

УДК 539.4

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩЕГО ПРЯМОЕ ИЛИ ОБРАТНОЕ МАРТЕНСИТНОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ

А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко\*

Московский государственный авиационный институт, 125871 Москва

\* Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва

В рамках различных гипотез получены аналитические решения задач о потере устойчивости стержня из сплава с памятью формы при прямом или обратном мартенситном фазовом превращении под действием сжимающих напряжений. Описаны особенности обнаруженного экспериментально явления потери устойчивости, вызванной мартенситными превращениями. Установлено, что наименьшие критические нагрузки получают при использовании гипотез продолжающегося фазового перехода и продолжающегося нагружения.

Ключевые слова: устойчивость стержня, критические нагрузки, мартенситные превращения.

Анализу устойчивости тонкостенных элементов из сплавов с памятью формы (СПФ) посвящено небольшое число работ [1–7]. В [5, 6] экспериментально установлено, что термоупругие мартенситные фазовые превращения, обуславливающие уникальные механические свойства СПФ, могут вызывать потерю устойчивости. Критические нагрузки потери устойчивости при прямом превращении оказались значительно ниже критических нагрузок изотермической потери устойчивости в наименее жестком мартенситном фазовом состоянии. Критические нагрузки потери устойчивости при обратном превращении из мартенситного состояния, свободного от фазовых деформаций, обуславливающих изменение формы, находятся между указанными выше предельными усилиями. Для фиксированной нагрузки температура потери устойчивости с увеличением длины рабочей части образца при прямом превращении возрастала, а при обратном падала.

Данная работа посвящена решению задачи устойчивости для стержня из СПФ, претерпевающего прямые и обратные мартенситные превращения под действием сжимающих нагрузок. Анализируются гипотезы, которые могут быть положены в основу решения этой задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается первоначально прямолинейный шарнирно опертый на нижнем конце и свободно опертый на верхнем конце стержень из СПФ постоянного поперечного сечения, симметричного относительно главных центральных осей инерции. К верхнему концу стержня приложена фиксированная по направлению сжимающая сила  $P$ , вызывающая до потери устойчивости равномерно распределенное по сечению продольное напряжение  $\sigma$ . При анализе устойчивости в случае прямого мартенситного превращения сила прикладывается в аустенитном состоянии при столь высокой температуре,

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (грант № 1536), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-01075) и Министерства образования Российской Федерации (грант № E00-4-57).

что создаваемых этой силой напряжений недостаточно для прямого мартенситного превращения в изотермических условиях. Затем стержень медленно охлаждается от начальной до конечной температуры прямого мартенситного превращения. При анализе устойчивости в случае обратного мартенситного превращения считается, что стержень нагружен в мартенситном состоянии силой  $P$ , создающей напряжение  $\sigma$ , недостаточное для деформации СПФ путем двойникования. Стержень имеет начальную фазовую деформацию сжатия  $\varepsilon^{(0)}$  и медленно нагревается от начальной до конечной температуры обратного превращения. Деформация  $\varepsilon^{(0)}$  может быть создана в стержне путем предварительного охлаждения его от начальной до конечной температуры прямого мартенситного превращения под действием фиксированной сжимающей нагрузки  $R$ , вызывающей напряжение  $\sigma_0$ . Считается, что в этом случае потери устойчивости на этапе предварительного прямого превращения не происходит, поэтому напряжения  $\sigma_0$  равномерно распределены по сечению стержня.

В докритическом состоянии все точки стержня имеют одинаковую температуру. Ищутся нагрузки (длины стержня), при которых в процессе прямого или обратного превращения наряду с тривиальной (прямолинейной) формой стержня возможны криволинейные формы равновесия.

Анализ проводится в рамках теории малых деформаций и гипотезы плоских сечений (для полных деформаций). Задача устойчивости решается в линеаризованной постановке. Поскольку до перехода в смежную форму равновесия происходит равномерное сжатие стержня, докритические полные, упругие и фазовые деформации, а также напряжения не зависят от координат точек стержня, докритическая кривизна и прогиб равны нулю. Докритическая температура всех точек стержня в каждый момент времени считается одинаковой.

При анализе устойчивости возникает вопрос о том, какие величины можно варьировать при написании уравнений для возмущенного состояния. Можно предположить, что в случае достаточно медленного изменения температуры при быстром переходе в смежную форму равновесия дополнительное фазовое превращение произойти не успеет. В результате при написании линеаризованных уравнений устойчивости параметр фазового состава не варьируется. Такой подход для краткости можно назвать гипотезой фиксированного фазового состава [7]. Строго говоря, эта концепция справедлива для СПФ типа CuMn, в которых фазовый состав определяется только температурой и не зависит (или почти не зависит) от действующих напряжений.

В то же время для большинства СПФ термоупругий мартенситный фазовый переход может быть вызван не только охлаждением или нагревом, но и изменением напряжений. Так как при переходе в смежную форму равновесия напряжения меняются, то будет меняться и фазовый состав, параметр которого должен варьироваться. Эту гипотезу для краткости можно назвать концепцией продолжающегося фазового перехода [7].

В процессе перехода в смежную форму равновесия нагрузку можно считать фиксированной и не варьировать. В этом случае в возмущенном состоянии вблизи вогнутой поверхности стержня возникает зона разгрузки, в которой из-за падения напряжений дополнительный фазовый переход прекращается. Эту гипотезу для краткости можно назвать концепцией упругой разгрузки. Если предположить, что действующая нагрузка варьируется, то возможны такие бесконечно малые ее вариации, которые приводят к ликвидации зоны разгрузки. В результате все сечение окажется в области дополнительного фазового перехода. Эта гипотеза соответствует концепции Ф. Шенли в теории устойчивости упруго-пластических тел и поэтому может быть названа концепцией продолжающегося нагружения [8, 9].

Температуру также можно считать как варьируемым, так и неварьируемым параметром. В первом случае естественно предположить, что вариация температуры, в отличие

от самой температуры, зависит от координат точек сечения. Если температура варьируется, то даже для СПФ, фазовый состав которых не зависит от действующих напряжений, будет отлична от нуля и вариация параметра фазового состава, причем эта вариация, вообще говоря, может быть различна в различных точках сечения.

В экспериментах [5, 6] критические нагрузки оказались чрезвычайно низкими. Поэтому подбирались такие гипотезы, которые приводят к наименьшему значению критической силы или (при фиксированной нагрузке) к наименьшей критической длине. Это условие эквивалентно требованию минимальности модуля коэффициента при вариации кривизны в выражении для вариации изгибающего момента.

**2. Система определяющих соотношений.** Для решения задачи устойчивости используется упрощенный вариант предложенной в [10–13] системы определяющих соотношений для СПФ. Одномерный вариант этой системы (для осевых напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$ ) имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}; \tag{2.1}$$

$$d\varepsilon^{(2)} = (2c_0\sigma/3 + a_0\varepsilon^{(2)}) dq; \tag{2.2}$$

$$d\varepsilon^{(2)} = (a_0\varepsilon^{(0)}/(\exp(a_0) - 1) + a_0\varepsilon^{(2)}) dq; \tag{2.3}$$

$$q = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{M_s + k|\sigma| - T}{M_s - M_f}\right), \quad q = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{A_f + k|\sigma| - T}{A_f - A_s}\right); \tag{2.4}$$

$$q = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\pi \frac{T - M_f - k|\sigma|}{M_s - M_f}\right) + 1 \right], \quad q = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\pi \frac{T - A_s - k|\sigma|}{A_f - A_s}\right) + 1 \right]; \tag{2.5}$$

$$\varepsilon^{(1)} = \sigma/E(q); \tag{2.6}$$

$$1/E(q) = q/E_1 + (1 - q)/E_2. \tag{2.7}$$

Здесь  $a_0, c_0, k$  — параметры материала;  $\varepsilon, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$  — полная, упругая и фазовая деформации;  $q$  — объемная доля мартенситной фазы, для определения которой используются либо соотношения (2.4) [13], либо (2.5) [14];  $T$  — температура сечения стержня;  $E_1, E_2$  — значения модуля Юнга для мартенситного и аустенитного состояний. Первые уравнения в (2.4) или (2.5), а также соотношение (2.2) соответствуют прямому превращению, вторые соотношения в (2.4) или (2.5), а также (2.3) — обратному превращению;  $M_s, M_f, A_s, A_f$  — температуры начала и завершения прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений материале. В выражении (2.3) для случая обратного превращения из полностью мартенситного состояния  $\varepsilon^{(0)}$  — фазовая деформация в точке начала обратного превращения. Выражение (2.7) для модуля Юнга  $E$  является следствием предположений об аддитивности потенциала Гиббса и осреднения по Рейссу [15].

Соотношения (2.4), (2.5) не учитывают влияние возникающих при изгибе касательных напряжений на температуры перехода. Согласно уравнениям (2.1)–(2.3) при решении задачи пренебрегается объемным эффектом реакции мартенситного превращения и температурной деформацией. В соотношении (2.3) в случае произвольно заданной предварительной фазовой деформации не учитывается эффект реверсивной памяти формы [13]. Если предварительная фазовая деформация  $\varepsilon^{(0)}$  для случая обратного превращения создана путем прямого превращения под действием постоянного напряжения  $\sigma_0$ , то определяющее соотношение (2.3) этот эффект учитывает, причем путем интегрирования соотношения (2.2) при  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  и нулевых начальных условиях можно получить выражение  $\varepsilon^{(0)} = 2c_0\sigma_0(\exp(a_0) - 1)/(3a_0)$ , т. е. в этом случае соотношение (2.3) может быть записано в виде

$$d\varepsilon^{(2)} = (2c_0\sigma_0/3 + a_0\varepsilon^{(2)}) dq. \tag{2.8}$$

Следовательно, определяющие соотношения для прямого (2.2) и обратного (2.8) превращений различаются лишь тем, что в уравнении для прямого превращения присутствует напряжение, действующее в процессе прямого превращения, а в уравнении для обратного превращения — постоянное напряжение, действовавшее в течение предварительного прямого превращения.

Зависимость  $\varepsilon^{(2)}(q)$  при докритическом равномерном деформировании при прямом превращении или обратном переходе может быть найдена путем интегрирования определяющих соотношений (2.2) или (2.8) при нулевых начальных условиях. В результате для обратного превращения получим

$$\varepsilon^{(2)} = 2c_0\sigma_0[\exp(a_0q) - 1]/a_0. \quad (2.9)$$

Для прямого превращения в формуле (2.9) величину  $\sigma_0$  надо заменить на  $\sigma$ .

**3. Решение при всех варьируемых параметрах.** Гипотеза плоских сечений для полной деформации записывается в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \beta z = \sigma/E(q) + \varepsilon^{(2)}. \quad (3.1)$$

Здесь  $z$  — поперечная координата в плоскости изгиба;  $\varepsilon_0$  — деформация нейтральной линии;

$$\beta = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

кривизна;  $w$  — прогиб;  $x$  — продольная координата. В данном пункте варьируется все множество переменных:  $q$ ,  $P$  и  $T$ , т. е. анализ проводится в рамках гипотез продолжающегося фазового перехода и продолжающегося нагружения и при варьировании температуры.

Взяв вариации от обеих частей равенства (3.1), для обратного превращения можно получить

$$\delta\varepsilon_0 + z\delta\beta = A\delta\sigma + (B\sigma + C\sigma_0)\delta q, \quad (3.3)$$

$$A = q/E_1 + (1 - q)/E_2, \quad B = 1/E_1 - 1/E_2, \quad C = 2c_0 \exp(a_0q)/3.$$

Здесь использованы проварьированные соотношения (2.6), (2.7), а также соотношение (2.8), в котором знак дифференциала заменен на знак вариации, а величина фазовой деформации  $\varepsilon^{(2)}$  — на выражение (2.9).

Варьируя вторые формулы в (2.4) или (2.5), для обратного превращения получим

$$\delta q = \gamma f(q)(k\delta|\sigma| - \delta T)H(\delta T - k\delta|\sigma|), \quad \gamma = 1/(A_f - A_s), \quad (3.4)$$

где  $f(q) = (\pi/2)\sqrt{1 - q^2}$  для зависимости (2.4),  $f(q) = \pi\sqrt{q(1 - q)}$  для зависимости (2.5);  $H(x)$  — функция Хевисайда. Для прямого превращения получается выражение, аналогичное (3.4), но  $\gamma = 1/(M_s - M_f)$ , а аргументом функции Хевисайда является величина  $k\delta|\sigma| - \delta T$ .

Подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$\delta\varepsilon_0 + z\delta\beta = A\delta\sigma + \gamma(B\sigma + C\sigma_0)(k\delta|\sigma| - \delta T)f(q)H(\delta T - k\delta|\sigma|). \quad (3.5)$$

Поскольку как при прямом, так и при обратном превращениях действуют фиксированные сжимающие напряжения  $\sigma_0 < 0$ ,  $\sigma < 0$ , то для обоих напряжений выполняются равенства  $|\sigma| = -\sigma$ ,  $\delta|\sigma| = -\delta\sigma$ . Вводя в (3.5) обозначения  $S_0 = -P_0/F = -\sigma_0$ ,  $S = P/F = -\sigma$  или  $S = |\sigma|$ ,  $\delta|\sigma| = \delta S$  или  $\delta\sigma = -\delta S$  и выражая из полученного соотношения вариацию  $S$ , получим

$$\delta S = \begin{cases} -(\delta\varepsilon_0 + z\delta\beta - B_2\delta t)/(A + B_2), & \delta\varepsilon_0 + z\delta\beta + A\delta t > 0, \\ -(\delta\varepsilon_0 + z\delta\beta)/A, & \delta\varepsilon_0 + z\delta\beta + A\delta t < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь  $\delta t = \delta T/k$ ;  $B_2 = k(BS + CS_0)\gamma f(q)$ . В силу неотрицательности слагаемого  $B_2$  и произвольности вариации  $\delta t$  наименьшее значение модуля коэффициента при вариации кривизны в выражении для вариации изгибающего момента соответствует случаю, когда для всего сечения выполняется условие (3.6), т. е. когда при переходе в смежную форму равновесия во всем сечении происходит дополнительное фазовое превращение.

Следует отметить, что для любых бесконечно малых вариаций  $\delta\beta$ ,  $\delta t$  всегда найдется бесконечно малая вариация  $\delta P$  такая, что условие (3.6) будет выполняться для всего сечения стержня. Такое значение  $\delta P$  найдется и при отсутствии вариации температуры. Определяя для этого случая вариацию изгибающего момента с помощью первой формулы (3.6), выражая ее через вариацию прогиба с помощью (3.2) и записывая уравнение равновесия для моментов, получим

$$\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{(A + B_2)P}{J} \delta w - \frac{B_2}{J} \int_F z \delta t_1 dz = 0. \quad (3.7)$$

Здесь  $\delta t_1$  — кососимметричная часть вариации  $\delta t$ ;  $J$  — момент инерции. Соотношение (3.7) по форме соответствует уравнению упругой устойчивости того же стержня при наличии малой поперечной нагрузки, которая, как известно, на критическую силу не влияет. Таким образом, симметричная часть вариации температуры не влияет на уравнение устойчивости, а учет кососимметричной части приводит к неоднородному уравнению, что, однако, не оказывает влияния на критическую силу. Следовательно, в рамках гипотез продолжающегося фазового перехода и продолжающегося нагружения не имеет значения, варьируется ли температура (значение критической силы от этого не зависит).

Аналогично анализу упругой устойчивости из (3.7) можно получить связь между силой  $P$ , длиной стержня  $L$  и параметром  $q$ , соответствующую первой форме потери устойчивости:

$$L = \pi \sqrt{\frac{E(q)J}{(1 + kE(q)(BS + CS_0)\gamma f(q))P}}. \quad (3.8)$$

С учетом (3.8) безразмерную длину стержня  $\lambda = L/L_1$  при обратном превращении можно выразить через безразмерные параметры нагрузки, действующей на этапах прямого ( $r = k\gamma R/F$ ) и обратного ( $p = k\gamma P/F$ ) превращений, и безразмерные параметры материала  $e = E_1/E_2$ ,  $c = c_0 E_1$ :

$$\lambda^{-2}(p, r, q) = q + e(1 - q) + (p(1 - e) + (2/3)rc \exp(a_0 q))f(q). \quad (3.9)$$

Здесь  $L_1 = \pi \sqrt{E_1 J/P}$  — критическая длина стержня при изотермической потере устойчивости в мартенситном состоянии. При описании потери устойчивости в случае прямого превращения в формуле (3.9) надо положить  $r = p$  и при вычислении параметра нагрузки использовать значение  $\gamma$ , характерное для прямого превращения.

Параметр нагрузки  $p$  имеет ясный физический смысл. Величина  $kP/F$  равна увеличению температур перехода за счет действия докритических напряжений. Поэтому параметр  $p$  равен отношению “силового” сдвига температур перехода к разности конечной и начальной температур превращения. Следует отметить, что при вычислении безразмерного параметра нагрузки  $r$ , действовавшей на предварительном этапе прямого превращения, используется значение  $\gamma$ , характерное для обратного превращения.

**4. Решение в рамках гипотезы упругой разгрузки.** Пусть при переходе в смежную форму равновесия осевая сила и температура не варьируются:

$$\int_F \delta S dF = \delta P = 0, \quad \delta T = 0. \quad (4.1)$$

Для определенности ниже рассматривается потеря устойчивости при обратном превращении. В этих условиях выражение для вариации величины  $S$  принимает вид

$$\delta S = \begin{cases} -(\delta\varepsilon_0 + z\delta\beta)/(A + B_2), & \delta\varepsilon_0 + z\delta\beta \geq 0, \\ -(\delta\varepsilon_0 + z\delta\beta)/A, & \delta\varepsilon_0 + z\delta\beta \leq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Далее для простоты рассматривается случай прямоугольного поперечного сечения высоты  $h$ . Соотношение (4.1) позволяет вычислить координату  $z_0$  точки сечения, в которой меняется знак числителя в (4.2):

$$\zeta_0 = -(1 + 2\xi) + 2\sqrt{\xi(1 + \xi)}, \quad \zeta_0 = 2z_0/h, \quad \xi = A/B_2. \quad (4.3)$$

Умножая (4.2) на  $z$  и интегрируя по площади сечения с учетом (4.3) и (3.2), можно получить выражение для вариации изгибающего момента

$$\delta M = -\frac{bh^3\zeta_0}{3B_2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}. \quad (4.4)$$

Следуя стандартной процедуре решения задачи устойчивости, из уравнения равновесия для моментов с учетом (4.4) получим

$$4\lambda^{-2} = 2\varphi(q) + \psi(q) + 2\sqrt{\varphi(q)(\varphi(q) + \psi(q))}; \quad (4.5)$$

$$\varphi(q) = q + e(1 - q), \quad \psi(q) = ((1 - e)p + (2/3)cr \exp(a_0q))f(q). \quad (4.6)$$

Решение задачи устойчивости при прямом превращении может быть получено по формулам (4.5), (4.6) при  $r = p$ .

**5. Анализ результатов.** Если в (3.9) или (4.5), (4.6) положить  $k = 0$  (что равносильно  $p = 0$ ,  $r = 0$ ), то получится обычная формула Эйлера с переменным модулем Юнга. Такое решение соответствует предположению об отсутствии дополнительного фазового превращения при переходе в смежную форму равновесия:  $\delta q = 0$ , т. е. гипотезе фиксированного фазового состава [4]. В силу положительности второго слагаемого в знаменателе в (3.8) или функции  $\psi(q)$  в (4.6) критическая длина при учете вариации параметра фазового состава всегда меньше, чем без учета при одном и том же значении модуля Юнга.

В рамках гипотезы продолжающегося фазового перехода независимо от того, принята гипотеза продолжающегося нагружения или упругой разгрузки, при использовании аппроксимаций (2.4) или (2.5) для диаграммы перехода величина  $\lambda$  в окрестности точки  $q = 0$  уменьшается с ростом  $q$ , а в окрестности точки  $q = 1$  увеличивается с ростом  $q$ . Установлено, что кривые  $\lambda = \lambda(q)$ , соответствующие решению в рамках гипотез продолжающегося фазового перехода [7] и продолжающегося нагружения [8, 9], расположены ниже соответствующих кривых, полученных при других гипотезах.

В некоторой промежуточной точке  $q^* \in (0, 1)$  величина  $\lambda$  достигает единственного минимального значения  $\lambda^*$ . При  $q \rightarrow 1$  для аппроксимаций (2.4), (2.5)  $f(q) \rightarrow 0$ , поэтому  $\lambda \rightarrow 1$ , т. е. критическая длина стержня, увеличиваясь, стремится к критической длине изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии  $L_1$ . Отсюда следует, что минимальная критическая длина потери устойчивости, вызванной прямым или обратным мартенситным превращением, определяемая в рамках концепции продолжающегося фазового перехода, всегда меньше критической длины изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии, что соответствует экспериментальным данным [5, 6].

При использовании аппроксимации (2.5) фазовой диаграммы при  $q \rightarrow 0$  критическая длина стержня стремится к критической длине  $L_2 = \pi\sqrt{E_2J/P}$  изотермической потери устойчивости в аустенитном состоянии. Следовательно, в рамках аппроксимации (2.5) график зависимости критической длины потери устойчивости, вызванной термоупругим

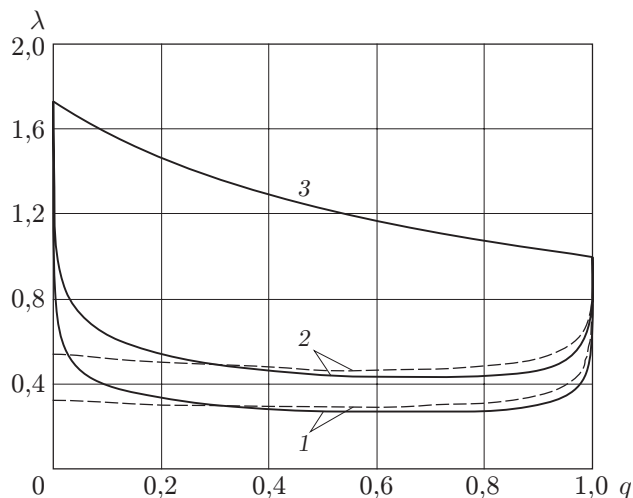


Рис. 1

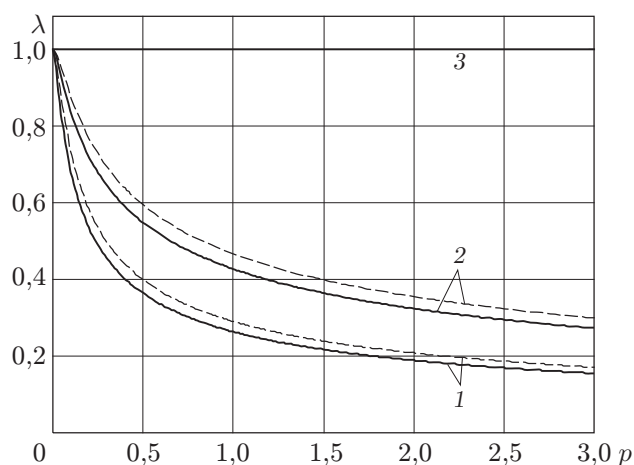


Рис. 2

мартенситным превращением, от  $q$  представляет собой непрерывную кривую, соединяющую точки  $q = 0, L = L_2$  (упругая потеря устойчивости в аустенитном состоянии) и  $q = 1, L = L_1$  (упругая потеря устойчивости в мартенситном состоянии). Эта кривая расположена ниже кривой изотермической потери устойчивости, соответствующей уравнению (3.9) или (4.5), (4.6) при  $k = 0$  ( $p = 0, r = 0$ ).

Если используется аппроксимация (2.4) диаграммы перехода, то при  $q \rightarrow 0$  критическая длина стержня, согласно (3.9) или (4.5), (4.6), стремится к некоторому значению, меньшему  $L_2$ . Следовательно, в данном случае зависимость критической длины от параметра фазового состава терпит разрыв в точке начала прямого мартенситного превращения. В интервале  $q \in [0, 1/3]$  критическая длина стержня, вычисляемая с использованием аппроксимации (2.4), меньше, чем при использовании аппроксимации (2.5). При  $q = 1/3$  результаты для обеих аппроксимаций одинаковы, а при  $1/3 < q < 1$  критическая сила для аппроксимации (2.5) меньше, чем для (2.4).

На рис. 1 приведены зависимости безразмерной критической длины стержня  $\lambda$  от  $q$ , вычисленные для прямого превращения при  $p = 1$  по формулам (3.9) (кривые 1) и (4.5), (4.6) (кривые 2). Сплошные кривые соответствуют аппроксимации (2.5) диаграммы перехода, штриховые — аппроксимации (2.4). Кривая 3 соответствует решению в рамках гипотезы фиксированного фазового состава. Здесь и далее расчеты проведены для значений безразмерных параметров  $e = 1/3, c = 7,9$ , характерных для никелида титана [13].

Поскольку минимальная критическая длина стержня для обеих аппроксимаций фазовой диаграммы достигается при  $q > 1/3$ , то при использовании аппроксимации (2.5) получается меньшее значение минимальной критической силы, чем при использовании аппроксимации (2.4). На рис. 2 приведены зависимости минимальной безразмерной критической длины  $\lambda$  потери устойчивости при прямом мартенситном превращении от безразмерного параметра нагрузки  $p$  (обозначения те же, что на рис. 1). Из рис. 2 следует, что при достаточно больших нагрузках критическая длина потери устойчивости, вызванной прямым мартенситным превращением, может быть значительно меньше критической длины изотермической эйлеровой потери устойчивости при минимальном (мартенситном) значении модуля Юнга, что соответствует экспериментальным данным [5, 6]. Минимальная критическая длина, определяемая в рамках гипотезы продолжающегося нагружения, всегда меньше той же величины, определяемой в рамках гипотезы упругой разгрузки.

Пусть  $M_s - M_f = A_f - A_s$ , т. е. значения параметров  $\gamma$  для прямого и обратного превращений одинаковы. Можно доказать, что в этом случае критическая длина потери

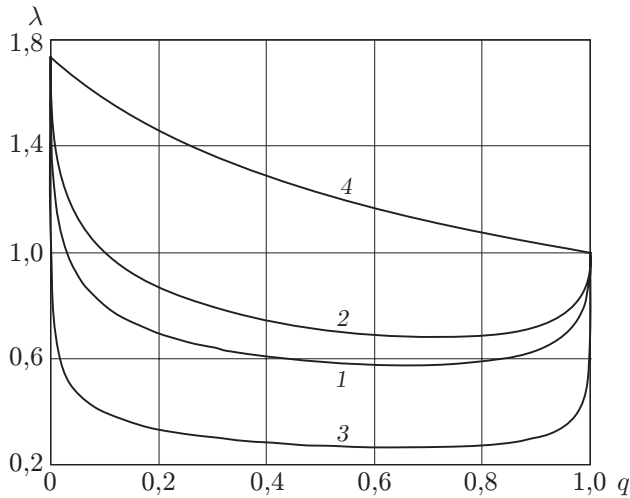


Рис. 3

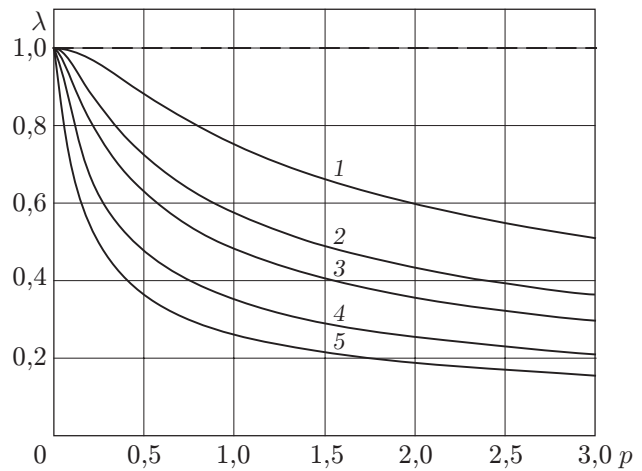


Рис. 4

устойчивости при обратном превращении с нагрузками  $p$  и  $r$  всегда находится между критическими длинами потери устойчивости при прямом превращении для нагрузок  $p$  и  $r$ . На рис. 3 кривая 1 соответствует потере устойчивости при обратном превращении под действием нагрузки  $p = 1$  после прямого превращения под действием нагрузки  $r = 0,1$ . Кривые 2, 3 соответствуют потере устойчивости при прямом превращении под действием нагрузок  $p = 0,1; 1,0$ . Кривая 4 получена с использованием гипотезы фиксированного фазового состава.

При заданной нагрузке, действующей в случае обратного превращения, критическая длина стержня является убывающей функцией сжимающей нагрузки, действовавшей на предварительном этапе прямого превращения. На рис. 4 приведена зависимость минимальной безразмерной критической длины потери устойчивости стержня при обратном превращении от безразмерной нагрузки  $p$  для различных значений  $r$ . Решение получено в рамках гипотезы продолжающегося нагружения. Кривая 1 соответствует  $r = 0$ , кривая 2 —  $r = 0,1p$ , кривая 3 —  $r = 0,2p$ , кривая 4 —  $r = 0,5p$ , кривая 5 —  $r = p$ . Кривая 1 соответствует потере устойчивости при обратном превращении из мартенситного состояния при отсутствии фазовых деформаций, обуславливающих изменение формы. Эти критические длины существенно меньше минимальной критической длины изотермической потери устойчивости, которой соответствует штриховая линия  $\lambda = 1$ . В то же время они превышают критическую длину потери устойчивости при прямом превращении под действием той же нагрузки (кривая 5). Эти результаты также не противоречат экспериментальным данным [5, 6].

Из (2.5) можно получить равенство

$$t = p + \arccos(2q - 1)/\pi, \quad (5.1)$$

где для прямого превращения  $t = (T - M_f)/(M_s - M_f)$ , для обратного  $t = (T - A_s)/(A_f - A_s)$ . На рис. 5 приведены зависимости безразмерной температуры потери устойчивости  $t$  от  $\lambda$  для прямого превращения (участки кривых, расположенные выше точек, в которых кривые имеют вертикальные касательные) и обратного превращения при  $p = r$  (участки кривых, расположенные ниже этих точек), построенные в соответствии с (5.1), (3.9). Кривая 1 соответствует  $p = 1$ ; кривая 2 —  $p = 0,5$ ; кривая 3 —  $p = 0,1$ ; кривая 4 —  $p = 0$  ( $k = 0$ ). Из рис. 5 следует, что с увеличением длины образца температура потери устойчивости при прямом превращении растет, а при обратном падает (за исключением кривой 4, полученной с использованием гипотезы фиксированного фазового состава), что соответствует экспериментальным данным [5, 6].



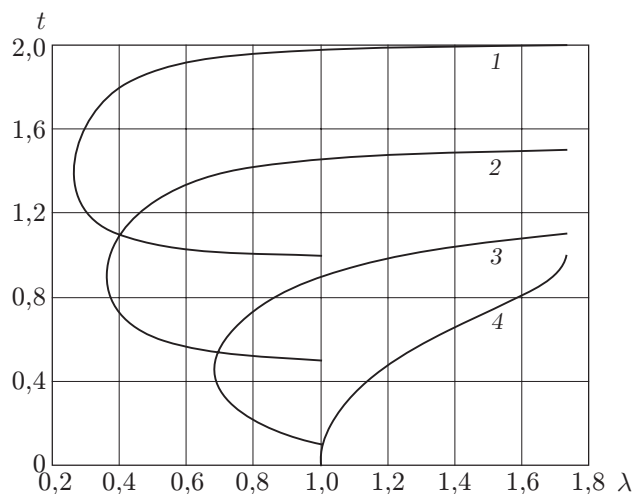


Рис. 5

Таким образом, линеаризованный анализ устойчивости стержня из СПФ в рамках гипотез продолжающегося фазового превращения и продолжающегося нагружения позволяет качественно описать обнаруженное экспериментально [5, 6] явление потери устойчивости, вызванной мартенситными фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Хусаинов М. А.** Исследование эффекта осесимметричного выпучивания круглых пластин // Журн. техн. физики. 1997. Т. 67, № 6. С. 118–120.
2. **Хусаинов М. А., Малухина О. А.** Анализ устойчивости сферических сегментов с памятью формы // Тр. III Междунар. семинара “Современные проблемы прочности” им. В. А. Лихачева, Старая Русса, 20–24 сент. 1999 г. Новгород: Издат.-полиграф. центр Новгор. гос. ун-та, 1999. Т. 2. С. 185–189.
3. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Устойчивость стойки Шенли при ползучести или при прямом термоупругом превращении // Механика композиц. материалов и конструкций. 2000. Т. 6, № 1. С. 89–102.
4. **Сильченко Л. Г.** Устойчивость сжатого стержня из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Физика процессов деформации и разрушения и прогнозирование механического поведения материалов: Науч. тр. XXXVI семинара “Актуальные проблемы прочности”, Витебск, 26–29 сент. 2000 г. Витебск: Издат. центр Витеб. гос. технол. ун-та, 2000. Ч. 1. С. 359–364.
5. **Мовчан А. А., Казарина С. А.** Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
6. **Movchan A. A., Kazarina S. A., Silchenko L. G., Danilin A. N.** Phenomenon of stability loss due to thermoelastic phase transition under a compressive loading // Contemporary res. in theoret. and appl. mech.: Proc. of the 14th US Nat. congr. of theoret. and appl. mech. Blacksburg, VA, June 23–28, 2002. Blacksburg: Virginia Polytech. inst. and state univ., 2002. P. 424.
7. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Концепция “продолжающегося фазового перехода” для анализа устойчивости при термоупругих фазовых превращениях // Материалы VIII Междунар. симп. “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”, Ярополец, 11–15 февр. 2002 г. М.: “Оптимпресс”, 2002. С. 28, 29.

8. **Шенли Ф.** Теория колонны за пределом упругости // Механика. 1951. № 2. С. 88–98.
9. **Работнов Ю. Н.** О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сб. 1952. № 11. С. 123–126.
10. **Мовчан А. А.** Микромеханический подход к описанию процессов деформирования и накопления повреждений при сложном напряженном состоянии // Тез. докл. IV Междунар. симп. “Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии”, Севастополь, 18–20 июня 1992 г. Киев: Ин-т пробл. прочности АН Украины, 1992. С. 45, 46.
11. **Мовчан А. А.** Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
12. **Мовчан А. А.** Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197–205.
13. **Мовчан А. А.** Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 173–181.
14. **Liang C., Rogers C. A.** One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intelligent Material Syst. Structures. 1990. V. 1, N 2. P. 207–234.
15. **Мовчан А. А.** Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 79–90.

*Поступила в редакцию 9/IX 2002 г.,  
в окончательном варианте — 5/XII 2002 г.*

---