathbf{V}; u, v)) d\Omega_0 + o(\varepsilon) R_2(u, v); \quad (17) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_0} J_\varepsilon (\mathbf{f}^\varepsilon)^\top \boldsymbol{\chi} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} (\mathbf{f}^\top \boldsymbol{\chi} + \varepsilon \operatorname{div}(\mathbf{V} f_i) w_i + \varepsilon \operatorname{div}(\mathbf{V} f_3) w) d\Omega_0 + o(\varepsilon) R_3(\boldsymbol{\chi}), \quad (18)$$

где

$$A_1(\mathbf{V}; \mathbf{U}, \mathbf{W}) = \operatorname{div} \mathbf{V} \sigma_{ij}(\mathbf{U}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W}) - \sigma_{ij}(\mathbf{U}) E_{ij} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}; \mathbf{W} \right) - \sigma_{ij}(\mathbf{W}) E_{ij} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}; \mathbf{U} \right),$$

$$A_2(\mathbf{V}; u, v) = b(u, v) \operatorname{div} \mathbf{V} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2} \right)^T (K \bar{\psi}(\mathbf{V}) + \bar{\psi}^T(\mathbf{V}) K) \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x}^2} - \quad (19)$$

$$- \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2} \right)^T K \bar{a}(\mathbf{V}) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} - \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \bar{a}^T(\mathbf{V}) K \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x}^2},$$

$R_1, R_2, R_3$  — некоторые ограниченные полилинейные формы.

Подставим в неравенство (15) тестовые функции  $\chi = 0$  и  $\chi = 2\chi_\varepsilon$ . Тогда, используя формулы (16)–(19), получим равномерную по  $\varepsilon$  оценку

$$\|\chi_\varepsilon\|_{H(\Omega_0)} \leq c.$$

Рассмотрим трещину  $\Gamma_0$ . При преобразовании (4) кривая  $\Gamma_0$  переходит в кривую  $\Gamma_\varepsilon$ , задаваемую уравнением

$$\bar{\Upsilon}(\mathbf{y}) = \Upsilon(\Phi_\varepsilon^{-1}(\mathbf{y})) = 0, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_\varepsilon.$$

При этом единичную нормаль  $\nu^\varepsilon$  к  $\Gamma_\varepsilon$  можно определить по формуле

$$\nu^\varepsilon = \nabla_y \bar{\Upsilon} / |\nabla_y \bar{\Upsilon}|.$$

С использованием формулы (13) преобразованный вектор единичной нормали  $\nu_\varepsilon$ , определенный на  $\Gamma_0$ , принимает следующий вид:

$$\nu_\varepsilon = \Psi \nabla_x \Upsilon / |\Psi \nabla_x \Upsilon|.$$

Так как отображение (4) невырожденное, кривая  $\Gamma_0$  регулярная, то  $|\nabla_x \Upsilon| \neq 0$ ,  $|\Psi \nabla_x \Upsilon| \neq 0$ . Кроме того,  $\nabla_x \Upsilon = \nu_0 |\nabla_x \Upsilon|$ , поэтому множество  $K_\varepsilon(\Omega_0)$  можно определить в эквивалентном виде

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\chi \in H(\Omega_0): [\mathbf{W}^T] \Psi \nu_0 \geq |[(\nabla w)^T \Psi^T \Psi \nu_0]| \text{ п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Рассмотрим произвольную функцию  $\chi = (\mathbf{W}, w)$ , принадлежащую множеству  $K_\varepsilon(\Omega_0)$ . Эта функция удовлетворяет условию

$$[\mathbf{W}^T] \Psi \nu_0 \geq |[(\nabla w)^T \Psi^T \Psi \nu_0]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0. \quad (20)$$

Подставив разложение (14) матрицы  $\Psi$  в (20), получим

$$[\mathbf{W}^T] \nu_0 - \varepsilon [\mathbf{W}^T] \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \nu_0 \geq$$

$$\geq \left| \left[ (\nabla w)^T \nu_0 - \varepsilon (\nabla w)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \nu_0 \right] \right| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0, \quad (21)$$

где

$$r_{10}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \varepsilon (r_7(\varepsilon))^T \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T r_7(\varepsilon) + r_7(\varepsilon) + (r_7(\varepsilon))^T + (r_7(\varepsilon))^T r_7(\varepsilon).$$

При этом  $\|r_{10}(\varepsilon)\|_{[W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon)$ .

Докажем ряд вспомогательных лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $\chi_0 \in K_0(\Omega_0)$  — решение невозмущенной задачи (3),  $\chi_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$  — решение задачи (15). Тогда существуют функции  $\lambda_\varepsilon^1$  и  $\lambda_\varepsilon^2$ , такие что

$$\|\lambda_\varepsilon^i\|_{H(\Omega_0)} \leq c \quad (i = 1, 2)$$

равномерно по  $\varepsilon$ , и справедливы следующие включения:

$$\chi_\varepsilon^1 = \chi_0 + \varepsilon \lambda_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad \chi_\varepsilon^2 = \chi_\varepsilon + \varepsilon \lambda_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим односвязную область  $O$  с гладкой границей  $\gamma$ , такую что  $\bar{O} \subset \Omega$ ,  $\Gamma_0$  является частью  $\gamma$ , а внешняя нормаль к  $\gamma$  совпадает с  $\boldsymbol{\nu}_0$  на  $\Gamma_0$ . Введем следующее обозначение:

$$g = - \left| \left[ (\nabla w_0)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \mathbf{n} \right] \right|.$$

Функция  $w_0 \in H^{2,0}(\Omega_0)$ , поэтому  $[\nabla w_0] \in H^{1/2}(\gamma)$ . Кроме того,  $\partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{x}$  и  $r_{10}(\varepsilon)$  принадлежат  $[W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)]^4 \subset [C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^2)]^4$  [30],  $\mathbf{n} \in C^{0,1}(\gamma)$ . Тогда  $g \in H^{1/2}(\gamma)$ , причем  $g \equiv 0$  вне  $\Gamma_0$  [3]. Так как компоненты нормали  $\mathbf{n}$  принадлежат  $C^{0,1}(\gamma)$ , то  $g\mathbf{n} \in [H^{1/2}(\gamma)]^2$ . Следовательно, существует функция  $\mathbf{W}_\varepsilon^1 \in [H^1(O)]^2$ , такая что ее след на  $\gamma$  равен  $g\mathbf{n}$ . Положим  $\mathbf{W}_\varepsilon^1 \equiv 0$  вне  $O$ . Пусть  $\theta$  — бесконечно дифференцируемая финитная функция в  $\Omega$ , такая что  $\theta = 1$  на  $\Gamma_0$ .

Рассмотрим функцию  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1 = \theta \mathbf{W}_\varepsilon^1$ . По построению  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1 \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$  и

$$[(\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1)^T] \boldsymbol{\nu}_0 = \left| \left[ (\nabla w_0)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0.$$

Далее рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{U}^T A = \mathbf{b}^T, \quad (22)$$

где

$$A = I - \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right), \quad \mathbf{b}^T = \mathbf{W}_0^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + (\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1)^T, \quad (23)$$

$\boldsymbol{\chi}_0 = (\mathbf{W}_0, w_0)$  — решение невозмущенной задачи. Элементы матрицы  $A$  принадлежат пространству  $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ , вектор  $\mathbf{b} \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$ . Кроме того, для всех достаточно малых  $\varepsilon$  определитель  $|A|$  матрицы  $A$  в  $\Omega_0$  отличен от нуля. Следовательно, уравнение (22) почти для всех  $x \in \Omega_0$  имеет единственное решение.

Пусть  $\mathbf{U}_\varepsilon^1$  является решением данного уравнения. Покажем, что  $(\mathbf{U}_\varepsilon^1, 0) \in H(\Omega_0)$ . Действительно, элементы матрицы  $A$  принадлежат  $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ , поэтому они принадлежат пространству  $C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$  [30] и, следовательно,  $|A| \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ . Так как  $|A|(\mathbf{x})$  не обращается в нуль при всех  $\mathbf{x} \in \Omega_0$ , то  $1/|A| \in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R}^2)$ , поэтому  $1/|A| \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$  [30]. Следовательно, элементы обратной матрицы  $A^{-1}$  принадлежат пространству  $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ . Элементы вектор-функции  $\mathbf{b}$  принадлежат пространству  $H^{1,0}(\Omega_0)$ , поэтому решение  $\mathbf{U}_\varepsilon^1$  системы (22) принадлежит  $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$ .

Положим  $\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^1 = (\mathbf{U}_\varepsilon^1, 0)$  и покажем, что  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^1 = \boldsymbol{\chi}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ . Для этого достаточно проверить, что  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^1$  удовлетворяет условию (21).

Подставим функцию  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^1$  в (21). Учитывая, что  $\mathbf{U}_\varepsilon^1$  является решением уравнения (22), получим следующую цепочку равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{W}_0^T] \boldsymbol{\nu}_0 + \varepsilon [(\mathbf{U}_\varepsilon^1)^T] \boldsymbol{\nu}_0 - \varepsilon [\mathbf{W}_0^T] \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 - \varepsilon^2 [(\mathbf{U}_\varepsilon^1)^T] \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 = \\ & = [\mathbf{W}_0^T] \boldsymbol{\nu}_0 + \varepsilon [(\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1)^T] \boldsymbol{\nu}_0 = [\mathbf{W}_0^T] \boldsymbol{\nu}_0 + \varepsilon \left| \left[ (\nabla w_0)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right| \geq \\ & \geq \left| \left[ (\nabla w_0)^T \boldsymbol{\nu}_0 - \varepsilon (\nabla w_0)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Это значит, что  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^1 = \boldsymbol{\chi}_0 + \varepsilon (\mathbf{U}_\varepsilon^1, 0) \in K_\varepsilon(\Omega_0)$  при всех достаточно малых  $\varepsilon$ .

Построим последовательность  $\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2$ . Аналогично функции  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1$  можно построить функцию  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2 \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$ , такую что

$$[(\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2)^T] \boldsymbol{\nu}_0 = \left| \left[ (\nabla w_\varepsilon)^T \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0.$$

Положим  $(\mathbf{U}_\varepsilon^2)^\top = -\mathbf{W}_\varepsilon^\top(\partial\mathbf{V}/\partial\mathbf{x} - r_7(\varepsilon)/\varepsilon) + (\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2)^\top$  и  $\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2 = (\mathbf{U}_\varepsilon^2, 0)$ . Покажем, что функция  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^2 = \boldsymbol{\chi}_\varepsilon + \varepsilon\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0)$ . Очевидно, что  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^2 \in H(\Omega_0)$ , поэтому достаточно проверить условие на  $\Gamma_0$ :

$$[\mathbf{W}^\top]\boldsymbol{\nu}_0 \geq |[(\nabla w)^\top]\boldsymbol{\nu}_0| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} & [\mathbf{W}_\varepsilon^\top]\boldsymbol{\nu}_0 - \varepsilon[\mathbf{W}_\varepsilon^\top]\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\boldsymbol{\nu}_0 + [(\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2)^\top]\boldsymbol{\nu}_0 = \\ & = [\mathbf{W}_\varepsilon^\top]\boldsymbol{\nu}_0 - \varepsilon[\mathbf{W}_\varepsilon^\top]\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\boldsymbol{\nu}_0 + \left|[(\nabla w_\varepsilon)^\top]\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}}\right)^\top + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\boldsymbol{\nu}_0\right| \geq \\ & \geq \left|[(\nabla w_\varepsilon)^\top]\boldsymbol{\nu}_0 - \varepsilon(\nabla w_\varepsilon)^\top\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}}\right)^\top + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\boldsymbol{\nu}_0\right| + \\ & + \left|[(\nabla w_\varepsilon)^\top]\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}}\right)^\top + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\boldsymbol{\nu}_0\right| \geq |[(\nabla w_\varepsilon)^\top]\boldsymbol{\nu}_0| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^2 = \boldsymbol{\chi}_\varepsilon + \varepsilon\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0)$ . Лемма доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon$  — решение задачи (15),  $\boldsymbol{\chi}_0$  — решение (3). Тогда

$$\|\boldsymbol{\chi}_\varepsilon - \boldsymbol{\chi}_0\|_{H(\Omega_0)} \leq c\varepsilon, \quad (24)$$

где константа  $c$  не зависит от  $\varepsilon$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 1 функции  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0)$  и  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0)$  можно подставить в вариационные неравенства (3) и (15) соответственно в качестве пробных. Сложив полученные неравенства, с использованием разложений (16)–(18) и неравенства Корна [31] получим оценку (24). Теорема доказана.

Рассмотрим построенные в лемме 1 функции  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1$  и  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2$ . В силу сильной сходимости последовательности  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon$  к решению невозмущенной задачи  $\boldsymbol{\chi}_0$  и непрерывности вложения пространства  $H^1(O)$  в  $H^{1/2}(\gamma)$  следы функций  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1$  и  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2$  сходятся сильно к  $g_0\boldsymbol{\nu}_0$  в  $H^{1/2}(\Gamma_0^-)$ , где

$$g_0 = -\left|[(\nabla w_0)^\top]\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}}\right)^\top\right)\boldsymbol{\nu}_0\right|,$$

и к нулю в  $H^{1/2}(\Gamma_0^+)$ .

Далее, так как оператор поднятия, действующий из  $H^{1/2}(\gamma)$  в  $H^1(O)$ , является линейным и непрерывным, последовательности  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1$  и  $\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2$  являются сходящимися, причем

$$\|\tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1 - \tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2\|_{H(\Omega_0)} \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно, данные последовательности сходятся к одному и тому же пределу, который будем обозначать через  $\tilde{\mathbf{W}}_0$ . При этом след функции  $\tilde{\mathbf{W}}_0$  на  $\Gamma_0^-$  равен  $g_0\boldsymbol{\nu}_0$ , а на  $\Gamma_0^+$  равен нулю. Отсюда следует, что

$$[\tilde{\mathbf{W}}_0]\boldsymbol{\nu}_0 = \left|[(\nabla w_0)^\top]\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{x}}\right)^\top\right)\boldsymbol{\nu}_0\right| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0. \quad (25)$$

Таким образом, доказана

**Лемма 2.** Существует функция  $\tilde{\mathbf{W}}_0 \in H(\Omega_0)$ , такая что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^1 &\rightarrow \tilde{\mathbf{W}}_0 && \text{сильно в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0), \\ \tilde{\mathbf{W}}_\varepsilon^2 &\rightarrow \tilde{\mathbf{W}}_0 && \text{сильно в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0). \end{aligned}$$

Функция  $\tilde{\mathbf{W}}_0$  удовлетворяет (25).

Рассмотрим функции  $U_\varepsilon^1$  и  $U_\varepsilon^2$ , введенные при доказательстве леммы 1.

**Лемма 3.** Для функций  $U_\varepsilon^1$  и  $U_\varepsilon^2$  справедливы сходимости

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^1 &\rightarrow \mathbf{Q}_0 + \tilde{\mathbf{W}}_0 && \text{сильно в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0), \\ U_\varepsilon^2 &\rightarrow -\mathbf{Q}_0 + \tilde{\mathbf{W}}_0 && \text{сильно в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{W}_0^m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу (24) в (23) можно перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда получим первую сходимость в (26). Вторая сходимость в (26) очевидна. Лемма доказана.

Таким образом, обобщая последние две леммы, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon^1 &\rightarrow (\mathbf{Q}_0 + \tilde{\mathbf{W}}_0, 0) && \text{сильно в } H(\Omega_0), \\ \lambda_\varepsilon^2 &\rightarrow (-\mathbf{Q}_0 + \tilde{\mathbf{W}}_0, 0) && \text{сильно в } H(\Omega_0). \end{aligned}$$

**3. Вывод производной функционала энергии.** Рассмотрим функцию

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon},$$

где  $\boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{\chi}^\varepsilon$  — решения задач (3) и (5) соответственно.

Рассмотрим функционал  $\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi})$  потенциальной энергии тела, занимающего возмущенную область  $\Omega_\varepsilon$ . Применим преобразование координат (4) к интегралам, входящим в  $\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi})$ . В результате получим функционал  $\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi})$ , который с использованием формул (16)–(18) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\mathbf{W}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{W}) d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} b(w, w) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\chi} d\Omega_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\Omega_0} (A_1(\mathbf{V}; \mathbf{W}, \mathbf{W}) + A_2(\mathbf{V}; w, w)) d\Omega_0 - \varepsilon \int_{\Omega_0} (\operatorname{div}(\mathbf{V} f_i) w_i + \operatorname{div}(\mathbf{V} f_3) w_3) d\Omega_0 + o(\varepsilon) R_4(\boldsymbol{\chi}), \end{aligned}$$

где  $R_4$  — некоторая ограниченная форма. Так как множество  $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$  отображается на  $K_\varepsilon(\Omega_0)$  взаимно однозначно, то

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon) = \Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) \quad (27)$$

для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ .

Итак, в силу (27) и леммы 1 имеем

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon} \leq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon}. \quad (28)$$

Найдем предел, стоящий в правой части (28). В силу теоремы 3, лемм 2, 3 и ограниченности формы  $R_4$  получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^1) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon} = \\ &= \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0) \varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}_0) - \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{Q}_0) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0) \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{W}}_0) - \bar{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{W}}_0) d\Omega_0 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_1(\mathbf{V}; \mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_2(\mathbf{V}; w_0, w_0) d\Omega_0 - \\ &\quad - \int_{\Omega_0} (\operatorname{div}(\mathbf{V} f_i) w_{0i} + \operatorname{div}(\mathbf{V} f_3) w_0) d\Omega_0, \end{aligned}$$

где  $\bar{\mathbf{f}} = (f_1, f_2)$ .

В то же время справедливы соотношения

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_0)}{\varepsilon} \geq \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2)}{\varepsilon},$$

поэтому выполнено неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2)}{\varepsilon}.$$

С учетом теоремы 3, лемм 2, 3 и ограниченности формы  $R_4$  находим

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \boldsymbol{\chi}_\varepsilon + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon^2)}{\varepsilon} = \\ &= \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0) \varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}_0) - \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{Q}_0) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0) \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{W}}_0) - \bar{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{W}}_0) d\Omega_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_1(\mathbf{V}; \mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_2(\mathbf{V}; w_0, w_0) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\operatorname{div}(\mathbf{V} f_i) w_{0i} + \operatorname{div}(\mathbf{V} f_3) w_0) d\Omega_0. \end{aligned}$$

Введем следующее обозначение:

$$\Delta(\mathbf{W}_0) = \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0) \varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{W}}_0) - \bar{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{W}}_0) d\Omega_0.$$

Легко заметить, что если  $\Delta(\mathbf{W}_0) = 0$ , то верхний и нижний пределы функции  $\alpha(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  совпадают. Следовательно, существует предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon)$ , который и определяет производную функционала энергии по параметру возмущения области.

Рассмотрим выражение  $\Delta(\mathbf{W}_0)$  подробнее, используя обобщенную формулу Грина [3]. В результате получим

$$\Delta(\mathbf{W}_0) = - \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij,j}(\mathbf{W}_0) + f_i) \tilde{w}_{0i} d\Omega_0 - \langle \sigma_\nu(\mathbf{W}_0), [\tilde{\mathbf{W}}_0^T \boldsymbol{\nu}_0]_{\Gamma_0} \rangle - \langle \sigma_{\tau i}(\mathbf{W}_0), [\tilde{w}_{0\tau i}]_{\Gamma_0} \rangle,$$

где  $\tilde{w}_{0\tau_0 i} = \tilde{w}_{0i} - (\tilde{\mathbf{W}}_0^T \boldsymbol{\nu}_0) \nu_{0i}$ ;  $\sigma_\tau(\mathbf{W}_0)$  — вектор касательных напряжений.

Как известно, функция  $\mathbf{W}_0$  удовлетворяет уравнениям равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(\mathbf{W}_0) = f_i \quad (i = 1, 2) \quad \text{п. в. в } \Omega_0$$

и некоторому набору краевых условий [3], для которых

$$\sigma_\nu(\mathbf{W}_0) \leq 0, \quad \sigma_\tau(\mathbf{W}_0) = 0 \quad \text{на } \Gamma_0.$$

Уравнения равновесия выполняются в смысле распределений, а краевые условия на  $\Gamma_0$  — в смысле пространства  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$  и сопряженного к нему  $(H_{00}^{1/2}(\Gamma_0))^*$ . В результате получаем

$$\Delta(\mathbf{W}_0) = - \left\langle \sigma_\nu(\mathbf{W}_0), \left[ (\nabla w_0)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right\rangle_{\Gamma_0}.$$

Таким образом, теорема 1, сформулированная в п. 1, доказана.

В заключение отметим, что равенство нулю  $\Delta(\mathbf{W}_0)$  является лишь достаточным условием существования производной функционала энергии по параметру возмущения области, но не необходимым.

Приведем следующий пример. Пусть решение  $\boldsymbol{\chi}_0$  невозмущенной задачи равновесия таково, что  $[(\nabla w_0)^\top \boldsymbol{\nu}_0] \geq \delta$ , где  $\delta > 0$  — некоторая константа. Кроме того, пусть решение  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon$  задачи (15) также удовлетворяет условию  $[(\nabla w_\varepsilon)^\top \boldsymbol{\nu}_0] \geq \delta$ . В этом случае для всех достаточно малых  $\varepsilon$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \left| \left[ (\nabla w)^\top \boldsymbol{\nu}_0 - \varepsilon (\nabla w)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right| = \\ = \left[ (\nabla w)^\top \boldsymbol{\nu}_0 \right] - \varepsilon \left[ (\nabla w)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \end{aligned}$$

при  $w = w_0$  и  $w = w_\varepsilon$ .

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{Y}^\top B = \mathbf{c}^\top,$$

где

$$B = I - \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right), \quad \mathbf{c}^\top = \mathbf{W}_0^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) - (\nabla w_0)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right).$$

Так же как и при доказательстве леммы 1, можно показать, что решение такого уравнения существует (обозначим его через  $\mathbf{Y}_\varepsilon^1$ ) и функция  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^1 = \boldsymbol{\chi}_0 + (\mathbf{Y}_\varepsilon^1, 0)$  принадлежит  $K_\varepsilon(\Omega_0)$ .

Аналогично функция  $\boldsymbol{\chi}_\varepsilon^2 = \boldsymbol{\chi}_\varepsilon - (\mathbf{Y}_\varepsilon^2, 0) \in K_0(\Omega_0)$ , где

$$(\mathbf{Y}_\varepsilon^2)^\top = \mathbf{W}_\varepsilon^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) - (\nabla w_\varepsilon)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right).$$

Кроме того, для функций  $\mathbf{Y}_\varepsilon^1$  и  $\mathbf{Y}_\varepsilon^2$  справедливы сходимости

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\varepsilon^1 &\rightarrow \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Y}_0 && \text{сильно в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0), \\ \mathbf{Y}_\varepsilon^2 &\rightarrow \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Y}_0 && \text{сильно в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{Y}_0 = -(\nabla w_0)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right), \quad \mathbf{Q}_0 = \mathbf{W}_0^\top \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Проводя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что верхний и нижний пределы функции  $\alpha(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  совпадают. Следовательно, производная функционала энергии существует и

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{Q}_0) - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{Q}_0) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{Y}_0) - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{Y}_0) d\Omega_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_1(\mathbf{V}; \mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} A_2(\mathbf{V}; w_0, w_0) d\Omega_0 - \\ &- \int_{\Omega_0} (\operatorname{div}(\mathbf{V}f_i)w_{0i} + \operatorname{div}(\mathbf{V}f_3)w_0) d\Omega_0. \quad (29) \end{aligned}$$

Применяя ко второму интегралу в правой части (29) формулу Грина, с учетом уравнений равновесия и краевых условий на трещине получим

$$\int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(\mathbf{W}_0)\varepsilon_{ij}(\mathbf{Y}_0) - \bar{\mathbf{f}}\mathbf{Y}_0) d\Omega_0 = - \left\langle \sigma_\nu(\mathbf{W}_0), \left[ (\nabla w_0)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right\rangle_{\Gamma_0}.$$

Обозначим через  $G$  правую часть в формуле (8). Тогда

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \boldsymbol{\chi}^\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = G - \left\langle \sigma_\nu(\mathbf{W}_0), \left[ (\nabla w_0)^\top \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \right) \boldsymbol{\nu}_0 \right] \right\rangle_{\Gamma_0}.$$

В общем случае вычислить производную функционала энергии по параметру возмущения области не удастся. Вообще говоря, существование такой производной не очевидно, так как в условии непроникания присутствует модуль скачка производной по нормали функции  $w_0$  и поэтому производной может не существовать.

Тем не менее из доказательства теоремы 1 следует справедливость оценок

$$-\Delta(\mathbf{W}_0) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) - G \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) - G = \Delta(\mathbf{W}_0).$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1974.
2. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. **Khudnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khudnev, V. A. Kovtunenکو. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
4. **Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.** Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 82–94.
5. **Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.** Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 5. С. 826–834.
6. **Kovtunenکو V. A.** Shape sensitivity of a plane crack front // Math. Methods Appl. Sci. 2003. V. 26. P. 359–374.
7. **Ohtsuka K.** Mathematics of brittle fracture // Theoret. Studies Fract. Mech. Japan. 1997. Spec. iss. P. 99–172.
8. **Мазья В. Г., Назаров С. А.** Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
9. **Баничук Н. В.** Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 2. С. 130–137.
10. **Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.** Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 69–82.

11. **Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.** Хрупкое разрушение тел с произвольными трещинами // *Успехи механики деформируемых сред*. М.: Наука, 1975. С. 156–171.
12. **Cotterell В., Rice J. R.** Slightly curved or kinked cracks // *Intern. J. Fract.* 1980. V. 16, N 2. P. 155–169.
13. **Amestoy M., Leblond J. B.** Crack paths in plane situations. 2. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // *Intern. J. Solids Struct.* 1992. V. 29, N 4. P. 465–501.
14. **Leblond J. B.** Crack paths in three-dimensional elastic solids. 1. Two-term expansion of the stress intensity factors — application to cracks path stability in hydraulic fracturing // *Intern. J. Solids Struct.* 1999. V. 36, N 1. P. 79–103.
15. **Leguillon D.** Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non isotropic materials // *Eur. J. Mech. A Solids.* 1993. V. 12, N 1. P. 33–51.
16. **Gao H., Chiu Ch.** Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids // *Intern. J. Solids Struct.* 1992. V. 29, N 8. P. 947–972.
17. **Martin P. A.** Perturbed cracks in two-dimensions: An integral-equation approach // *Intern. J. Fract.* 2000. V. 104. P. 317–327.
18. **Khludnev A. M., Sokolowski J.** The Griffith formula and the Rice — Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // *Eur. J. Appl. Math.* 1999. V. 10, N 4. P. 379–394.
19. **Ковтуненко В. А.** Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // *Прикл. математика и механика*. 2003. Т. 67, вып. 1. С. 109–123.
20. **Соколовский Я., Хлуднев А. М.** О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // *Докл. РАН*. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.
21. **Рудой Е. М.** Формула Гриффитса для пластины с трещиной // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2002. Т. 5, № 3. С. 155–161.
22. **Kovtunen V. A.** Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations // *Z. angew. Math. Phys.* 2003. Bd 54. S. 410–423.
23. **Kovtunen V. A.** Sensitivity of interfacial cracks to non-linear crack front perturbations // *Z. angew. Math. Mech.* 2002. Bd 82. S. 387–398.
24. **Khludnev A. M., Ohtsuka K., Sokolowski J.** On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. P. 99–109.
25. **Рудой Е. М.** Инвариантные интегралы для задачи равновесия пластины с трещиной // *Сиб. мат. журн.* 2004. Т. 45, № 2. С. 466–477.
26. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // *ПМТФ*. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.
27. **Kovtunen V. A.** Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // *IMA J. Appl. Math.* 2006. N 71. P. 635–657.
28. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2007. № 6. С. 113–127.
29. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
30. **Эванс Л. К.** Теория меры и тонкие свойства функций / Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи. Новосибирск: Науч. кн., 2002. (Унив. сер.; Т. 9).
31. **Дюво Г.** Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. М.: Наука, 1980.